

МОЛОДОЙ

ISSN 2072-0297

# УЧЁНЫЙ

международный научный журнал



*Ведущий*

16+

11  
2016  
Часть I

КУРС  
Римского Гражданского Права

О. Н. ПЛЕВАКО.  
РЪЧИ

ДЕЛО ИГУМЕНЬИ  
МИТРОФАННИ,  
обвиняемой в поджогах,  
мошеничестве, в присвоении  
и растрате чужого имущества

ГОСУ

АМЕНТА  
ПОЛИ

ISSN 2072-0297

# Молодой учёный

Международный научный журнал

Выходит два раза в месяц

№ 11 (115) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** Ахметов Ильдар Геннадьевич, кандидат технических наук

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова Мария Николаевна, доктор педагогических наук

Иванова Юлия Валентиновна, доктор философских наук

Каленский Александр Васильевич, доктор физико-математических наук

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук

Лактионов Константин Станиславович, доктор биологических наук

Сараева Надежда Михайловна, доктор психологических наук

Абдрасилов Турганбай Курманбаевич, доктор философии (PhD) по философским наукам

Авдеюк Оксана Алексеевна, кандидат технических наук

Айдаров Оразхан Турсункожаевич, кандидат географических наук

Алиева Тарана Ибрагим кызы, кандидат химических наук

Ахметова Валерия Валерьевна, кандидат медицинских наук

Брезгин Вячеслав Сергеевич, кандидат экономических наук

Данилов Олег Евгеньевич, кандидат педагогических наук

Дёмин Александр Викторович, кандидат биологических наук

Дядюн Кристина Владимировна, кандидат юридических наук

Желнова Кристина Владимировна, кандидат экономических наук

Жуйкова Тамара Павловна, кандидат педагогических наук

Жураев Хуснидин Олтинбоевич, кандидат педагогических наук

Игнатова Мария Александровна, кандидат искусствоведения

Калдыбай Кайнар Калдыбайулы, доктор философии (PhD) по философским наукам

Кенесов Асхат Алмасович, кандидат политических наук

Коварда Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук

Комогорцев Максим Геннадьевич, кандидат технических наук

Котляров Алексей Васильевич, кандидат геолого-минералогических наук

Кузьмина Виолетта Михайловна, кандидат исторических наук, кандидат психологических наук

Кучерявенко Светлана Алексеевна, кандидат экономических наук

Лескова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук

Макеева Ирина Александровна, кандидат педагогических наук

Матвиенко Евгений Владимирович, кандидат биологических наук

Матроскина Татьяна Викторовна, кандидат экономических наук

Матусевич Марина Степановна, кандидат педагогических наук

Мусаева Ума Алиевна, кандидат технических наук

Насимов Мурат Орленбаевич, кандидат политических наук

Паридинова Ботагоз Жаппаровна, магистр философии

Прончев Геннадий Борисович, кандидат физико-математических наук

Семахин Андрей Михайлович, кандидат технических наук

Сенцов Аркадий Эдуардович, кандидат политических наук

Сенюшкин Николай Сергеевич, кандидат технических наук

Титова Елена Ивановна, кандидат педагогических наук

Ткаченко Ирина Георгиевна, кандидат филологических наук

Фозилов Садриддин Файзуллаевич, кандидат химических наук

Яхина Асия Сергеевна, кандидат технических наук

Ячинова Светлана Николаевна, кандидат педагогических наук

На обложке изображен Фёдор Никифорович Плевако (1842–1909) — один из самых известных российских адвокатов, юрист, судебный оратор, действительный статский советник.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-38059 от 11 ноября 2009 г.**

Журнал входит в систему РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) на платформе elibrary.ru.

Журнал включен в международный каталог периодических изданий «Ulrich's Periodicals Directory».

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

#### **Международный редакционный совет:**

Айрян Заруи Геворковна, *кандидат филологических наук, доцент (Армения)*

Арошидзе Паата Леонидович, *доктор экономических наук, ассоциированный профессор (Грузия)*

Атаев Загир Вагитович, *кандидат географических наук, профессор (Россия)*

Ахмеденов Кажмурат Максutowич, *кандидат географических наук, ассоциированный профессор (Казахстан)*

Бидова Бэла Бертовна, *доктор юридических наук, доцент (Россия)*

Борисов Вячеслав Викторович, *доктор педагогических наук, профессор (Украина)*

Велковска Гена Цветкова, *доктор экономических наук, доцент (Болгария)*

Гайич Тамара, *доктор экономических наук (Сербия)*

Данатаров Агахан, *кандидат технических наук (Туркменистан)*

Данилов Александр Максимович, *доктор технических наук, профессор (Россия)*

Демидов Алексей Александрович, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Досманбетова Зейнегуль Рамазановна, *доктор философии (PhD) по филологическим наукам (Казахстан)*

Ешиев Абдыракман Молдоалиевич, *доктор медицинских наук, доцент, зав. отделением (Кыргызстан)*

Жолдошев Сапарбай Тезекбаевич, *доктор медицинских наук, профессор (Кыргызстан)*

Игисинов Нурбек Сагинбекович, *доктор медицинских наук, профессор (Казахстан)*

Кадыров Кутлуг-Бек Бекмурадович, *кандидат педагогических наук, заместитель директора (Узбекистан)*

Кайгородов Иван Борисович, *кандидат физико-математических наук (Бразилия)*

Каленский Александр Васильевич, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Козырева Ольга Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Россия)*

Колпак Евгений Петрович, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Куташов Вячеслав Анатольевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Лю Цзюань, *доктор филологических наук, профессор (Китай)*

Малес Людмила Владимировна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Нагервадзе Марина Алиевна, *доктор биологических наук, профессор (Грузия)*

Нурмамедли Фазиль Алигусейн оглы, *кандидат геолого-минералогических наук (Азербайджан)*

Прокопьев Николай Яковлевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Прокофьева Марина Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Казахстан)*

Рахматуллин Рафаэль Юсупович, *доктор философских наук, профессор (Россия)*

Ребезов Максим Борисович, *доктор сельскохозяйственных наук, профессор (Россия)*

Сорока Юлия Георгиевна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Узаков Гулом Норбоевич, *доктор технических наук, доцент (Узбекистан)*

Хоналиев Назарали Хоналиевич, *доктор экономических наук, старший научный сотрудник (Таджикистан)*

Хоссейни Амир, *доктор филологических наук (Иран)*

Шарипов Аскар Калиевич, *доктор экономических наук, доцент (Казахстан)*

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Галина Анатольевна

**Ответственные редакторы:** Осянина Екатерина Игоревна, Вейса Людмила Николаевна

**Художник:** Шишков Евгений Анатольевич

**Верстка:** Бурьянов Павел Яковлевич, Голубцов Максим Владимирович, Майер Ольга Вячеславовна

Почтовый адрес редакции: 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.

Фактический адрес редакции: 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: info@moluch.ru; http://www.moluch.ru/.

Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый».

Тираж 500 экз. Дата выхода в свет: 1.07.2016. Цена свободная.

Материалы публикуются в авторской редакции. Все права защищены.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

**Амплеева О. В.**

Расчет балок с микронеоднородной структурой с применением сложных многосеточных элементов .....1

**Babayev S. S., Jo'rayeva L. I.**

Construction of optimal interpolation formulas in  $W[2]^{2,1}(0,1)$  space ..... 6

**Бодякин Е. В.**

Генерация расчетных сейсмических воздействий по заданным спектрам реакций ..... 9

**Витова Т. Б.**

Моделирование эвакуации из Камерного и Малого залов Красноярской филармонии с помощью модели пешеходных потоков SIGMA.CA .....13

**Вяткин А. В., Корниенко В. С.**

Математическое моделирование взаимодействия ионов с дипольными образованиями .....18

**Горохов А. А., Черепанова И. С.**

Анализ уравнения, моделирующего волновые движения в тектоническом разломе .....25

**Казаков И. В.**

Обработка данных геомониторинга на основе сингулярного спектрального анализа..... 30

**Краснов А. А.**

Метод сквозного счета для численного моделирования деформации пористых металлов .....35

**Макарова М. Ю., Самохина В. М.**

Метод автоматической классификации документов в задаче профессионального самоопределения ..... 40

**Мамадалиев У. Х.**

О строении одной разрешимой алгебры Лейбница .....43

**Мамадалиев У. Х.**

О жесткости одной разрешимой алгебры Лейбница с филиформным нильрадикалом ..... 47

**Мамытов А. О.**

Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка .....49

**Петрова А. А.**

Структура разбиений прямоугольников на Т-тетрамино .....53

**Похабова М. А.**

Анализ маятниковых волн в слоистой среде на основе одномерной модели .....58

**Рыбков М. В.**

Методы Рунге-Кутты первого порядка с согласованными областями устойчивости .....64

**Смолехо И. В.**

Параллельный вычислительный алгоритм для анализа акустических волн в жидком кристалле с учетом моментных взаимодействий .....69

**Соловьева О. А.**

Комбинаторные приложения треугольника Паскаля .....75

**Ченцов Е. П.**

Модели блочной среды для исследования колебательных процессов в структурно неоднородных средах .....79

## ФИЗИКА

**Емельянов А. А., Бесклеткин В. В., Авдеев А. С., Габзалилов Э. Ф., Аюпов В. И., Федоров А. П., Прокопьев К. В., Ситенков А. А., Бурхацкий В. В.**

Математическая модель асинхронного двигателя с переменными  $\Psi_R - I_S$  в системе абсолютных единиц на основе интегрирующих звеньев .....85

**Копп М. И.**

Генерация крупномасштабных вихревых структур во вращающейся самогравитирующей среде с мелкомасштабной неспиральной силой ..... 101

**Лепескин Ю. П., Пермяков Н. В.**

Разработка лабораторного стенда для количественного термозондового анализа полупроводниковых материалов ..... 110

**Парпула О. А., Поляков И. В., Ермолаев А. В.**

Управление спектральным составом выходного сигнала при модуляции электронного потока анодным напряжением ..... 115

**Хожиев Ш. Т., Хожиев Ш. Т.**

Оптические просветления кожи и крови: перспективы и применения в медицине ..... 119

**Эргашев Ш. Ш.**

Определение механических воздействий гидротехнических сооружений с помощью радиационных процессов в оптических волокнах..... 122

## ХИМИЯ

**Муминова Н. И., Рахимова М. А., Сидикова Х. Г., Рашидова К. Х.**

Селективные полупроводниковые сенсоры для определения содержания фтористого водорода..... 126

**Мутных В. И., Данилов Д. Н.**

Определение состава химической ловушки «Родамин» на основе физико-химических свойств..... 128

**Шодиев Г. Ш., Фозилов С. Ф., Аслонов Б. Б., Нарзиева С. О., Холлиева М. Х., Ахмедова О. Б.**

Ионогенные полимеры, полученные на основе эпихлоргидрина с бензоксазолинонами, их флокулирующие свойства ..... 129



# МАТЕМАТИКА

## Расчет балок с микронеоднородной структурой с применением сложных многосеточных элементов

Амплеева Ольга Викторовна, аспирант

Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

*Как известно, базовые дискретные модели балок с микронеоднородной структурой, которые учитывают их структуру, имеют очень высокую размерность. В данной работе показан расчет упругой композитной балки с применением сложных многосеточных конечных элементов (МнКЭ) формы прямоугольного параллелепипеда. Кратко изложены процедуры построения сложных МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда для расчета упругих композитных балок. При проектировании сложного МнКЭ используются двухсеточные конечные элементы (ДвКЭ). При построении ДвКЭ применяем две вложенные узловые сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением ДвКЭ, которое учитывает его неоднородную (микронеоднородную) структуру. Крупная сетка используется для понижения размерности базового разбиения ДвКЭ. Предлагаемые сложные МнКЭ в композитных балках описывают трехмерное напряженное состояние, учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру и образуют многосеточные дискретные модели малой размерности. Напряжения определяются в любом компоненте неоднородной структуры балок.*

**Ключевые слова:** *упругость, композиты, балки, метод конечных элементов, сложные многосеточные конечные элементы.*

### Введение

Расчет по методу конечных элементов (МКЭ) упругих трехмерных балок с учетом их структуры сводится к построению базовых дискретных моделей высокого порядка [1, 2], что порождает проблемы при реализации МКЭ на ЭВМ. В [3, 4] разработаны многосеточные конечные элементы (МнКЭ), которые проектируются на основе базовых дискретных моделей и порождают многосеточные дискретные модели балок малой размерности. Однако для балок с микронеоднородной структурой необходимо использовать достаточно мелкие базовые разбиения, что приводит к резкому увеличению размерности дискретных моделей, в этом случае применение МнКЭ малоэффективно [3, 4]. Здесь лучше применять сложные МнКЭ [5, 6], при построении которых используются двухсеточные конечные элементы (ДвКЭ) формы прямоугольного параллелепипеда [3, 4]. В данной работе кратко изложены процедуры построения ДвКЭ, сложных МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, которые имеют неоднородную структуру. Достоинства предлагаемых сложных элементов состоят в следующем:

- учитывают неоднородную (микронеоднородную) структуру трехмерных упругих балок;
- образуют многосеточные дискретные модели трехмерных балок, число узловых неизвестных МКЭ которых на несколько порядков меньше числа узловых неизвестных базовых дискретных моделей;
- порождают решения с заданной погрешностью, при этом напряжения определяются в любом компоненте неоднородной структуры балок.

Реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей трехмерных балок требует меньше объема памяти ЭВМ и временных затрат, чем для базовых дискретных моделей. Кроме того, в процедурах построения сложных МнКЭ используются известные алгоритмы МКЭ [1], поэтому эти процедуры удобно реализуются на ЭВМ.

В заключительном разделе приведен пример расчета по МКЭ трехмерной балки волокнистой структуры с использованием сложных МнКЭ и выполнен анализ результатов расчета.

**Процедура построения двухсеточных конечных элементов**

Основные положения процедуры покажем на примере построения ДвКЭ  $V_i^a$  с неоднородной структурой формы прямоугольного параллелепипеда размерами  $a \times b \times c$  (рис. 1). Считаем, что между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ  $V_i^a$  связи идеальны, а функции перемещений, напряжений и деформаций этих компонентов удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающих трехмерной задаче теории упругости [7], т.е. во всей области ДвКЭ  $V_i^a$  реализуется трехмерное напряженное состояние. Область ДвКЭ  $V_i^a$  представляем базовым разбиением, состоящим из однородных односеточных КЭ  $V_j^h$  первого порядка формы куба со стороной  $h$  [1],  $j = 1, \dots, M$ ;  $M$  – общее число КЭ  $V_j^h$ .

На рис. 1 показано базовое разбиение ДвКЭ  $V_i^a$  на КЭ  $V_j^h$ , которое учитывает его микронеоднородную структуру и порождает мелкую узловую сетку  $V_i^h$  размерности  $m_1 \times m_2 \times m_3$  с шагом  $h$  по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Для рис. 1 имеем  $m_1 = m_2 = m_3 = 11$ . ДвКЭ  $V_i^a$  армирован волокнами сечением  $h \times h$ , параллельных оси  $Ox$ . Сечения волокон закрашены. На мелкой сетке  $V_i^h$  определяем крупную сетку  $V_i^H$  размерности  $n_1 \times n_2 \times n_3$  с шагами:  $H_1$  по оси  $Ox$ ,  $H_2$  по оси  $Oy$ ,  $H_3$  по оси  $Oz$ , причем,  $H_1 = k_1 h$ ,  $H_2 = k_2 h$ ,  $H_3 = k_3 h$ , где  $k_1, k_2, k_3$  – целые. Узлы сетки  $V_i^H$  отмечены точками,  $k_1 = k_2 = k_3 = 2$ ,  $H_1 = H_2 = H_3 = 2h$ ,  $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ . Полную потенциальную энергию  $\Pi_i^a$  базового разбиения ДвКЭ  $V_i^a$  представим в форме [1, 8]

$$\Pi_i^a = \sum_{j=1}^M \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_j^T [K_j^h] \mathbf{q}_j - \mathbf{q}_j^T \mathbf{P}_j \right), \tag{1}$$

где  $[K_j^h]$  – матрица жесткости,  $\mathbf{P}_j, \mathbf{q}_j$  – векторы узловых сил и перемещений КЭ  $V_j^h$  базового разбиения ДвКЭ,  $T$  – транспонирование.

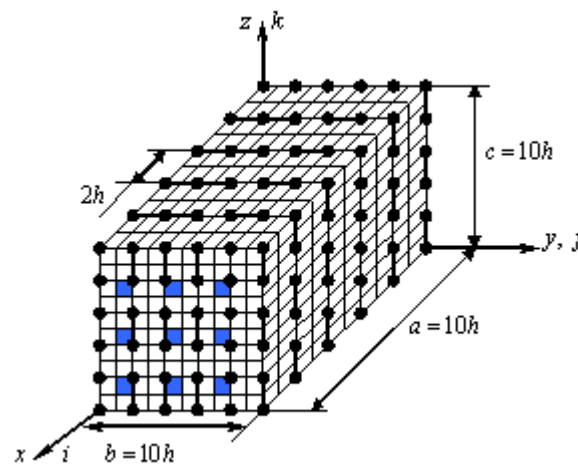


Рис. 1. Сетки ДвКЭ  $V_i^a$

С помощью полиномов Лагранжа [8] на крупной сетке  $V_i^H$  определяем функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$  ДвКЭ  $V_i^a$ , которые запишем в форме

$$u_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} u_{ijk}, \quad v_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} v_{ijk}, \quad w_a = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} N_{ijk} w_{ijk}, \tag{2}$$



где  $u_{ijk}, v_{ijk}, w_{ijk}$  – значения функций перемещений  $u_a, v_a, w_a$  в узле  $i, j, k$  сетки  $V_i^H$ ;  $i, j, k$  – координаты целочисленной системы координат  $ijk$ , введенной для узлов крупной сетки  $V_i^H$  (рис. 1);  $N_{ijk} = N_{ijk}(x, y, z)$  – базисная функция узла  $i, j, k$  сетки  $V_i^H$ ,  $i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2, k = 1, \dots, n_3$ ,  $N_{ijk} = L_i(x)L_j(y)L_k(z)$ ,

$$L_i(x) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq i}^{n_1} \frac{x - x_\alpha}{x_i - x_\alpha}, \quad L_j(y) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq j}^{n_2} \frac{y - y_\alpha}{y_j - y_\alpha}, \quad L_k(z) = \prod_{\alpha=1, \alpha \neq k}^{n_3} \frac{z - z_\alpha}{z_k - z_\alpha}, \quad (3)$$

$x_i, y_j, z_k$  – координаты узла  $i, j, k$  сетки  $V_i^H$  в системе координат  $Oxyz$  (рис. 1).

Введем следующие обозначения:  $N_\beta = N_{ijk}$ ,  $u_\beta = u_{ijk}$ ,  $v_\beta = v_{ijk}$ ,  $w_\beta = w_{ijk}$ , где  $\beta = 1, \dots, n$ ;  $n = n_1 n_2 n_3$ . Тогда выражения (2) принимают вид

$$u_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta u_\beta, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta v_\beta, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^n N_\beta w_\beta. \quad (4)$$

Пусть  $\mathbf{q}_i^a = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}^T$  есть вектор узловых перемещений крупной сетки  $V_i^H$ , т.е. вектор узловых перемещений ДвКЭ  $V_i^a$ . Используя (4), вектор  $\mathbf{q}_j$  узловых перемещений КЭ  $V_j^h$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_i^a$  узловых перемещений ДвКЭ  $V_i^a$ . В результате получим равенство

$$\mathbf{q}_j = [A_j^a] \mathbf{q}_i^a, \quad (5)$$

где  $[A_j^a]$  – прямоугольная матрица,  $j = 1, \dots, M$ .

Подставляя (5) в выражение (1), из условия  $\partial \Pi_i^a / \partial \mathbf{q}_i^a = 0$  получаем уравнение  $[K_i^a] \mathbf{q}_i^a = \mathbf{F}_i^a$ , где

$$[K_i^a] = \sum_{j=1}^M [A_j^a]^T [K_j^h] [A_j^a], \quad \mathbf{F}_i^a = \sum_{j=1}^M [A_j^a]^T \mathbf{P}_j, \quad (6)$$

$[K_i^a]$ ,  $\mathbf{F}_i^a$  – матрица жесткости и вектор узловых сил ДвКЭ  $V_i^a$ .

*Замечание 1.* Решение, построенное для крупной сетки  $V_i^H$  ДвКЭ  $V_i^a$ , с помощью формул (5) проецируем на мелкую сетку  $V_i^h$  базового разбиения ДвКЭ. В результате находим узловые перемещения мелкой сетки ДвКЭ  $V_i^a$ , что дает возможность вычислять напряжения в любом КЭ  $V_j^h$  базового разбиения ДвКЭ  $V_i^a$  и, следовательно, можно определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры ДвКЭ  $V_i^a$ , т. е. балки.

### Процедура построения сложных МнКЭ

Основные положения процедуры покажем на примере построения сложного МнКЭ  $V_e^b$  с неоднородной структурой формы прямоугольного параллелепипеда (рис. 2). Область МнКЭ  $V_e^b$  представляем ДвКЭ  $V_i^a$ ,  $i = 1, \dots, M_a$ ,  $M_a$  – общее число ДвКЭ  $V_i^a$ . При этом ДвКЭ  $V_i^a$  имеют одинаковые геометрические размеры, неоднородную структуру, мелкие  $V_i^h$  и крупные  $V_i^H$  сетки. На рис. 2 сложный МнКЭ  $V_e^b$  (размеры  $20h \times 20h \times 20h$ ) состоит из восьми ДвКЭ  $V_i^a$  (размеры  $10h \times 10h \times 10h$ ). Границы ДвКЭ  $V_i^a$  отмечены пунктирными линиями,  $M_a = 8$ . Базовые разбиения ДвКЭ  $V_i^a$  учитывают неоднородную структуру сложного МнКЭ  $V_e^b$ . Крупные сетки  $V_i^H$  ДвКЭ  $V_i^a$  ( $i = 1, \dots, M_a$ ) образуют сетку  $H_a$ , на которой определяем крупную сетку  $V_H^b$  (размерности  $\alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3$ ) сложного МнКЭ  $V_e^b$  (сетка  $V_H^b$  вложена в сетку  $H_a$ ). Узлы сетки  $V_H^b$  отмечены точками,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 6$ . Функции перемещений  $u_b, v_b, w_b$ , построенные на крупной сетке  $V_H^b$  с помощью полиномов Лагранжа (интерполяционных полиномов) [1, 8], представим в виде

$$u_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^u, \quad v_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^v, \quad w_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta}^b q_{\beta}^w, \quad (7)$$

где  $N_{\beta}^b$  – базисная функция  $\beta$ -го узла крупной сетки  $V_H^b$ ;  $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w$  – значения соответственно функций перемещений  $u_b, v_b, w_b$  в  $\beta$ -ом узле сетки  $V_H^b$ ;  $m = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ .

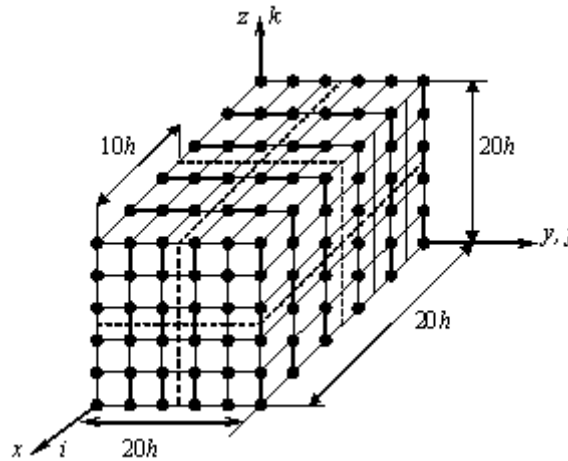


Рис. 2. Сложный МнКЭ  $V_e^b$

Полную потенциальную энергию  $\Pi_e^b$  МнКЭ  $V_e^b$  представляем как сумму полных потенциальных энергий ДвКЭ  $V_i^a$ ,  $i = 1, \dots, M_a$ , т.е.

$$\Pi_e^b = \sum_{i=1}^{M_a} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{q}_i^a)^T [K_i^a] \mathbf{q}_i^a - (\mathbf{q}_i^a)^T \mathbf{F}_i^a \right\}. \quad (8)$$

Обозначим через  $\mathbf{q}_e^b$  вектор узловых перемещений крупной сетки  $V_H^b$  сложного МнКЭ  $V_e^b$ . Используя (7), вектор  $\mathbf{q}_i^a$  узловых перемещений ДвКЭ  $V_i^a$  выражаем через вектор  $\mathbf{q}_e^b$  узловых перемещений крупной сетки  $V_H^b$ . В результате построим равенство

$$\mathbf{q}_i^a = [A_i^b] \mathbf{q}_e^b, \quad (9)$$

где  $[A_i^b]$  – прямоугольная матрица,  $i = 1, \dots, M_a$ .

Подставляя (9) в выражение (8), из условия  $\partial \Pi_e^b / \partial \mathbf{q}_e^b = 0$  получаем матричное уравнение  $[K_e^b] \mathbf{q}_e^b = \mathbf{F}_e^b$ , где

$$[K_e^b] = \sum_{i=1}^{M_a} [A_i^b]^T [K_i^a] [A_i^b], \quad \mathbf{F}_e^b = \sum_{i=1}^{M_a} [A_i^b]^T \mathbf{F}_i^a, \quad (10)$$

$[K_e^b]$ ,  $\mathbf{F}_e^b$  – матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МнКЭ  $V_e^b$ .

*Замечание 2.* Как показывают расчеты, погрешность решения, построенного по МКЭ для трехмерных балок, для которых заданы геометрические размеры, композитная структура, закрепление и нагружение, с применением сложных МнКЭ  $V_e^b$  определенных размеров, зависит от соотношения шагов узловых сеток  $V_i^h, V_i^H, V_H^b$ .

### Определение напряжений в сложных МнКЭ

Пусть найдены узловые перемещения для многосеточной дискретной модели балки, т.е. найден вектор  $\mathbf{q}_e^b$  узловых перемещений сложного МнКЭ  $V_e^b$ ,  $e = 1, \dots, M_b$ , где  $M_b$  – общее число сложных МнКЭ  $V_e^b$  в дискретной модели балки. Используя формулы (9), находим векторы  $\mathbf{q}_i^a$  узловых перемещений ДвКЭ  $V_i^a$ ,  $i = 1, \dots, M_a$ . С помощью

вектора  $\mathbf{q}_i^a$  и формул (4) определяем функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$  ДвКЭ  $V_i^a$ ,  $i=1, \dots, M_a$ . Затем, используя функции перемещений  $u_a, v_a, w_a$ , по известным алгоритмам МКЭ [1, 8] находим функции напряжений для ДвКЭ  $V_i^a$ .

### Результаты расчетов

Рассмотрим в декартовой системе координат  $Oxyz$  модельную задачу о деформировании композитной трехмерной балки размерами  $16h \times 192h \times 16h$  (рис. 3). При  $y = 0$  балка жестко закреплена, граница крепления тела показана штриховкой. На верхней поверхности балки в точках с координатами  $z = 16h$ ,  $x_k, y_i$  действуют вертикальные силы  $q = 0.05$ , где  $x_k = 8h(k-1)$ ,  $y_i = 32h + 8h(i-1)$ ,  $k = 1, 2; i = 1, \dots, 21; h = 0.5$ .

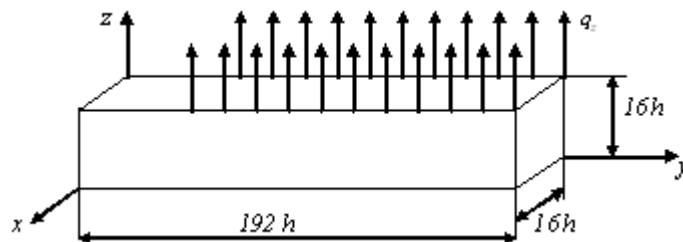


Рис. 3. Расчетная схема балки

Базовая дискретная модель балки состоит из изотропных однородных КЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$ . Многосеточная дискретная модель балки состоит из сложных МнКЭ  $V_e^b$  2-го порядка с характерными размерами  $8h \times 8h \times 8h$ ,  $e = 1, \dots, 96$ . При построении сложного МнКЭ  $V_e^b$  используем восемь ДвКЭ  $V_i^2$  2-го порядка размерами  $4h \times 4h \times 4h$ ,  $i = 1, \dots, 8$ . Базовое разбиение ДвКЭ  $V_i^2$  состоит из КЭ  $V_j^h$  1-го порядка формы куба со стороной  $h$ , которое порождает мелкую сетку с шагом  $h$ . Крупная сетка ДвКЭ  $V_i^2$  имеет шаг  $2h$ , шаг крупной сетки сложного МнКЭ  $V_e^b$  равен  $4h$ . ДвКЭ  $V_i^2$  и сложные МнКЭ  $V_e^b$  построены соответственно по процедурам п. 1, п. 2 с применением полиномов Лагранжа. Балка армирована непрерывными волокнами (с поперечным сечением  $h \times h$ ), направленными вдоль оси  $Oy$ . Расстояния между волокнами в направлении осей  $Ox, Oz$  равно  $h$ . Модуль Юнга связующего материала балки равен 1, волокон – 10, коэффициент Пуассона равен 0.3.

Анализ результатов расчетов показывает, что максимальное перемещение  $w_h = 378.270$  многосеточной дискретной модели балки отличается от максимального перемещения  $w_0 = 382.908$  базовой модели на 1.21%. Максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_h = 5.419$  многосеточной дискретной модели балки и  $\sigma_0 = 5.818$  базовой модели отличаются на 6.86%.

Базовая дискретная модель балки имеет 166464 узловых неизвестных, половина ширины ленты системы уравнений МКЭ равна 924. Многосеточная дискретная модель балки содержит 3600 узловых неизвестных, ширина половины ленты равна 189, т.е. многосеточная дискретная модель балки занимает в 226 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем базовая.

### Литература:

1. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. — М.: Мир, 1975.
2. Фудзии, Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. — М.: Мир, 1982.
3. Матвеев, А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов // Деп. в ВИНТИ № 2990-В00. 2000.
4. Матвеев, А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // ПМТФ № 3, 2004.

5. Матвеев, А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Известия АлтГУ. — 2014. — 1/1. Серия: Математика и механика. — с. 80–83.
6. Матвеев, А.Д. Расчет композитных пластин и балок с учетом их структуры с применением сложных многосеточных конечных элементов // Вестник КрасГАУ. — 2015. — № 9. — с. 100–107.
7. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1982.
8. Норри, Д., Ж. де Фриз. Введение в метод конечных элементов. — М.: Мир, 1981.

## Construction of optimal interpolation formulas in $W_2^{(2,1)}(0,1)$ space

Babayev Samandar Samiyevich, assistant;  
 Jo'rayeva Lola Ismatulloeyvna, assistant  
 Bukhara State University, Uzbekistan

### 1. Introduction. Statement of the Problem.

In order to find an approximate representation of a function  $\varphi(x)$  by elements of a certain finite collection, it is possible to use values of this function at some finite set of points  $x_k, k = 0, 1, \dots, N$ . The corresponding problem is called *the interpolation problem*, and the points  $x_k$  *the interpolation nodes*.

In the present paper we deal with optimal interpolation formulas. Now we give the statement of the problem of optimal interpolation formulas following by S. L. Sobolev. Now following we consider interpolation formula of the form

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^N C_\beta(x) \cdot \varphi(x_\beta) \tag{1.1}$$

where  $C_\beta(x)$  and  $x_\beta (\in [0,1])$  are *coefficients* and *nodes* of the interpolation formula (1.1), respectively. We suppose that the functions  $\varphi(x)$  belong to the Hilbert space

$$W_2^{(2,1)}(0,1) = \{\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbf{R} \mid \varphi' \text{ is absolutely continuous and } \varphi'' \in L_2(0,1)\},$$

$$\text{equipped with the norm } \|\varphi(x) \mid W_2^{(2,1)}(0,1)\| = \left\{ \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x))^2 dx \right\}^{1/2} \tag{1.2}$$

and  $\int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x))^2 dx < \infty$ . The equality (1.3) is semi-norm and  $\|\varphi\| = 0$  if and only if  $\varphi(x) = c_0 + c_1x$ . The

difference  $\varphi - P_\varphi$  is called *the error* of the interpolation formula (1.1). The value of this error at some point  $z$  is the linear functional on functions  $\varphi$ , i.e.

$$(\ell, \varphi) \equiv \varphi(z) - P_\varphi(z) = \varphi(z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \varphi(x_\beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \left( \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x-x_\beta) \right) \varphi(x) dx, \tag{1.3}$$

$$\text{where } \delta(x) \text{ is the Dirac delta-function and } \ell(x) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) \delta(x-x_\beta) \tag{1.4}$$

is *the error functional* of the interpolation formula (1.1) and belongs to the space  $W_2^{(2,1)*}(0,1)$ . The space  $W_2^{(2,1)*}(0,1)$  is the conjugate space to the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$ .

By the Cauchy-Schwarz inequality  $|(\ell(x), \varphi(x))| \leq \|\varphi(x) \mid W_2^{(2,1)}(0,1)\| \cdot \|\ell(x) \mid W_2^{(2,1)*}(0,1)\|$

the error (1.3) of formula (1.1) is estimated with the help of the norm

$$\|\ell(x) | W_2^{(2,1)*}(0,1)\| = \sup_{\|\varphi(x) | W_2^{(2,1)}(0,1)\|=1} |(\ell(x), \varphi(x))| \text{ of the error functional (1.4).}$$

Therefore from here we get the first problem.

**Problem 1.** Find the norm of the error functional  $\ell(x)$  of interpolation formula (1.1) in the space  $W_2^{(2,1)*}(0,1)$ .

Obviously the norm of the error functional  $\ell(x)$  depends on the coefficients  $C_\beta(z)$  and the nodes  $x_\beta$ . The interpolation formula which the error functional in given number  $N + 1$  of the nodes has the minimum norm with respect to  $C_\beta(z)$  in the space  $W_2^{(2,1)*}(0,1)$  is called *the optimal interpolation formula*. The main goal of the present paper is to construct the optimal interpolation formula in the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  for fixed nodes  $x_\beta$ , i.e. to find the coefficients  $C_\beta(z)$

$$\text{satisfying the following equality } \|\overset{\circ}{\ell}(x) | W_2^{(2,1)*}(0,1)\| = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell(x) | W_2^{(2,1)*}(0,1)\|. \tag{1.5}$$

Thus in order to construct the optimal interpolation formula in the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  we need to solve the next problem.

**Problem 2.** Find the coefficients  $C_\beta(z)$  which satisfy equality (1.5) when the nodes  $x_\beta$  are fixed.

In this work we give the solution of Problem 1.

### 2. The extremal function and representation of the norm of the error functional

In this section we solve Problem 1, i.e. we find explicit form of the norm of  $\ell(x)$ . For finding the explicit form of the norm of the error functional  $\ell(x)$  in the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  we use concept of its extremal function which was introduced by S. L. Sobolev. The function  $u(x)$  from  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  space is called *the extremal function* for the error functional  $\ell(x)$  if the following equality is fulfilled

$$(\ell(x), u(x)) = \|\ell(x) | W_2^{(2,1)*}(0,1)\| \cdot \|u(x) | W_2^{(2,1)}(0,1)\|. \text{ The space } W_2^{(2,1)}(0,1) \text{ is the Hilbert space and the inner product in this space is given by the formula } \langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x))(\psi''(x) + \psi'(x)) dx. \tag{2.1}$$

According to the Riesz theorem any linear continuous functional  $\ell(x)$  in a Hilbert space is represented in the form of a inner product. So, in our case we have

$$(\ell(x), \varphi(x)) = \langle \psi_\ell(x), \varphi(x) \rangle \tag{2.2}$$

for arbitrary function  $\varphi(x)$  from  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  space. Here  $\psi_\ell(x)$  is the function from  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  is defined uniquely by functional  $\ell(x)$  and is the extremal function. Now we solve equation (2.2) and find  $\psi_\ell(x)$ . Suppose  $\varphi(x)$  belongs to the space  $\overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1)$ , where  $\overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1)$  is the space of functions, which are infinity differentiable and finite in the interval  $(0,1)$ . Then from (2.1), integrating by parts, we obtain

$$\langle \psi_\ell(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^1 (\psi_\ell^{(IV)}(x) - \psi_\ell''(x)) \varphi(x) dx. \tag{2.3}$$

Keeping in mind (2.3) from (2.2) we get  $\psi_\ell^{(IV)}(x) - \psi_\ell''(x) = \ell(x)$ . (2.4). So, when  $\varphi(x) \in \overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1)$  the extremal function  $\psi_\ell(x)$  is a solution of equation (2.4). But, we have to find the solution of equation (2.2) when the functions  $\varphi(x)$  belong to the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$ . Since the space  $\overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1)$  is dense in the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$ , then we can approximate arbitrarily exact functions of the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  by a sequence of functions of the space  $\overset{\circ}{C}^{(\infty)}(0,1)$ . Next for any  $\varphi(x) \in W_2^{(2,1)}(0,1)$  we consider the inner product  $\langle \psi_\ell(x), \varphi(x) \rangle$  and, integrating by parts of (2.1), we have

$$\langle \psi_\ell(x), \varphi(x) \rangle = -(\psi_\ell'''(x) - \psi_\ell'(x))|_{x=0}^{x=1} + \varphi'(x)(\psi_\ell''(x) + \psi_\ell'(x))|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \varphi(x)(\psi_\ell^{(IV)}(x) - \psi_\ell''(x))dx.$$

Hence from arbitrariness of  $\varphi(x)$  and uniqueness of the function  $\psi_\ell(x)$  (up to the function  $e^{-x}$  and polynomials of degree 0), taking into account (2.4), it must be fulfilled the following equation

$$\psi_\ell^{(IV)}(x) - \psi_\ell''(x) = \ell(x), \tag{2.5}$$

with boundary conditions

$$(\psi_\ell'''(x) - \psi_\ell'(x))|_{x=0}^{x=1} = 0 \tag{2.6}$$

$$(\psi_\ell''(x) + \psi_\ell'(x))|_{x=0}^{x=1} = 0. \tag{2.7}$$

Thus, we conclude that the extremal function  $\psi_\ell(x)$  is the solution of the boundary value problem (2.5)-(2.7). The following holds

**Theorem 1.** *The solution of the boundary value problem (2.5) - (2.7) is the extremal function  $\psi_\ell(x)$  of the error functional  $\ell(x)$  of the interpolation formula (1.1) and has the following form*

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G(x) + P_0(x) + de^{-x}, \text{ where } G_2(x) = \frac{\text{sign}x}{2} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right) \tag{2.8}$$

is a solution of the equation

$$\psi^{(IV)}(x) - \psi''(x) = \delta(x) \tag{2.9}$$

$d$  is any real number,  $P_0(x)$  is a polynomial of degree 0.

$$(\ell(x), 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) dx = 1 - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z) = 0, \tag{2.9}$$

$$(\ell(x), e^{-x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)e^{-x} dx = e^{-z} - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)e^{-x\beta} = 0. \tag{2.10}$$

Now we obtain representation for the norm of the error functional  $\ell(x)$ . Since the space  $W_2^{(2,1)}(0,1)$  is a Hilbert space then by the Riesz theorem we have  $(\ell(x), \psi_\ell(x)) = \|\ell(x)\|_{W_2^{(2,1)*}} \cdot \|\psi_\ell(x)\|_{W_2^{(2,1)}} = \|\ell(x)\|_{W_2^{(2,1)*}}^2$ .

Hence, using (1.4) and Theorem 1, taking into account (2.9), (2.10), we get

$$\begin{aligned} \|\ell(x)\|^2 &= (\ell(x), \psi_\ell(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\psi_\ell(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \left[ G_2(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)G_2(x-x_\beta) \right] + P_0(x) + de^{-x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)\delta(x-x_\beta) \right) \left( G_2(x-z) - \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)G_2(x-x_\beta) \right) dx. \end{aligned}$$

Hence and taking account that  $G_2(x)$

is the even function, we have

$$\|\ell(x)\|^2 = \left( \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C_\beta(z)C_\gamma(z)G_2(x_\beta - x_\gamma) - 2 \sum_{\beta=0}^N C_\beta(z)G_2(z - x_\beta) \right). \tag{2.11}$$

Thus Problem 1 is solved.

References:

1. J.H. Ahlberg, E.N. Nilson, J.L. Walsh, The theory of splines and their applications, Mathematics in Science and Engineering, New York: Academic Press, 1967.
2. S.L. Sobolev, Introduction to the Theory of Cubature Formulas, Nauka, Moscow, 1974, 808 p.

## Генерация расчетных сейсмических воздействий по заданным спектрам реакций

Бодякин Евгений Владимирович, аспирант

Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Представлена реализация метода генерации расчетных акселерограмм, рекомендуемая Приложением 3 РБ-06–98 [1]. На основе данного метода и исследований Ф.Ф. Аптикаева [2] разработан алгоритм генерирования сейсмических воздействий на основе заданных спектров реакций. Создано программное обеспечение (GOSS), реализующее данный алгоритм.

### Введение

Спектры реакций (ответов) одна из наиболее важных, полезных и широко используемых концепций в теории и практике расчетов сооружений на сейсмостойкость. Предложенная более 80 лет назад, в настоящее время эта концепция используется практически во всех зарубежных нормативных документах и руководствах по расчету сооружений на сейсмостойкость.

В Российских нормах для оценки сейсмических воздействий используется понятие «спектральный коэффициент динамичности» —  $\beta$ , кривые которого строятся как функции периода свободных колебаний осциллятора. Это практически та же концепция, названная по-другому [3].

Задача расчета спектров реакций детально изучена, а также существуют эффективные алгоритмы расчета (см. [4]). В свою очередь обратная задача — синтезирование расчетных акселерограмм из заданных спектров реакций для проектирования зданий и сооружений, в частности, особо ответственных объектов, стоит уже давно. К сожалению, на данный момент есть лишь общие рекомендации касательно генерации сейсмических воздействий из спектров реакций [2]. С другой стороны, в работах Ф.Ф. Аптикаева [2] достаточно эмпирических формул, позволяющих параметризовать форму спектра реакций, а также форму огибающей сейсмического события.

Таким образом, объединив результаты Ф.Ф. Аптикаева, рекомендации, данные в [2], и алгоритмы численного расчета спектров реакций, была создана программа, позволяющая синтезировать расчетные сейсмические воздействия на основе заданных спектров реакций.

### Форма спектра реакции

Общепринятая форма спектра реакций получается путем осреднения спектральных уровней на каждой частоте. Однако, согласно правилам параметризации, использовать размерную величину (частоту) для построения безразмерного параметра (форма по определению величина безразмерная) не совсем корректно. Такой способ ведет к снижению уровня «среднего» спектра и расширению полосы частот.

Методика оценки формы спектра реакции и внутренние взаимозависимости между параметрами спектров рассмотрены в работе [2]. Рекомендуется использовать следующую систему параметризации — спектры нормированы как по спектральному уровню  $SA$ , так и по преобладающей частоте  $f_0$  (рис. 1).

$S$  — логарифмическая ширина спектра реакции  $S_2 + S_1$ ; измеряемая между частотами, на которых в первый и последний раз уровень спектра достиг половины его максимального значения.

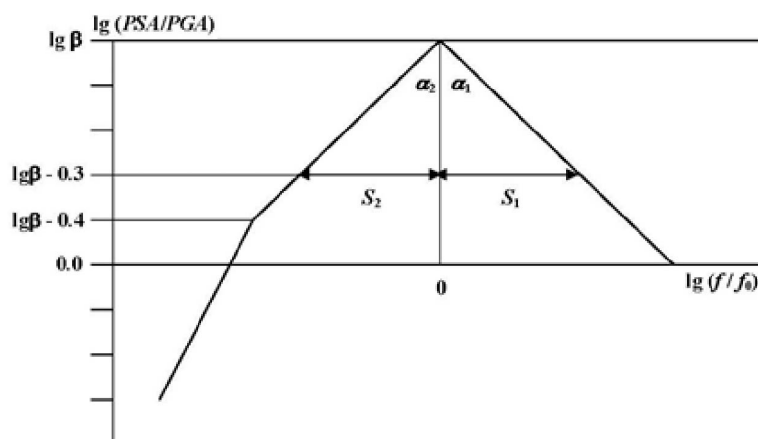


Рис. 1. Схема параметризации спектра реакции (Ф.Ф. Аптикаев, 2012 г.)

$\beta$  — максимальное значение коэффициента динамического усиления (величина безразмерная);

$f_0$  — преобладающая колебаний.

Среднее значение на более интенсивной горизонтальной компоненте принимается 3.2. Для перехода от средней формы спектра к реальному спектру надо оценить ширину, ожидаемый преобладающий период и уровень спектра.

В среднем ширина спектра  $S$  равна двум октавам со стандартным отклонением 0.20 ед. дес. лог.:

$$S = 0.6 + C_1 + C_2 \pm 0.20, \quad (1)$$

где  $C_1 = -0.05$  для взбросов, 0.0 для сдвигов и 0.05 для сбросов;  $C_2 = -0.1$  для грунтов первой категории, 0.0 для грунтов второй категории и 0.1 для грунтов третьей категории [2].

### Алгоритм синтеза расчетных сейсмических воздействий

В данной работе использован метод генерации расчетной акселерограммы, рекомендуемый Приложением 3 РБ-06—98. Акселерограмма, соответствующая спектру динамического усиления, может быть записана

$$a_{\beta}^0(t) = A(t) \sum_{i=1}^n B_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (2)$$

где  $A(t)$  — огибающая сигнала; фазовые углы  $\varphi_i$  представляют собой равномерно распределенные в интервале от 0 до  $2\pi$  случайные величины;  $n$  — количество частот;  $\omega$  — частоты.

В качестве первого приближения для  $B_{i,1}$  используются значения, непосредственно взятые с заданной кривой  $\beta(T)$  для соответствующих значений частот  $\omega_i$ .

Следующее приближение

$$B_{i,2} = B_{i,1} \frac{\beta(T)}{\beta_1(T)}, \quad (3)$$

где  $\beta(T)$  — в нашем случае обобщенный спектр динамического усиления, а  $\beta_1(T)$  — кривая, полученная при первом шаге итерации.

Нужная точность совпадения расчетного спектра реакций с заданным получается после ряда итераций (по умолчанию 30). Если после указанного количества итераций величина разброса расчетного спектра реакций больше, чем заданная величина допустимого разброса, — заново генерируется набор фазовых углов  $\varphi$  и расчет проводится сначала.

Для перехода от базовой акселерограммы к расчетной значения первой следует умножить на PGA.

Для построения огибающей использована эмпирическая формула [2]:

$$A_{i\ddot{a}a}(t) = A_{\max} \frac{3t\tau}{9t^2 - 9t\tau + 4\tau^2}, \quad (4)$$

где  $t$  — время,  $\tau$  — длительность основной фазы колебаний по Ф.Ф. Аптикаеву определяется как ин-

тервал времени, в течение которого амплитуда огибающей колебаний превышает 1/2 максимального уровня. Для определения этой величины воспользуемся формулой [2]:

$$\log \tau = 0.15M_s + 0.5 \log R + C + C_2 - 1.3 \pm 0.3,$$

где коэффициент  $C_1$  равен 0.25 для сбросов, 0.00 для сдвигов и  $-0.25$  для взбросов;  $C_2$  равняется  $-0.15$  для грунтов 1-й категории, 0.00 для грунтов 2-й категории и 0.4 для грунтов 3-й категории. В очаговой и ближней зонах значение ширины импульса с расстоянием не изменяется

В соответствии с п. 5.3.4 РБ 06—98, при синтезировании трехкомпонентных акселерограмм необходимо обеспечивать их статистическую независимость. Две акселерограммы считаются статистически независимыми, если абсолютное значение коэффициента корреляции не превышает 0.3.

Для максимальной горизонтальной компоненты принято максимальное динамическое усиление  $\max \beta X(T) = 3.2$  [1]. Для второй горизонтальной и вертикальной компонент приняты значения  $\max \beta Y(T) = 3.0$ ,  $\max \beta Z(T) = 3.0$ . Допускается отклонение от целевого спектра 10%.

Значения PGA приняты для горизонтальных компонент одинаковыми, а для вертикальной компоненты 0.7 от горизонтальной.

Блок схема алгоритма расчета представлена на рис. 2.

### Программа синтеза расчетных сейсмических воздействий GOSS

На основании вышеизложенного алгоритма создана программа GOSS (рис. 3). Данная программа была написана на языке C#. В форме главного окна осуществляется задание следующих параметров:

— характеристики очага (магнитуда ( $M_s$ ), расстояние (км), длительность колебаний (с), а также фокальный механизм очага (взброс, сдвиг, сброс, взбросо-сдвиг, сбросо-сдвиг));

— характеристики площадки (категория грунтов по сейсмическим свойствам, PGA выходной акселерограммы, частота дискретизации выходного сигнала);

— форма спектра реакций (существует возможность загрузки готового спектра реакций из файла либо задания формы спектра реакций на основании параметров).

На каждой итерации происходит визуализация сгенерированного сигнала, спектра Фурье и текущего спектра реакций. Все вычисления проходят в фоновом потоке. По окончании расчетов есть возможность сохранить синтезированные акселерограммы, а также их спектры реакций, рассчитанные с различными коэффициентами затухания (20%, 10%, 7%, 5%, 4%, 2%, 0.5%). На рис. 4 показаны результаты синтеза акселерограмм для здания уровней МРЗ для 50% обеспеченности.



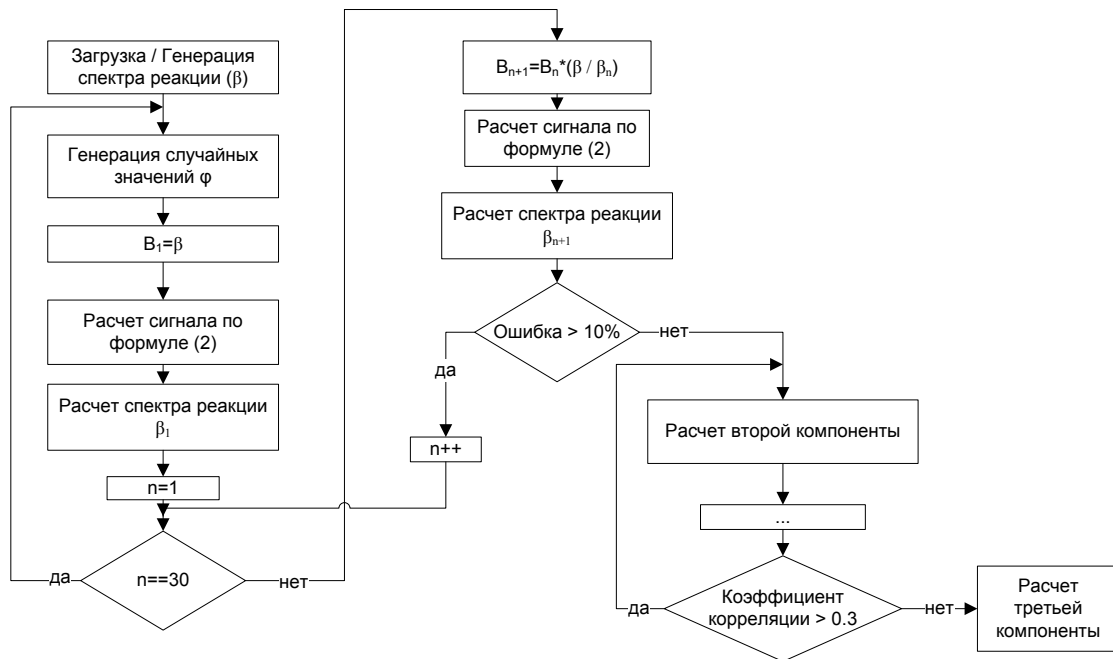


Рис. 2. Блок схема алгоритма расчета

**Заключение**

Разработаны методические и алгоритмические основы расчета генерации сейсмических воздействий по

заданным спектрам реакций. Разработано программное обеспечение (GOSS), реализующее указанные алгоритмы. Исследованы формы спектров реакций, заданные параметрически.

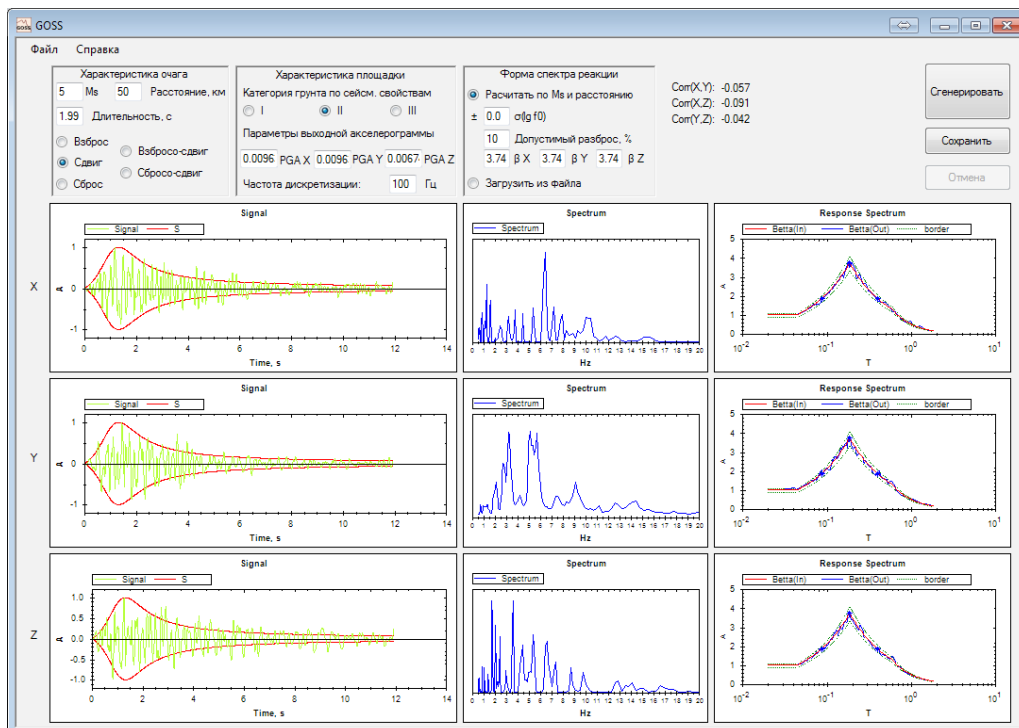
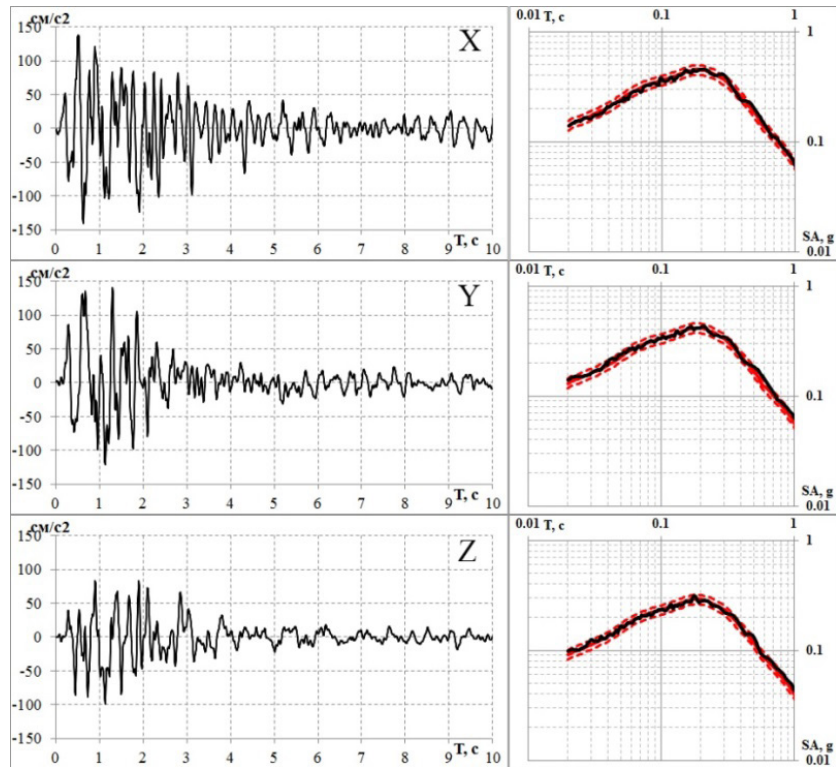


Рис. 3. Главное окно программы GOSS



**Рис. 4. Синтезированная трехкомпонентная акселерограмма 50% обеспеченности уровня воздействия ПЗ и соответствующие ей спектры реакции для здания**

Литература:

1. РБ-06–98 «Определение исходных сейсмических колебаний грунта для проектных основ».
2. Аптикаев, Ф. Ф. Инструментальная шкала сейсмической интенсивности. — М.: Наука и образование, 2012. — 176 с.
3. Курбацкий, Е. Н., Баев Л. В. Спектры максимальных реакций (откликов) конструкций на сейсмические и техногенные динамические воздействия.
4. Newmark, N. M. A method of computation for structural dynamics // Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1959. — Vol. 85, (EM3). — P. 67–94.

## Моделирование эвакуации из Камерного и Малого залов Красноярской филармонии с помощью модели пешеходных потоков SIGMA.CA

Витова Татьяна Брониславовна, младший научный сотрудник  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

*Рассматривается применение модели пешеходных потоков (движения людей) SIGMA.CA для моделирования процесса выхода людей из помещений Камерного и Малого залов Красноярской филармонии. Исследуется динамика движения и время выхода. Модельное время выхода сравнивается со временем, полученным с помощью упрощенно-аналитической модели из «Методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов различной функциональной пожарной опасности».*

**Ключевые слова:** модель пешеходных потоков, модель движения людей-пешеходов, эвакуация.

### Введение

В моделях пешеходных потоков рассматривается передвижение людей из одной точки пространства в другую. Такие модели применяются для организации движения людских потоков в местах массового скопления людей (стадионы, торговые центры, вокзалы и т. д.), для анализа процесса эвакуации из зданий и сооружений (расчет времени эвакуации, выявление участков повышенной плотности и т. д.).

В настоящее время данное направление активно развивается (в основном на западе). Наибольшую популярность имеют имитационные модели, визуализирующие движение людей и позволяющие рассматривать движение каждого человека. Среди таких моделей выделяются модель социальных сил (Social Force model) [1] и модели на основе клеточных автоматов. В данной работе рассматривается модель динамики пешеходов SIGMA.CA [2–3], основанная на клеточно-автоматном подходе, а именно Floop Field модели [4–5].

В России для нахождения времени эвакуации из помещений и зданий применяют модели из «Методики определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов различной функциональной пожарной опасности» [6]: упрощенно-аналитическая модель движения людского потока, математическая модель индивидуально-поточного движения людей из здания и имитационно-стохастическая модель движения людских потоков. Выбор способа определения расчетного времени эвакуации производится с учетом специфических особенностей объемно-планировочных решений здания, а также особенностей контингента (его однородности) людей, находящихся в нем.

Упрощенно-аналитическая (УА) модель пришла в Методику из ГОСТ 12.1.004–91 «Пожарная безопасность. Общие требования», имеет ограниченный набор формул и позволяет находить время эвакуации, но непосредственно движение людей-пешеходов не моделируется. Также не учитываются переформирование потока, его растекание и разуплотнение, закономерности движения по участкам «неограниченной» и переменной ширины [7]. Но, с другой

стороны, УА модель является наиболее простой, отработанной и широко применяемой для определения времени эвакуации из зданий.

### Краткое описание модели пешеходных потоков SIGMA.CA

Известны геометрия рассматриваемого пространства и начальное расположение частиц (людей) в этом пространстве. Пространство представляет собой плоскость, разбитую на ячейки 40см x 40см, которые могут быть свободными, либо занятыми только одной частицей. В ячейках также могут располагаться стены и другие недвижимые препятствия.

Целью передвижения частиц является ближайший (или заданный) выход. На каждом временном шаге частица может переместиться в одну из четырех свободных соседних ячеек или остаться на месте (окрестность фон Неймана). Направление частицы предполагается случайным и определяется на основе вероятностей переходов в каждом направлении для каждой частицы в каждый дискретный шаг времени и набором правил переходов.

Полагается, что геометрия рассматриваемого пространства «известна» частицам и отражена в поле  $S$  [4], которое совпадает с рассматриваемой областью и также разбито на ячейки. В ячейках поля хранятся кратчайшие расстояния до ближайшего выхода. Оно может быть интерпретировано, как карта местности.

Правила переходов применяются синхронно (или параллельно) и заключаются в следующем. На каждом временном шаге вычисляются переходные вероятности, и выбирается направление перемещения. Если две или более частицы претендуют на одну и ту же ячейку, тогда выбирается одна для перемещения, остальные остаются на прежних местах. Стоит отметить, что вероятность перехода в занятую ячейку в общем случае не равна нулю. Частице, выбравшей занятое направление, предоставляется возможность выбрать другое направление для перехода либо остаться на прежнем месте.

При вычислении переходных вероятностей учитывается карта местности поле  $S$ , желание частиц двигаться

по направлению к выходу и держаться на некотором расстоянии от других людей и от препятствий, что регулируется параметрами модели  $k_S \geq 0$ ,  $k_P \geq 0$ ,  $k_W \geq 0$  и  $r > 0$ . Варьирование этими параметрами позволяет воспроизводить различные ситуации: движение в условиях плохой видимости, строго направленное движение, использование частицами кратчайшего или альтернативного пути и т. д.

Несмотря на то, что направление движение частицы является случайной величиной, вероятности переходов вычисляются таким образом, чтобы придавать больший вес нужным направлениям, для реализации таких свойств движения человека, как направленность движения к цели

следования, психологическое отталкивание от стен и от других участников движения, стратегии кратчайшего и быстрого пути.

### Результаты исследования

На рис. 1 и рис. 2 представлены расчетные схемы эвакуации (взяты из расчетного обоснования к мероприятиям по обеспечению пожарной безопасности объекта «Реконструкция Красноярской краевой филармонии» [8] и геометрии пространств для модели с начальным расположением частиц. Серым цветом обозначены стены и ряды кресел, черным — частицы, светло-серым — выход. Па-

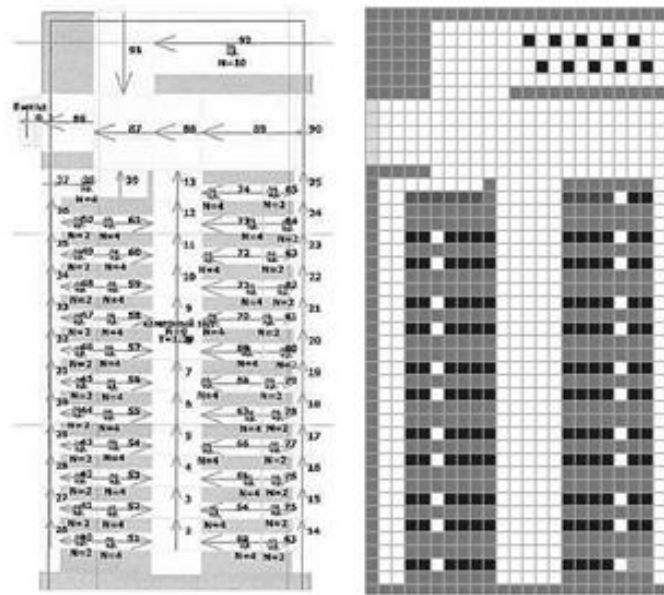


Рис. 1. Геометрия Камерного зала: по расчетной схеме (слева), в модели (справа)

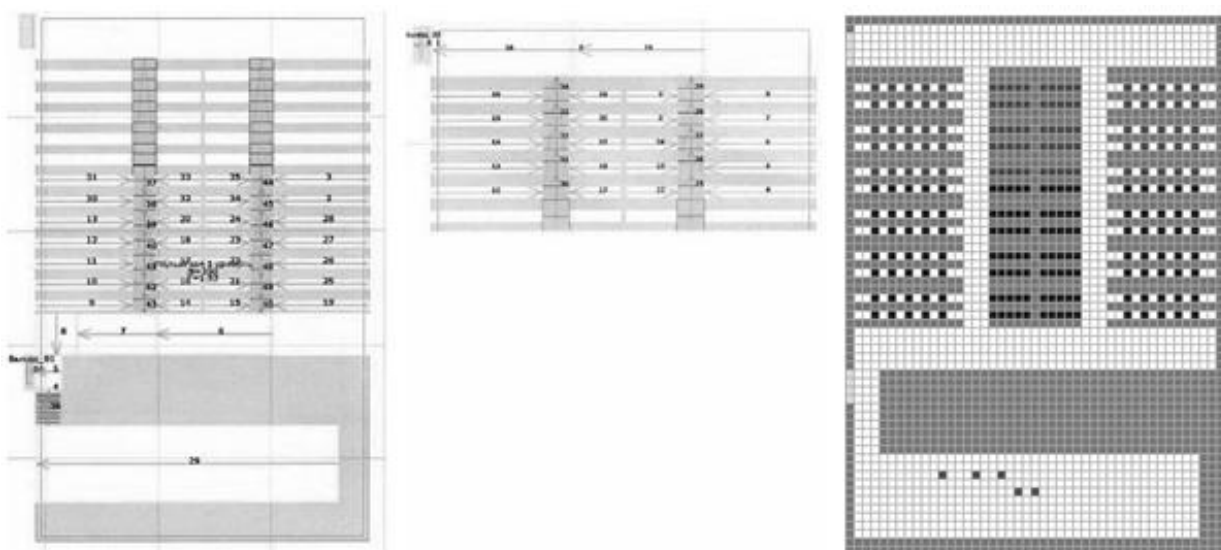


Рис. 2. Геометрия МКЗ: по расчетной схеме (два рисунка слева), в модели (справа)

параметры модели  $k_S = k_W = 4$ ,  $k_P = r = 10$ . Количество частиц: для Камерного зала  $N=154$ , для Малого зала (МКЗ)  $N=245$ . Было произведено  $M=1000$  экспериментов.

Рассматривалось два сценария выхода частиц из области.

1. Сценарий по расчетной схеме: каждой частице назначен определенный выход согласно расчетной схеме (рис. 1 и рис. 2), где пути эвакуации обозначены стрелками.

2. Свободный сценарий: выходы изначально не назначены и выбираются в процессе эвакуации (как правило, кратчайший путь к выходу).

Динамика модели исследуется с помощью снимков движения в определенные моменты времени  $t$  и интенсивности движения частиц по ячейкам пространства. Интенсивность движения — интегральная характеристика, отражающая количество частиц прошедших через данную

ячейку в течение рассматриваемого отрезка времени (в данном случае в течение всего процесса эвакуации). Чем темнее цвет, тем выше интенсивность движения по ячейкам.

**Камерный зал.** Рассмотрим динамику движения частиц в зависимости от сценария. Здесь по расчетной схеме частицы полностью используют проходы как центральный, так и боковые (при  $t=0.05$  мин и  $t=0.3$  мин, интенсивность движения) (рис. 3).  $N_{эв}$  — количество вышедших из области частиц на момент времени  $t$ . При свободном сценарии используется только центральный и ближайший к выходу боковой проход (при  $t=0.05$  мин и  $t=0.3$  мин, интенсивность движения) (рис. 4). Все частицы стремятся идти по кратчайшему пути, поэтому дальний от выхода боковой проход не используется. В итоге происходит задержка движения в ближайшем к выходу боковом проходе и в центральном проходе (рис. 4). В сценарии по расчетной схеме скопление возникает только в центральном

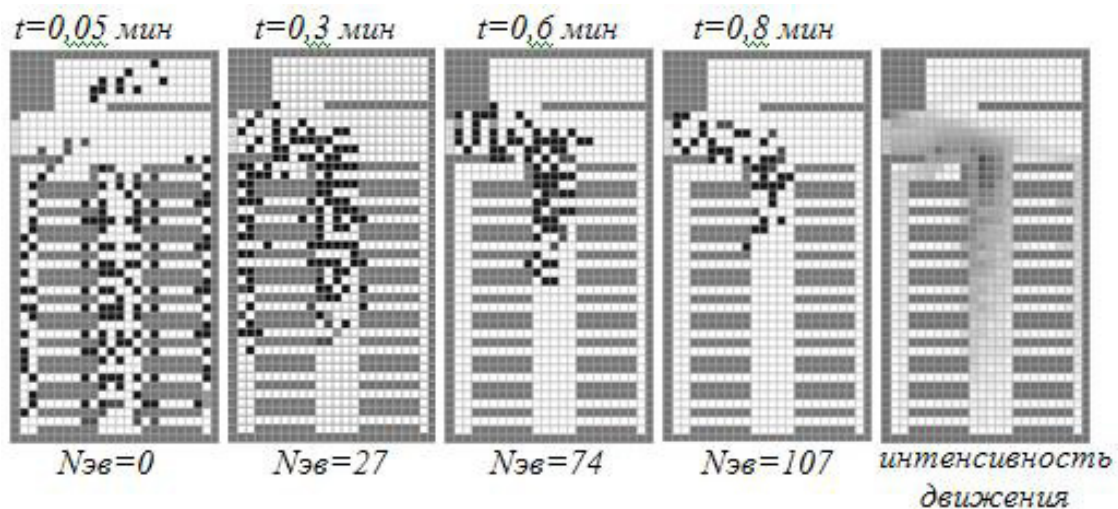


Рис. 3. Динамика движения в Камерном зале, сценарий по расчетной схеме

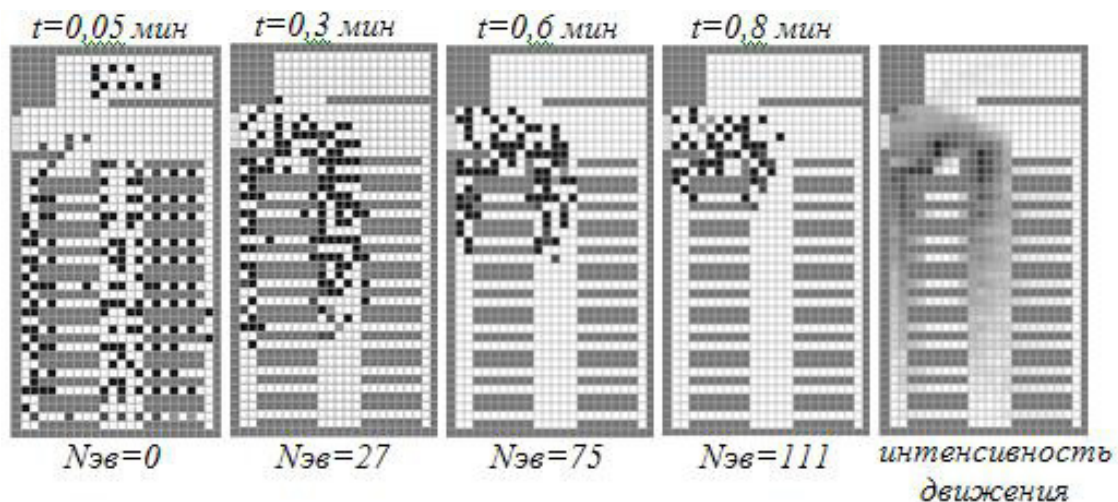


Рис. 4. Динамика движения в Камерном зале, свободный сценарий

проходе из-за большого количества частиц (при  $t=0.8$  мин) (рис. 3).

На рис. 5 представлено распределение (гистограммы частот) времени выхода частиц для рассмотренных сценариев

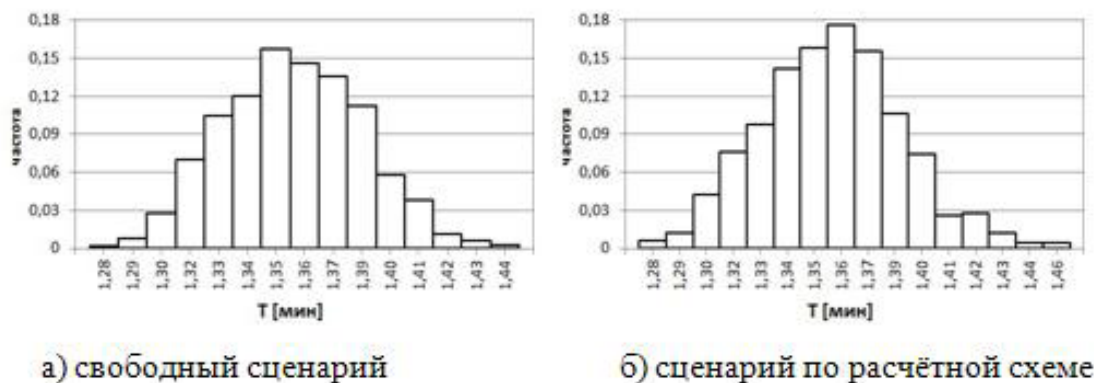


Рис. 5. Распределение времени эвакуации для Камерного зала

В модели время  $t$  [шаг] дискретно и  $t \in [0; T]$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ . Пусть  $T$  — время выхода частиц из области, измеренное в дискретных шагах. Переход частицы в соседнюю ячейку отождествляется с осуществлением человеком одного шага в реальности. Обозначим за  $\Delta t$  [мин] — время для осуществления человеком одного шага,  $\Delta t = \text{путь} / \text{скорость}$ . «Путь» равен 0,4 м (принятый в модели размер ячейки). Для определения скорости используется аналитическая зависимость скорости от плотности потока из [6]. Здесь  $\Delta t$  выбрано из предположения, что в среднем частицы двигаются с плотностью  $0.4 \text{ [м}^2/\text{м}^2]$ , а скорость берется при активном движении, так как предполагается, что эвакуация происходит во время ЧС. Из этого следует, что  $\Delta t = 0.4 \text{ м} / 0.572 \text{ м с}^{-1} = 0.0116 \text{ мин}$ . Таким образом, можно получить время эвакуации в естественных единицах измерения (в минутах или секундах)  $T[\text{мин}] = T[\text{шаг}] * [\text{мин}]$ .

В [8] получено время эвакуации (расчетное) из Камерного зала, согласно УА модели из методики [6]. Расчетное время эвакуации составляет 1.39 мин. Там же указано и необходимое время эвакуации, равное 2 мин (это время, за которое один из опасных факторов пожара (повышенная температура среды; дым, приводящий к потере видимости; токсичные газы; пониженная концентрация кислорода) достигнет предельно допустимого для человека значения). Модельное время эвакуации близко к расчетному (меньше примерно на 1.8 секунд) и не превышает необходимого. В данном случае даже максимальные времена эвакуации, полученные моделью (рис. 5), не превышают необходимого.

**Малый концертный зал.** Динамика в МКЗ следующая. В сценарии по расчетной схеме частицы с верхних рядов выходят быстрее, чем с нижних (рис. 6 при  $t=1.05$  мин). Но с другой стороны перед нижним выходом возникает скопление. При свободном сценарии один ряд частиц, который при сценарии по расчетной схеме двигался

по  $M=1000$  экспериментов. Для сценария по расчетной схеме математическое ожидание времени выхода составляет  $T_{cp} = 1.3584$  мин, дисперсия времени  $D=0.08 \text{ мин}^2$ . Для свободного сценария:  $T_{cp} = 1.3579$  мин,  $D=0.06 \text{ мин}^2$ .

к нижнему выходу, двигается к верхнему (рис. 7). Это приводит к тому, что в момент времени  $t=1.4$  мин в области меньше частиц, чем в тот же момент при сценарии по расчетной схеме. При свободном сценарии интенсивность движения более равномерно распределена между двумя выходами (рис. 6 и рис. 7). Поэтому можно сказать, что нижний выход в сценарии по расчетной схеме больше загружен.

На рис. 8 представлено распределение времени выхода для рассмотренных сценариев выхода из МКЗ по  $M=1000$  экспериментам. Для сценария по расчетной схеме математическое ожидание времени выхода составляет  $T_{cp} = 1.83$  мин, дисперсия времени  $D=0.04 \text{ мин}^2$ . Для свободного сценария:  $T_{cp} = 1.64$  мин,  $D=0.04 \text{ мин}^2$ . Здесь, в отличие от примера для Камерного зала, время эвакуации для свободного сценария меньше, чем для сценария по расчетной схеме.

Расчетное время эвакуации, вычисленное по УА модели, составляет 1.53 мин [8]. Необходимое время эвакуации 2 мин. Модельное время эвакуации превышает расчетное. Разница составляет 18 сек для сценария по расчетной схеме и 6.6 сек для свободного. Тем не менее модельные времена не превышают необходимого.

### Заключение

Таким образом показано, что с помощью модели SIGMA.SA можно рассматривать различные сценарии эвакуации (в плане назначения частицам определенного выхода) с целью выбора наиболее подходящего, при котором минимизируется время эвакуации. Время эвакуации, полученное с помощью модели SIGMA.SA, не всегда близко к расчетному (по УА модели из Методики [6]) и может превышать его, то есть время оценивается с запасом. Но с другой стороны, модельные времена эвакуации не превышают необходимого времени. Можно сказать, что еще раз

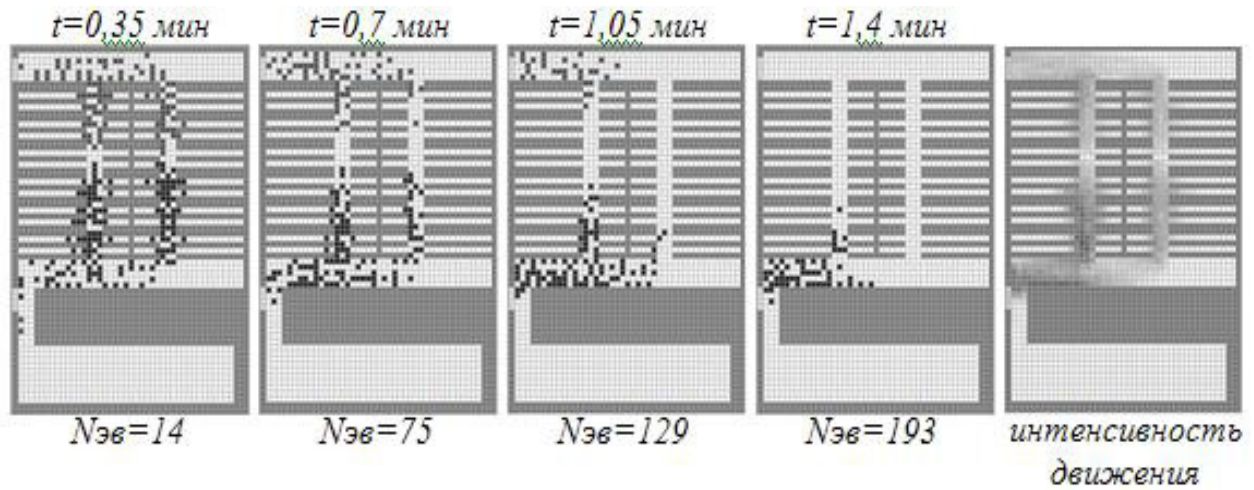


Рис. 6. Динамика движения в МКЗ, сценарий по расчетной схеме

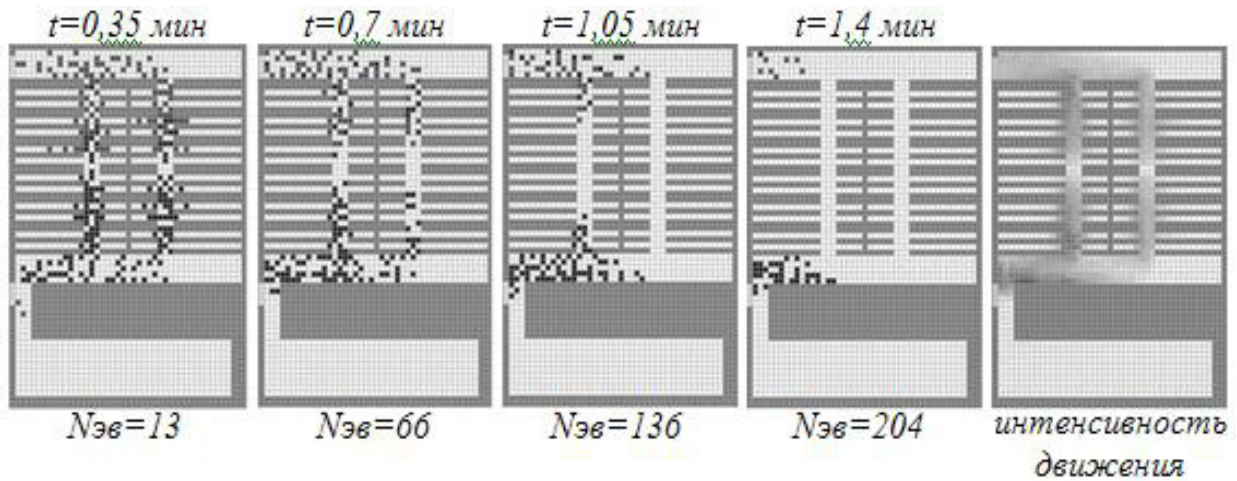


Рис. 7. Динамика движения в МКЗ, свободный сценарий

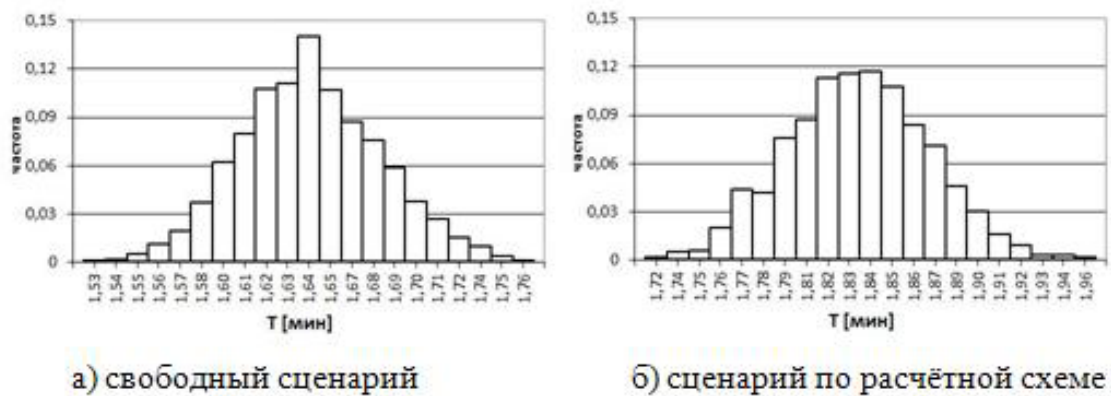


Рис. 8. Распределение времени эвакуации для МКЗ

подтверждается выполнение условия своевременности эвакуации из данных помещений. К плюсам модели от-

носится то, что она позволяет находить не одно значение времени эвакуации, а его распределение.

## Литература:

1. Helbing, D., Molnar P. Social force model for pedestrian dynamics // Physical Review E. — 1995. — Vol. 51. — P. 4282–4286.
2. Kirik, E., Yurgel»yan T., Krouglov D. On realizing the shortest time strategy in a CA FF pedestrian dynamics model// Cybernetics and Systems. — 2011. — Vol. 42 (1). — P. 1–15.
3. Kirik, E., Vitova T. Cellular Automata Pedestrian Movement Model SIGMA.CA: Model Parameters as an Instrument to Regulate Movement Regimes // Cellular Automata. Lecture Notes in Computer Science. — 2014. — Vol. 8751. — P. 501–507.
4. Kirchner, A., Schadschneider A. Simulation of evacuation processes using a bionics-inspired cellular automaton model for pedestrian dynamics // Physica A. — 2002. — Vol. 312. — P. 260–276.
5. Nishinari, K., Kirchner A., Namazi A., Schadschneider A. Extended floor field CA model for evacuation dynamics // IEICE Transactions on Information and Systems. — 2004. — Vol. E87-D, No. 3. — P. 726–732.
6. Методика определения расчетных величин пожарного риска в зданиях, сооружениях и строениях различных классов функциональной пожарной опасности: приложение к Приказу МЧС России от 30 июня 2009 г. № 382: зарегистр. в Минюсте РФ 6 августа 2009 г., рег. № 14486 // МЧС России. URL: [http://www.mchs.gov.ru/law/Normativno\\_pravovie\\_akti\\_Ministerstva/item/5380580](http://www.mchs.gov.ru/law/Normativno_pravovie_akti_Ministerstva/item/5380580) (дата обращения: 04.03.2016).
7. Самошин, Д. А. Расчет времени эвакуации людей. Проблемы и перспективы // Пожаровзрывобезопасность. — 2004. — № 1. — С. 33–46.
8. Расчетное обоснование к мероприятиям по обеспечению пожарной безопасности для объекта «Реконструкция Красноярской краевой филармонии», ООО «ПроектСтройСервис», шифр-265–07-ПБ. РО.

## Математическое моделирование взаимодействия ионов с дипольными образованиями

Вяткин Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск);

Корниенко Виктория Сергеевна, магистрант  
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

*В статье исследуется моделирование поведения частиц, обладающее электрическим дипольным моментом во внешнем электрическом поле. Рассмотрены устойчивые дипольные образования и их взаимодействие с ионными парами.*

**Ключевые слова:** диполь, ионизация, электрическая частица, физико-математическая модель, вычислительный эксперимент, методы Рунге-Кутты.

### Введение

Работа посвящена численному моделированию поведения молекул, обладающих электрическим дипольным моментом и взаимодействующих с ионными парами во внешнем электрическом поле. С этой целью предложена математическая модель движения большого числа таких частиц во внешнем поле. Для решения этих уравнений применяется явный метод Рунге-Кутты-Мерсона пятого порядка с контролем точности и устойчивости.

### 1. Электрическая дипольная частица

В качестве типичной электрической дипольной частицы рассмотрим молекулу воды  $\text{H}_2\text{O}$ . Известно [3], что масса атома кислорода  $m(\text{O}) = 26.56 \cdot 10^{-27}$  кг, масса атома водорода  $m(\text{H}) = 1.67 \cdot 10^{-27}$  кг, расстояние между атомами O и H  $d = 0.96 \cdot 10^{-10}$  м, а угол HOH  $\alpha = 104^\circ$  (рис. 1).

<sup>1</sup> Работа поддержана Проектом 14-01-00147 Российского научного фонда.



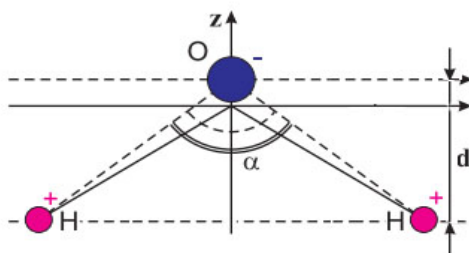


Рис. 1. Геометрическая схема молекулы воды

Поскольку основная масса атомов сосредоточена в их ядрах с размерами порядка  $10^{-14}$  м (что значительно меньше межъядерного расстояния  $10^{-10}$  м), мы будем моделировать атомы водорода Н и кислорода О материальными точками.

Уголковая конфигурация (рис. 1) и смещение электронных оболочек атомов водорода к атому кислорода приводят к возникновению в молекуле воды электрического дипольного момента  $\vec{p}$  (рис. 2) величиной  $p = 6.2 \cdot 10^{-30}$  Кл·м, направленного от центра иона кислорода  $O^{2-}$  к середине прямой, соединяющей центры ионов водорода  $H^+$  [3, 5].



Рис. 2. Схематическая замена молекулы воды на ее дипольный момент

## 2. Математическая модель

Известно [1, 7], что в атмосфере в значительном количестве присутствуют ионные пары. Например, при ультрафиолетовой ионизации молекулы воды получается два иона:



Рассмотрим в качестве заряженных частиц пару  $H^+$  и  $OH^-$  со следующими параметрами [1]:

- масса положительно заряженного иона:  $m_{H^+} = 1.67 \cdot 10^{-27}$  кг,
- масса отрицательно заряженного иона:  $m_{OH^-} = 28.24 \cdot 10^{-27}$  кг,
- численное значение заряда иона  $H^+$ :  $q_{H^+} = 1.602 \cdot 10^{-19}$  Кл, (3)
- численное значение заряда иона  $OH^-$ :  $q_{OH^-} = -1.602 \cdot 10^{-19}$  Кл.

В качестве электрической дипольной частицы используем молекулу воды, описанную в разделе 1.

Для описания движения частицы введем инерциальную [2] декартову систему координат  $OXYZ$ . Движение дипольной частицы представим в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений. Для дипольной частицы определим поступательное движение перемещением центра масс, а вращательное – вокруг этого центра. Для описания поступательного движения дипольной частицы выпишем силу, действующую на ее центр масс, и используем второй закон Ньютона. Вращательное движение смоделируем под действием вращательного момента, определяемого относительно центра масс. Для описания вращательного движения введем также локальную подвижную систему координат  $Oxyz$ , жестко закрепленную с частицей. Тогда вращение молекулы отождествляется вращением этой подвижной системы координат, описываемым с помощью углов Эйлера  $\varphi, \theta, \psi$  [2], интерпретация которых изображена на рис. 3. Углы  $\varphi, \theta, \psi$  называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно.

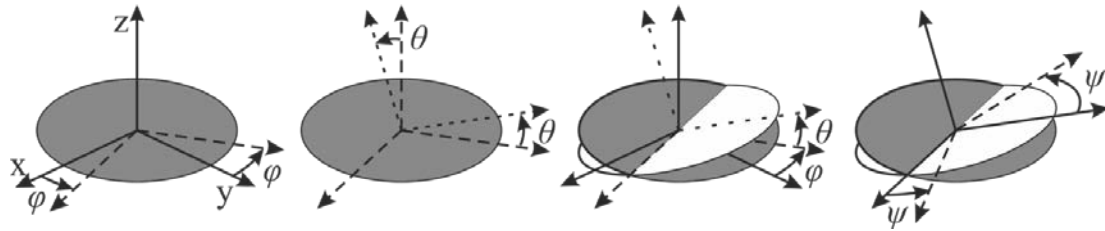


Рис. 3. Углы Эйлера

**Постановка задачи.** Рассмотрим  $N$  дипольных частиц с массой  $m_j$ , диагональным тензором инерции  $\tilde{J}_j = \text{diag}(\tilde{J}_j^x, \tilde{J}_j^y, \tilde{J}_j^z)$  и вектором дипольного момента  $\vec{p}_j = (0, 0, \tilde{p}_j)^T$ , заданными в подвижной системе координат, привязанной к главным центральным осям тензора инерции,  $j = 1, \dots, N$ . Для каждой  $j$ -той дипольной частицы на каждый момент времени  $t$  в инерциальной декартовой системе координат  $OXYZ$  определим следующие величины:

- $\vec{r}_j = (r_j^x, r_j^y, r_j^z)^T$  – радиус-вектор центра масс дипольной частицы;
- $\vec{V}_j = (V_j^x, V_j^y, V_j^z)^T$  – вектор поступательной скорости центра масс;
- $\vec{\omega}_j = (\omega_j^x, \omega_j^y, \omega_j^z)^T$  – вектор угловой скорости относительно центра масс;
- $p_j$  – модуль вектора  $\vec{p}_j = (p_j^x, p_j^y, p_j^z)^T$  дипольного момента;
- $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$  – углы Эйлера.

Здесь и далее символ « $\sim$ » означает, что величина задана в подвижной системе координат.

Рассмотрим также  $M$  заряженных частиц с массой  $m_k^{\text{ion}}$  и зарядом  $q_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ .

Для  $k$ -той заряженной частицы в каждый момент времени  $t$  в инерциальной декартовой системе координат  $OXYZ$  определим следующие величины:

- $\vec{r}_k^{\text{ion}} = (r_k^x, r_k^y, r_k^z)^T$  – радиус-вектор центра масс заряженной частицы;
- $\vec{V}_k^{\text{ion}} = (V_k^x, V_k^y, V_k^z)^T$  – вектор поступательной скорости центра масс.

Требуется для  $j$ -той дипольной частицы,  $j = 1, \dots, N$ , определить на момент времени  $T > t_0$  следующие величины:  $\vec{r}_j, \vec{V}_j, \vec{\omega}_j, \varphi_j, \theta_j, \psi_j$ , а для каждой  $k$ -той заряженной частицы  $k = 1, \dots, M$  – значения  $\vec{r}_k^{\text{ion}}, \vec{V}_k^{\text{ion}}$ .

**Уравнения движения.** Взаимодействие дипольных частиц осуществляется посредством поля, порожденного всеми диполями и внешним полем. Известно, что напряженность [5] полного поля, действующего на  $j$ -тую дипольную частицу, описывается формулой

$$\vec{\varepsilon}^{\text{dip}}(\vec{r}_j) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\vec{r}_{jk}|^3} \left[ 3 \left( \frac{(\vec{r}_{jk})^T}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{p}_k \right) \frac{\vec{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|} - \vec{p}_k \right] + \vec{\varepsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_j), \tag{4}$$

где  $\varepsilon_0 = (36\pi)^{-1} \cdot 10^{-9}$  Кл<sup>2</sup>/(Н·м<sup>2</sup>) – электрическая постоянная,  $\vec{r}_{jk} = \vec{r}_k - \vec{r}_j$ ,  $\vec{\varepsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_j)$  – внешнее электрическое поле, действующее на  $j$ -тую дипольную частицу. Функция  $U(\vec{r}_j)$  потенциальной энергии взаимодействия  $j$ -той молекулы воды с полным дипольным полем определяется формулой

$$U(\vec{r}_j) = -(\vec{\varepsilon}^{\text{dip}}(\vec{r}_j))^T \cdot \vec{p}_j. \tag{5}$$

Известно, что сила  $\vec{F}_j = (F_j^x, F_j^y, F_j^z)^T$ , действующая на центр масс  $j$ -той дипольной частицы, представима в виде

$$\vec{F}_j = -\nabla U(\vec{r}_j). \tag{6}$$

В качестве дифференциального уравнения, описывающего поступательное движение  $j$ -той дипольной частицы, используем второй закон Ньютона:

$$m_j \frac{d^2 r_j^q}{dt^2} = F_j^q, \quad q = x, y, z; \quad j = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Уравнение (7) сведем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка посредством использования компонент вектора скорости:

$$\begin{cases} \frac{dr_j^q}{dt} = V_j^q, \\ \frac{dV_j^q}{dt} = \frac{1}{m_j} F_j^q. \end{cases} \quad q = x, y, z; \quad j = 1, \dots, N. \quad (8)$$

После проведения несложных преобразований с учетом (4)–(8) для частиц с дипольными моментом получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{V}_j, \\ \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_j} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\vec{r}_{jk}|^4} \left[ 15 \left( \frac{(\vec{r}_{jk})^T}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{p}_k \right) \left( \frac{(\vec{r}_{jk})^T}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{p}_j \right) \frac{\vec{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|} - \right. \\ \left. -3 \left( \left( \frac{(\vec{r}_{jk})^T}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{p}_k \right) \vec{p}_j + \left( \frac{(\vec{r}_{jk})^T}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{p}_j \right) \vec{p}_k + \left( (\vec{p}_k)^T \cdot \vec{p}_j \right) \frac{\vec{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|} \right) \right] + \\ \left. + \frac{1}{m_j} \nabla \left( (\vec{\epsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_j))^T \cdot \vec{p}_j \right) \right] \quad j = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (9)$$

В свою очередь, взаимодействие заряженных частиц осуществляется посредством поля, порожденного диполями; поля, порожденного взаимодействием ионов между собой и внешним полем. Напряженность поля, созданного дипольными частицами и действующего на  $k$ -тую заряженную частицу нетрудно получить, зная, что полное поле, созданное дипольными частицами, описывается формулой (4). Таким образом,

$$\vec{\epsilon}^{\text{dip}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\vec{r}_{kj}|^3} \left[ 3 \left( \frac{(\vec{r}_{kj})^T}{|\vec{r}_{kj}|} \cdot \vec{p}_j \right) \frac{\vec{r}_{kj}}{|\vec{r}_{kj}|} - \vec{p}_j \right], \quad (10)$$

где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная,  $\vec{r}_{kj} = \vec{r}_j - \vec{r}_k^{\text{ion}}$ .

Поле, порожденное взаимодействием ионов, описывается [4] формулой

$$\vec{\epsilon}^{\text{ion}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq k}^M \frac{q_j}{|\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}|^3} (\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}). \quad (11)$$

Согласно принципу суперпозиции и с учетом (10), (11), получаем, что полное поле, действующее на  $k$ -тую заряженную частицу:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}^{\text{full}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) &= \vec{\epsilon}^{\text{dip}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) + \vec{\epsilon}^{\text{ion}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) + \vec{\epsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{1}{|\vec{r}_{kj}|^3} \left[ 3 \left( \frac{(\vec{r}_{kj})^T}{|\vec{r}_{kj}|} \cdot \vec{p}_j \right) \frac{\vec{r}_{kj}}{|\vec{r}_{kj}|} - \vec{p}_j \right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1, j \neq k}^M \frac{q_j}{|\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}|^3} (\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}) + \vec{\epsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}), \quad k = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (12)$$

Для нахождения силы, действующей на центр масс заряженной частицы, воспользуемся законом Кулона [4]:

$$\vec{F}^{\text{ion}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) = q_k \vec{\epsilon}^{\text{full}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}). \quad (13)$$

Пользуясь теми же рассуждениями, что и для (9), с помощью (7)–(8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, состоящую из  $6M$  скалярных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_k^{\text{ion}}}{dt} = \vec{v}_k^{\text{ion}}, \\ \frac{d\vec{V}_k^{\text{ion}}}{dt} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 m_k^{\text{ion}}} \sum_{j=1}^N \frac{q_k}{|\vec{r}_{kj}|^3} \left[ 3 \left( \frac{(\vec{r}_{kj})^T}{|\vec{r}_{kj}|} \cdot \vec{p}_j \right) \frac{\vec{r}_{kj}}{|\vec{r}_{kj}|} - \vec{p}_j \right] + \\ + \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 m_k^{\text{ion}}} \sum_{j=1, j \neq k}^M \frac{q_j}{|\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}|^3} (\vec{r}_k^{\text{ion}} - \vec{r}_j^{\text{ion}}) + \frac{q_k}{m_k^{\text{ion}}} \vec{\epsilon}^{\text{ext}}(\vec{r}_k^{\text{ion}}) \end{cases} \quad k = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N. \quad (14)$$

Вращательное движение  $j$ -той дипольной частицы опишем вращением частицы вокруг ее центра масс под действием момента сил  $\vec{N}_j = (N_j^x, N_j^y, N_j^z)^T$ , который определим векторным произведением

$$\vec{N}_j = [\vec{p}_j \times \vec{\epsilon}^{\text{dip}}(\vec{r}_j)], \quad j = 1, \dots, N. \quad (15)$$

Для описания вращательного движения каждой  $j$ -той дипольной частицы сопоставим ей локальную подвижную систему координат  $O_j x_j y_j z_j$ , жестко закрепленную с дипольной частицей. Таким образом, вращение каждой  $j$ -той дипольной частицы отождествим с вращением  $j$ -той подвижной системы координат. Описание вращения подвижной системы координат  $O_j x_j y_j z_j$  осуществим с помощью углов Эйлера  $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$  [2]. Исходя из определения углов Эйлера, матрица  $A_j$  перехода [6] от подвижной системы координат  $O_j x_j y_j z_j$  к инерциальной системе  $OXYZ$  имеет вид:

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \cos\psi_j - \sin\varphi_j \cos\theta_j \sin\psi_j & -\cos\varphi_j \sin\psi_j - \sin\varphi_j \cos\theta_j \cos\psi_j & \sin\varphi_j \sin\theta_j \\ \sin\varphi_j \cos\psi_j + \cos\varphi_j \cos\theta_j \sin\psi_j & -\sin\varphi_j \sin\psi_j + \cos\varphi_j \cos\theta_j \cos\psi_j & -\cos\varphi_j \sin\theta_j \\ \sin\theta_j \sin\psi_j & \sin\theta_j \cos\psi_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}.$$

Аналогично построена матрица  $B_j$  перехода от инерциальной системы координат к подвижной

$$B_j = \begin{pmatrix} \cos\psi_j \cos\varphi_j - \sin\psi_j \cos\theta_j \sin\varphi_j & \cos\psi_j \sin\varphi_j + \sin\psi_j \cos\theta_j \cos\varphi_j & \sin\psi_j \sin\theta_j \\ -\sin\psi_j \cos\varphi_j - \cos\psi_j \cos\theta_j \sin\varphi_j & -\sin\psi_j \sin\varphi_j + \cos\psi_j \cos\theta_j \cos\varphi_j & \cos\psi_j \sin\theta_j \\ \sin\theta_j \sin\varphi_j & -\sin\theta_j \cos\varphi_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}.$$

Вращательное движение каждой  $j$ -той дипольной частицы опишем дифференциальным уравнением моментов, которое в подвижной системе координат  $O_j x_j y_j z_j$  имеет вид:

$$\frac{d\vec{L}_j}{dt} + [\vec{\omega}_j \times \vec{L}_j] = \vec{N}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (16)$$

Здесь  $\vec{L}_j$  – момент импульса  $j$ -той дипольной частицы, который определим в виде:

$$\vec{L}_j = \tilde{J}_j \vec{\omega}_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Поскольку каждая  $j$ -тая дипольная частица жестко закреплена с соответствующей подвижной системой координат  $O_j x_j y_j z_j$ , то элементы тензора инерции не меняются со временем:

$$\frac{d\tilde{J}_j^q}{dt} = 0, \quad \forall q = x, y, z; \quad j = 1, \dots, N. \quad (18)$$

Учитывая (18), в скалярном виде имеем

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\omega}_j^x}{dt} + \tilde{\omega}_j^y \tilde{\omega}_j^z \frac{\tilde{J}_j^z - \tilde{J}_j^y}{\tilde{J}_j^x} = \frac{\tilde{N}_j^x(r_j)}{\tilde{J}_j^x}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^y}{dt} + \tilde{\omega}_j^x \tilde{\omega}_j^z \frac{\tilde{J}_j^x - \tilde{J}_j^z}{\tilde{J}_j^y} = \frac{\tilde{N}_j^y(r_j)}{\tilde{J}_j^y}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^z}{dt} + \tilde{\omega}_j^x \tilde{\omega}_j^y \frac{\tilde{J}_j^y - \tilde{J}_j^x}{\tilde{J}_j^z} = \frac{\tilde{N}_j^z(r_j)}{\tilde{J}_j^z}. \end{cases} \quad \forall j = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Уравнения (19) называют динамическими уравнениями Эйлера, характеризующими скорость изменения угловой скорости  $\vec{\omega}_j$ , заданной в локальной подвижной системе координат  $O_j x_j y_j z_j$ . Определим изменение во времени самой подвижной системы координат. Для этого выпишем уравнения, характеризующие связь между производной по времени от углов Эйлера  $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$  и угловой скоростью  $\vec{\omega}_j$  [6]:

$$\begin{cases} d\varphi_j/dt = (\tilde{\omega}_j^x \sin \psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos \psi_j) / \sin \theta_j, \\ d\psi_j/dt = \tilde{\omega}_j^z - \cot \theta_j (\tilde{\omega}_j^x \sin \psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos \psi_j), \\ d\theta_j/dt = \tilde{\omega}_j^x \cos \psi_j - \tilde{\omega}_j^y \sin \psi_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Интегрирование системы (19)–(20), содержащей в себе  $6N$  скалярных уравнений, в общем случае может быть выполнено только численно.

**Начальные данные.** Пусть вычислительная область – сфера диаметра  $D_{\text{dom}}$ . В качестве диполей рассмотрим молекулы воды. Для дипольных частиц с приемлемой для нас степенью точности известны [1] их физические параметры:

$$\begin{aligned} m_j &= 2.991 \cdot 10^{-26} \text{ кг}; \quad \tilde{J}_j^x = 3.201 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad \tilde{J}_j^y = 1.286 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ \tilde{J}_j^z &= 1.916 \cdot 10^{-47} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad p_j = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}. \end{aligned} \quad (21)$$

На начальный момент времени  $t = t_0$  поступательную и угловую скорости каждой частицы определим равными нулю

$$V_j^x = V_j^y = V_j^z = 0 \text{ м/с}, \quad \omega_j^x = \omega_j^y = \omega_j^z = 0 \text{ с}^{-1}. \quad (22)$$

Углы Эйлера  $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$  и координаты радиус-вектора  $\vec{r}_j$  будем задавать случайным образом с учетом следующих ограничений:

$$\varphi_j \in [0, 2\pi], \quad \theta_j \in [0, \pi], \quad \psi_j \in [0, 2\pi], \quad |\vec{r}_j| \leq \frac{D_{\text{dom}}}{2}. \quad (23)$$

Минимально допустимое расстояние  $d_{\text{min}}$  между центрами масс дипольных частиц определим, как три минимальных длины частицы вдоль линии её дипольного момента:

$$d_{\text{min}} = 1.773 \cdot 10^{-10} \text{ м}. \quad (24)$$

Для ионов в качестве начальных данных будем использовать их физические характеристики (3). Также на начальный момент времени  $t = t_0$  поступательные скорости каждой заряженной частицы определим равными нулю

$$(V_j^x)^{\text{ion}} = (V_j^y)^{\text{ion}} = (V_j^z)^{\text{ion}} = 0 \text{ м/с}. \quad (25)$$

Компьютерная арифметика использует ограниченную запись вещественных чисел. Для традиционных языков программирования максимальная точность представления вещественного числа составляет 15 значащих цифр. Поэтому для корректных вычислений желательно, чтобы отношение максимального числа к минимальному по модулю числу не превышало  $10^{15}$ . Исходя из этого диаметр  $D_{\text{dom}}$  вычислительной области зададим как  $D_{\text{dom}} = 10^{-7} \text{ м}$ .

Проведем масштабирование единиц измерения с параметрами, указанными в [10]:

$$\frac{\text{кг}}{10^{29}} = \text{кг}^*, \quad \frac{\text{м}}{10^{10}} = \text{м}^*, \quad \frac{\text{с}}{10^{11}} = \text{с}^*, \quad \frac{\text{А}}{10^{12}} = \text{А}^*. \quad (26)$$

Тогда, с учетом (26) вместо (21)–(23), получим следующие значения параметров для частиц с дипольным моментом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 9 \frac{\text{кг}^* \cdot (\text{м}^*)^3}{(\text{А}^*)^2 \cdot (\text{с}^*)^4}; \quad m_j = 2991 \text{ кг}^*; \quad p_j = 6.2 \cdot 10^3 \text{ Кл}^* \cdot \text{м}^*; \\ \tilde{J}_j^x &= 320.1 \text{ кг}^* \cdot (\text{м}^*)^2; \quad \tilde{J}_j^y = 128.6 \text{ кг}^* \cdot (\text{м}^*)^2; \quad \tilde{J}_j^z = 191.6 \text{ кг}^* \cdot (\text{м}^*)^2; \\ V_j^x &= V_j^y = V_j^z = 0 \text{ м}^*/\text{с}^*; \quad \omega_j^x = \omega_j^y = \omega_j^z = 0 (\text{с}^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (27)$$

и ограничения

$$\varphi_j \in [0, 2\pi], \quad \theta_j \in [0, \pi], \quad \psi_j \in [0, 2\pi], \quad |\bar{r}_{jk}| \geq 1.773 \text{ м}^*, \quad |\bar{r}_j| \leq 500 \text{ м}^*. \quad (28)$$

Для заряженных частиц из (3) с учетом (26) получим:

$$\begin{aligned} \text{масса положительно заряженного иона: } m_{\text{H}^+} &= 167 \text{ кг}^*, \\ \text{масса отрицательно заряженного иона: } m_{\text{OH}^-} &= 2824 \text{ кг}^*, \\ \text{численное значение заряда иона } \text{H}^+ : q_{\text{H}^+} &= 16020 \text{ Кл}^*, \\ \text{численное значение заряда иона } \text{OH}^- : q_{\text{OH}^-} &= -16020 \text{ Кл}^*. \end{aligned} \quad (29)$$

### 3. Численное решение

Для поиска численного решения системы ОДУ, состоящей из уравнений (9), (14), (19)–(20), использовались различные методы из семейства явных численных методов типа Рунге-Кутты [8] с контролем точности и устойчивости.

**Вычислительный эксперимент.** Изначально была проведена апробация и сравнение численных методов решения систем ОДУ на тестовых задачах. Наиболее точные расчеты за меньшее время вычислений получены с помощью метода Мерсона [9] пятого порядка точности. Кроме этого был проведен ряд расчетов для тестирования всей программы. Вычислительный эксперимент состоит в следующем. Расположим дипольные частицы в плоскости цилиндра диаметром равном  $5 \cdot 10^{-8} \text{ м}$ , ось цилиндра параллельна оси  $OZ$ . Начальные данные будем задавать с учетом (27)–(29). Направление дипольных моментов и положение заряженных частиц зададим случайным образом в пределах вычислительной области. Внешнее электрическое поле  $\vec{\varepsilon}^{\text{ext}} = (0, 0, -\varepsilon^{\text{ext}})^T$ , направленное противоположно оси  $OZ$ , будем считать равным внешнему электрическому полю Земли [7]:

$$\varepsilon^{\text{ext}} = 130 \text{ В/м}.$$

Под действием внешнего электрического поля дипольные частицы упорядочиваются вдоль линий напряженности внешнего поля, а заряженные частицы «облепляют» образованную таким образом дипольную «косичку» (рис. 4).

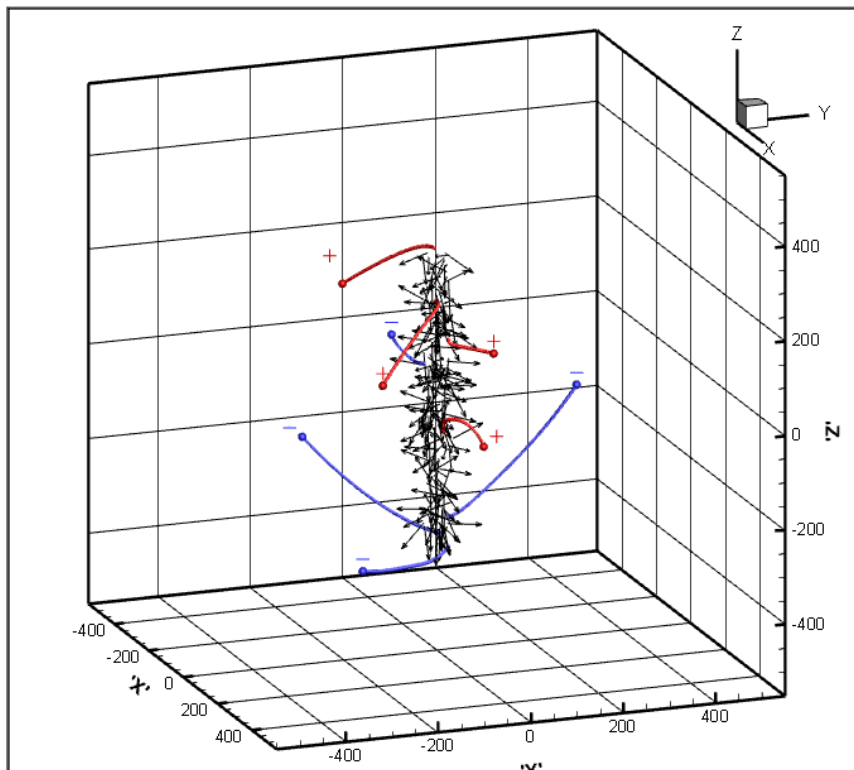


Рис. 4. Траектории движения заряженных частиц.  
 “+” – положительно заряженные, “-” – отрицательно

Таким образом, устойчивое во времени образование из частиц с электрическим дипольным моментом создает собственное электрическое поле, на порядки превышающее взаимодействие ионов между собой. Ближе к верхнему отрицательному полюсу такого образования скапливается положительный заряд, а ближе к нижнему положительному — отрицательный, усиливая тем самым созданное диполями поле.

Этот эффект может объяснить образование в атмосфере так называемого тёмного лидера, предшествующего обратной вспышке молнии.

### Заключение

В рамках статьи была предложена и описана математическая модель, описывающая взаимодействие электрических дипольных частиц с заряженными частицами. Проведена верификация созданного программного комплекса для устойчивых во времени образований из электрических диполей и их взаимодействия с ионными парами. Проведен вычислительный эксперимент, демонстрирующий усиление электрического поля исходного дипольного образования за счет взаимодействия с ионными парами.

### Литература:

1. Куриленко, О. Д. Краткий справочник по химии // 4-е изд., исправл. и доп. — Киев: Наукова думка, 1974. — 992 с.
2. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика в 10 т. Т. 1: Механика. Электродинамика / Л. Д. Ландау Е. М. Лифшиц. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1973. — 208 с.
3. Алешкевич, В. А. Механика сплошных сред. Лекции / В. А. Алешкевич, Л. Г. Деденко, В. А. Караваев. — М.: Изд-во физ. фак. МГУ, 1998. — 92 с.
4. Арцимович, Л. А. Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях. Учебное пособие / Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов. — М.: Изд-во «Наука», 1978. — 225 с.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела. — М.: Наука, 1978. — 791 с.
6. Поляхов, Н. Н. Теоретическая механика / Н. Н. Поляхов, С. А. Зегжда, М. П. Юшков; под ред. проф. Н. Н. Поляхова. — Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 536 с.
7. Тарасов, Л. В. Ветры и грозы в атмосфере Земли: Учебное пособие / Л. В. Тарасов. — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2011. — 280 с.
8. Бахвалов, Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1975.
9. Захаров, А. Ю. Некоторые результаты сравнений эффективности методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Препринт № 125 / А. Ю. Захаров. — М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1979. — 25 с.
10. Лабутин, А. А. Краткие сведения о международной системе единиц измерений (СИ). — Киев: Вища школа, 1975. — 88 с.

## Анализ уравнения, моделирующего волновые движения в тектоническом разломе

Горохов Александр Андреевич, аспирант;  
Черепанова Ирина Сергеевна, магистрант  
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

### Введение

На больших глубинах порядка десяти и более километров геоматериалы проявляют сложный комплекс физико-механических свойств. В современной тектонике считается, что именно на таких глубинах зарождаются горные удары и землетрясения. Особую роль в распространении сейсмических воздействий от глубинных событий играют тектонические разломы — трещиноватые структуры, нарушающие сплошность горных массивов. В экспериментах по осевому сжатию микроразрушенной горной породы под высоким боковым давлением установлен переход материала в запредельное состояние, отвечающее падающей ветви на диаграмме одноосного сжатия.

**Математическая модель**

Глубинный тектонический разлом рассматривается как узкая протяженная зона постоянной толщины  $h$ , заполненная микроразрушенной горной породой, которая находится в равновесном состоянии под высоким гидростатическим давлением со стороны разделяемых этой зоной горных массивов. Пусть  $u$  и  $w$  — смещения в разломе в продольном и поперечном направлениях  $x$  и  $z$ , вызванные действием дополнительного давления на фоне сильного гидростатического сжатия. Основное предположение развиваемой математической модели состоит в том, что потенциал дополнительной упругой деформации горной породы в разломе задается выражением

$$W = \frac{k}{2}(u_x + w_z)^2 - \frac{2\mu}{3}(u_x^2 + w_z^2 - u_x w_z),$$

в котором первое слагаемое описывает объемную деформацию среды с касательным модулем объемного сжатия  $k$ ; второе — разупрочнение материала при сдвиге с касательным модулем разупрочнения при сдвиге  $\mu$ .

Для такого потенциала закон Гука приводит к определяющим уравнениям

$$p = -\frac{\partial W}{\partial u_x}, \quad q = -\frac{\partial W}{\partial w_z} \tag{1}$$

$$-p = \left(k - \frac{4}{3}\mu\right)u_x + \left(k + \frac{2}{3}\mu\right)w_z, \quad -q = \left(k + \frac{2}{3}\mu\right)u_x + \left(k - \frac{4}{3}\mu\right)w_z.$$

Отсюда может быть получено уравнение

$$(3k - 4\mu)p = 4\mu(3k - \mu)u_x + (3k + 2\mu)q,$$

связывающее дополнительное давление в направлении разлома с продольной деформацией. Интегрирование последнего уравнения (1) при отсутствии прогиба срединной линии разлома в предположении о постоянной продольной деформации по толщине приводит к следующему выражению для поперечного смещения:

$$w = -z \frac{3k + 2\mu}{3k - 4\mu} u_x - z \frac{3q}{3k - 4\mu}.$$

Таким образом, кинетическая энергия участка разлома длины  $l$  с учетом энергии поперечного движения вычисляется по формуле:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dz = \frac{\rho h}{2} \int_0^l \left( \dot{u}^2 + r^2 \left| \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \dot{u}_x + \frac{3\dot{q}}{3k - 2\mu} \right|^2 \right) dx,$$

где  $r = h/(2\sqrt{3})$  — радиус инерции поперечного сечения, точка над символом означает частную производную по времени. Потенциальная энергия упругой деформации равна

$$\Pi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l W dx dz = h \int_0^l W(u_x) dx, \quad W = \frac{k}{2} \left( \frac{6\mu u_x + 3q}{3k - 4\mu} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{(6k - 2\mu)u_x + q}{k - 4\mu} \right)^2$$

В соответствии с принципом Гамильтона-Остроградского вариация функционала действия при фиксированных начальном и конечном состояниях механической системы равна нулю

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0.$$

Здесь  $\delta A$  — виртуальная работа внешних сил, равная сумме работ дополнительного давления на берегах разлома и приращений давлений  $p_0, p_1$  в концах участка:

$$\delta A = -2 \int_0^l q \delta w|_{z=h/2} dx + \int_{-h/2}^{h/2} (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}) dz =$$

$$h \frac{3k + 2\mu}{3k - 2\mu} \int_0^l q \delta u_x dx + h p_0 \delta u|_{x=0} - h p_1 \delta u|_{x=l}$$

Непосредственное вычисление вариаций приводит к промежуточному уравнению



$$\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho i \delta \dot{u} + \rho r^2 \frac{3k+2\mu}{3k-2\mu} \left( \frac{3k+2\mu}{3k-2\mu} \dot{u}_x + \frac{3\dot{q}}{3k-2\mu} \right) \delta \dot{u}_x + \frac{2\mu(\mu-3k)}{3k-4\mu} u_x \delta u_x + \frac{1.5}{3k-4\mu} q \delta u_x \right) dx dt = \int_{t_0}^{t_1} (p_1 \delta u|_{x=l} - p_0 \delta u|_{x=0}) dt,$$

из которого после применения формулы интегрирования по частям к интегралам, содержащим производную от  $\delta u$  по времени и по пространственной переменной, с учетом произвольности вариации внутри интервала  $(0, l)$  и на его границах, вытекает уравнение движения

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} = f(x, t), \tag{2}$$

где

$$a^2 = \frac{4\mu(3k-\mu)}{\rho(3k-4\mu)}, \quad b = r \frac{3k+2\mu}{3k-2\mu}, \quad f = g_x, \quad g(x, t) = -\frac{3k-2\mu}{\rho(3k-4\mu)} q + r^2 \frac{k+2\mu/3}{(k-2\mu/3)^2} \ddot{q}$$

и динамические граничные условия

$$\rho(a^2 u_x - b^2 \ddot{u}_x - g)|_{x=0, l} = p_{0,1}.$$

Кинематические граничные условия для уравнения (1) ставятся обычным способом: задаются смещения в концах интервала  $u|_{x=0, l} = u_{0,1}$ , которые могут зависеть от времени. Начальные данные формулируются так же, как и для классического волнового уравнения:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = \psi(x).$$

Основной недостаток моделирования волновых процессов на основе уравнения (2) состоит в том, что оно не описывает диссипативных процессов. Такие процессы в грунтах и горных породах учитываются определяющими уравнениями вязкоупругой среды Кельвина–Фойхта. В соответствии с этой моделью нормальное напряжение  $\sigma$  в разломе разлагается в сумму двух слагаемых – упругого и вязкого. Для разупрочняющейся среды упругое напряжение находится по формуле  $s = -\rho a^2 u_x$ . Вязкое напряжение удовлетворяет закону Стокса:  $\sigma - s = \eta \dot{u}_x$ , где  $\eta$  – коэффициент вязкости. В терминах скоростей и напряжений полная система уравнений, учитывающая вязкие свойства среды, приводится к следующему виду:

$$\rho \ddot{u} - \rho b^2 \ddot{u}_{xx} = \sigma_x, \quad s = -\rho a^2 u_x, \quad \sigma = s + v \dot{u}_x. \tag{3}$$

В результате очевидных преобразований система (3) приводится к уравнению:

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} - \eta \dot{u}_{xx} = f(x, t), \quad \text{где } \eta = v/\rho.$$

### Априорные оценки решений

Поставим краевую задачу для полученного уравнения следующим образом:

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xx} - b^2 u_{ttxx} - \eta u_{txx} = f(x, t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

После умножения обеих частей уравнения (4) на функцию  $u_t(x, t)$ , проинтегрируем полученное равенство по  $x$  от 0 до 1:

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx + a^2 \int_0^1 u_{xx} u_t dx - b^2 \int_0^1 u_{ttxx} u_t dx - \eta \int_0^1 u_{txx} u_t dx = \int_0^1 f u_t dx.$$

Очевидно, что

$$\int_0^1 u_{tt} u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_t)^2 dx, \quad \int_0^1 u_{xx} u_t dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_x)^2 dx,$$

$$\int_0^1 u_{txx} u_t dx = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx, \quad \int_0^1 u_{txx} u_t dx = -\int_0^1 (u_{tx})^2 dx.$$

Отсюда, соответственно, имеем уравнение вида:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_t)^2 dx - \frac{a^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_x)^2 dx + \frac{b^2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 (u_{tx})^2 dx + \eta \int_0^1 (u_{tx})^2 dx = \int_0^1 f u_t dx. \quad (5)$$

Теперь оценим интеграл

$$\int_0^{t_1} u_{tx}(x, t) dt = u_x(x, t_1) - u_x(x, 0) = u_x(x, t_1) - \varphi_x(x).$$

Возводим обе части этого уравнения в квадрат и интегрируем по  $x$ :

$$\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx = \int_0^1 \left( \int_0^{t_1} u_{xt}(x, t) dt \right)^2 dx.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского к интегралу по времени

$$\left( \int_0^{t_1} u_{xt}(x, t) dt \right)^2 \leq t_1 \int_0^{t_1} (u_{xt}(x, t))^2 dt,$$

$$\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx \leq t_1 \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{xt}(x, t))^2 dt dx.$$

Возвращаемся к уравнению (5), положив  $f = 0$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^1 \left( (u_t(x, t_1))^2 - (u_t(x, 0))^2 \right) dx - \frac{a^2}{2} \int_0^1 \left( (u_x(x, t_1))^2 - (u_x(x, 0))^2 \right) dx + \\ & + \frac{b^2}{2} \int_0^1 \left( (u_{tx}(x, t_1))^2 - (u_{tx}(x, 0))^2 \right) dx + \eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{tx}(x, t))^2 dt dx = 0. \\ & \int_0^1 \left( (u_t(x, t_1))^2 - \psi^2 \right) dx - a^2 \int_0^1 \left( (u_x(x, t_1))^2 - (\varphi_x)^2 \right) dx + \\ & b^2 \int_0^1 \left( (u_{tx}(x, t_1))^2 - (u_{tx}(x, 0))^2 \right) dx = \\ & = -2\eta \int_0^1 \int_0^{t_1} (u_{tx}(x, t))^2 dx dt \leq \frac{-2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x)^2 dx. \end{aligned}$$

Применяя  $\varepsilon$  неравенство, оценим интеграл  $\int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x)^2 dx$  следующим образом:

$$-\frac{2\eta}{t_1} \int_0^1 (u_x(x, t_1) - \varphi_x(x))^2 dx \leq -\frac{2\eta}{t_1} (1 - \varepsilon) \int_0^1 (u_x(x, t_1))^2 dx - \frac{2\eta}{t_1} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx.$$

Из этой оценки следует, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 (u_t(x, t_1))^2 dx + \left( \frac{2\eta}{t_1} (1 - \varepsilon) - a^2 \right) \int_0^1 (u_x(x, t_1))^2 dx + b^2 \int_0^1 (u_{tx}(x, t_1))^2 dx \leq \\ & \leq \int_0^1 \psi^2 dx - a^2 \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx + b^2 \int_0^1 (\psi_x)^2 dx + \frac{2\eta}{t_1} \left( \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) \int_0^1 (\varphi_x)^2 dx. \end{aligned}$$

При  $t_1 \leq \frac{2\eta}{a^2} (1 - \varepsilon)$ .

Полученная оценка гарантирует единственность решения краевой задачи и непрерывную зависимость решения от начальных данных на малом интервале времени.

**Разностная схема**

Даже если рассматриваемая задача при определенном выборе начальных данных имеет ограниченное по времени решение, получить его исходя из уравнения (4) с помощью численных методов не удастся, поскольку погрешность вычислений оказывается экспоненциально растущей. Чтобы от этого избавиться, введем замену неизвестной функции  $u(t, x) = e^{\lambda t} w(t, x)$ . В результате чего получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \lambda^2 w + 2\lambda w_t + w_{tt} - (b^2 \lambda^2 + \eta \lambda - a^2) w_{xx} - (2b^2 \lambda + \eta) w_{txx} - b^2 w_{xtt} = f(x, t), \\ w|_{t=0} = \varphi(x), \\ w_t|_{t=0} = \psi(x), \\ w(0, t) = w(1, t) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Параметр  $\lambda$  выбираем так, чтобы выполнялось неравенство  $b^2 \lambda^2 + \eta \lambda - a^2 \geq 0$  для коэффициента при второй производной по пространственной переменной в уравнении (6). Рассматриваемую краевую задачу будем решать численно. Введем равномерную сетку на прямоугольнике  $0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ :

$$u_{h,\tau} = \left\{ x_i = hi, i = \overline{0, N}, t_n = n\tau, n = \overline{0, M}, h = \frac{1}{N}, \tau = \frac{1}{M} \right\},$$

где  $\tau$  и  $h$  шаги сетки, соответственно по времени и по пространству. Воспользуемся неявной разностной схемой для аппроксимации задачи (6). Начальные и краевые условия аппроксимируем поточечно. В результате чего приходим к следующей разностной задаче:

$$\begin{cases} \lambda^2 w_j^n + 2\lambda \frac{w_j^{n+1} - w_j^{n-1}}{2\tau} + \frac{w_j^{n+1} - 2w_j^n + w_j^{n-1}}{\tau^2} - (b^2 \lambda^2 + \eta \lambda - a^2) \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{h^2} - \\ - (2b^2 \lambda + \eta) \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1} - w_{j+1}^{n-1} + 2w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{2\tau h^2} - \\ - b^2 \frac{w_{j+1}^{n+1} - 2w_j^{n+1} + w_{j-1}^{n+1} - 2w_{j+1}^n + 4w_j^n - 2w_{j-1}^n + w_{j+1}^{n-1} - 2w_j^{n-1} + w_{j-1}^{n-1}}{\tau^2 h^2} = f_j^n, \\ w_j^0 = \phi_j, \\ \frac{w_j^1 - \phi_j}{\tau} = \psi_j, \\ w_0^n = w_1^n = 0. \end{cases}$$

Разностная задача решается последовательно по слоям, по времени, с помощью метода прогонки для системы с трехдиагональной матрицей. Прогоночные коэффициенты равны

$$\begin{aligned} a_i = b_i &= \frac{2b^2 \lambda + \eta}{2\tau h^2} - \frac{b^2}{\tau^2 h^2}, \\ c_i &= \frac{\lambda}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{2b^2 \lambda + \eta}{\tau h^2} + \frac{2b^2}{\tau^2 h^2}, \\ d_i &= \frac{\lambda}{\tau} w_j^{n-1} - \lambda^2 w_j^n + \frac{2w_j^n - w_j^{n-1}}{\tau^2} + (b^2 \lambda^2 + \eta \lambda - a^2) \frac{w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n}{h^2} - \\ &- (2b^2 \lambda + \eta) \frac{w_{j+1}^{n-1} - 2w_j^{n-1} + w_{j-1}^{n-1}}{2\tau h^2} - b^2 \frac{2w_{j+1}^n - 4w_j^n + 2w_{j-1}^n - w_{j+1}^{n-1} + 2w_j^{n-1} - w_{j-1}^{n-1}}{\tau^2 h^2} + f_j^n. \end{aligned}$$

Можно показать, что схема решения уравнения (6) безусловно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по  $\tau$  и по  $h$ .

### Заключение

В рамках предположения о закритическом деформировании микроразрушенного материала в глубинном тектоническом разломе, рассматриваемом как узкая протяженная зона, разделяющая массивные блоки горной породы, получено модельное уравнение для описания динамических процессов, обусловленных распространением упругих волн в блоках. Показано, что краевая задача с начальными данными и граничными условиями первого рода для этого уравнения корректно поставлена. Построена разностная схема для ее численного решения.

Авторы благодарны профессору Садовскому В.М. за постановку задачи и внимание к данной работе.

### Литература:

1. Stavrogin, A.N., Tarasov V.G. *Experimental Physics and Rock Mechanics (Results of Laboratory Studies)*. India: Balkema, 2001. — 356 p.
2. Добрецов, Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. *Глубинная геодинамика*. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. — 409 с.
3. Гольдин, С.В. Дилатансия, переупаковка и землетрясения // *Физика Земли*. — 2004. № 10. — с. 37–54.
4. Tarasov, V.G., Randolph M.F. Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* — 2008. — Vol. 45, No. 3. — P 316–328.
5. Макаров, П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Перышкин А.Ю. Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды // *Физическая мезомеханика*. — 2010. — Т. 13, спец. вып. — с. 29–35.
6. Горохов, А.А. Анализ уравнения, описывающего динамическое деформирование в слое микроразрушенной среды // *Молодой ученый*. — 2015. № 11. — с. 35–39.

## Обработка данных геомониторинга на основе сингулярного спектрального анализа

Казаков Илья Вадимович, аспирант  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Одним из мощных методов анализа временных рядов является метод «Гусеница» (называемый в зарубежной литературе SSA — Singular Spectrum Analysis). Наиболее исследованным является одномерный метод SSA [1, 2], предназначенный для анализа одного вещественнозначного временного ряда.

Для одномерного ряда базовый метод SSA состоит в преобразовании исходного ряда в многомерный, сингулярном разложении получившейся траекторной матрицы, группировке членов разложения и последующем восстановлении.

При этом часто оказывается возможным выделить отдельные аддитивные составляющие исходного ряда, такие как тренд (гладкая и медленно меняющаяся часть ряда), различные колебательные и периодические компоненты, а также шумовую компоненту.

Способ преобразования одномерного ряда в многомерный представляет собой свертку временного ряда в матрицу, содержащую фрагменты временного ряда, полученную с некоторым сдвигом. Общий вид сдвиговой процедуры напоминает гусеницу, поэтому сам метод нередко так и называют — «Гусеница».

### Базовый алгоритм метода «Гусеница» SSA

Пусть  $N > 2$ . Рассмотрим вещественный временной ряд  $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$ . Будем предполагать, что ряд  $F$  — не нулевой, т. е. существует, по крайней мере, одно  $i$  такое, что  $f_i \neq 0$ . Числа  $0, \dots, N-1$  могут быть интерпретированы не только как дискретный момент времени, но и как некоторые метки, имеющие линейно-упорядоченную структуру.

#### Первый этап: разложение

*Вложение.* Процедура вложения переводит исходный временной ряд в последовательность многомерных векторов. Пусть  $L$  некоторое целое число (*длина окна*),  $1 < L < N$ . Процедура вложения образует  $K = N - L + 1$  векторов

вложения  $X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+l-2})^T$ ;  $1 \leq i \leq K$ , имеющих размерность  $L$ .  $L$  – траекторная матрица ряда  $F$  состоит из векторов вложения в качестве столбцов:  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_k]$ .

Другими словами, траекторная матрица – это матрица

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Очевидно, что  $x_{i,j} = f_{i+j-2}$  и матрица  $\mathbf{X}$  имеют одинаковые элементы на побочных диагоналях. Такая матрица называется *ганкелева*.

*Сингулярное разложение.* Результатом этого шага является сингулярное разложение (SVD – Singular Value Decomposition) траекторной матрицы ряда. Пусть  $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ . Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  собственные числа матрицы  $\mathbf{S}$ , взятые в неубывающем порядке ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ) и  $U_1, \dots, U_L$  – ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $\mathbf{S}$ , соответствующих собственным числам.

Пусть  $d = \max\{i : \lambda_i > 0\}$ . Если обозначить  $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}, i = 1, \dots, d$ , то сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{X}$  может быть записано как

$$\mathbf{X} = X_1 + \dots + X_d, \tag{2}$$

где  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ . Каждая из матриц  $X_i$  имеет ранг 1. Поэтому их можно назвать элементарными матрицами.

Набор  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  мы будем называть *i-ой собственной тройкой* сингулярного разложения (2).

**Второй этап: восстановление**

*Группировка.* На основе разложения (2) процедура группировки делит все множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ . Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ . Тогда результирующая матрица  $X_I$ , соответствующая группе  $I$ , определяется как  $X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}$ . Такие матрицы вычисляются для  $I_1, \dots, I_m$ , тем самым разложение (2) может быть записано в сгруппированном виде

$$X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_m}. \tag{3}$$

Процедура выбора множеств  $I_1, \dots, I_m$  называется группировкой собственных троек.

*Диагональное усреднение.* На последнем шаге алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (3) переводится в новый ряд длины  $N$ . Пусть  $\mathbf{Y}$  – некоторая  $L \times K$  матрица с элементами  $y_{ij}$ , где  $i \leq i \leq L, 1 \leq j \leq K$ . Положим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$  и  $N = L + K - 1$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , если  $L < K$ , и  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , иначе. Диагональное усреднение переводит матрицу  $\mathbf{Y}$  в ряд  $g_0, \dots, g_{N-1}$  по формуле (4).

Выражение (4) соответствует усреднению элементов матрицы вдоль «диагоналей»  $i + j = k + 2$ : выбор  $k = 0$  дает  $g_0 = y_{11}$ , для  $k = 1$  получаем  $g_1 = (y_{12} + y_{21})/2$  и т.д. Заметим, что если матрица  $\mathbf{Y}$  является траекторной матрицей некоторого ряда  $(h_0, \dots, h_{N-1})$  (другими словами, если матрица  $\mathbf{Y}$  является ганкелевой),  $g_i = h_i$  для всех  $i$ .

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m,k-m+2}^* & \text{для } K^* \leq k < N. \end{cases}$$

Применяя диагональное усреднение (4) к результирующим матрицам  $X_{jk}$ , мы получаем ряды  $\tilde{F}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$ , и, следовательно, исходный ряд  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  раскладывается в сумму  $m$  рядов:

$$f_n = \sum_{k=1}^m \tilde{f}_n^{(k)}. \quad (5)$$

### Сингулярное разложение

Сингулярное разложение является основой математической части метода. Большинство его свойств справедливо для произвольной матрицы  $L \times K$ , но ганкелева структура траекторной матрицы добавляет ряд особых свойств. Определим сингулярное разложение произвольной ненулевой  $L \times K$ -матрицы  $\mathbf{X} = [X_1 : \dots : X_K]$  как разложение  $\mathbf{X}$  в виде

$$X = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad (6)$$

где  $\lambda_i (i = 1, \dots, L)$  – собственные числа матрицы  $\mathbf{S} = \mathbf{X}\mathbf{X}^T$ , упорядоченные по убыванию,  $d = \max\{i : \lambda_i > 0\} = \text{rank } \mathbf{X}$ ,  $(U_1, \dots, U_d)$  – соответствующая система ортонормированных собственных векторов матрицы  $\mathbf{S}$  и  $V_i = \mathbf{X}^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ .

В стандартной терминологии  $\sqrt{\lambda_i}$  называются сингулярными числами;  $U_i$  и  $V_i$  – левыми и правыми сингулярными векторами матрицы  $\mathbf{X}$  соответственно. Набор  $(\sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T)$  называется  $i$ -ой собственной тройкой матрицы  $\mathbf{X}$ . Заметим, что строки и столбцы траекторной матрицы являются отрезками исходного ряда. Поэтому левый и правый сингулярные векторы так же имеют временную структуру и могут рассматриваться как временные ряды.

Если определить  $\mathbf{X}_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ , то представление (6) может быть переписано в виде (2), т.е. как представление  $\mathbf{X}$  в виде суммы элементарных матриц. При этом собственное число  $\lambda_i$  является характеристикой вклада матрицы  $\mathbf{X}_i$  в разложение. Так как сингулярное разложение имеет дело с матрицей  $\mathbf{X}$  как единым целым, оно не инвариантно относительно перестановки ее столбцов  $X_1, \dots, X_k$ .

Более того равенство (6) показывает, что сингулярное разложение обладает свойством симметричности:  $V_1, \dots, V_d$  образуют ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ , соответствующих тем же самым собственным числам  $\lambda_i$ .

### Пример работы программы «Гусеница»

Одним из вычислительных инструментов анализа воздействий внешних факторов является программа **solid.exe**. Используя данную программу, может быть получен расчет трехмерных координат смещения точки на твердой поверхности земли. Несмотря на то, что программа **solid.exe** способна предоставить информацию до июня 2015 г., осенью появилась новая модифицированная версия. На смену пришел специализированный пакет **Solidearthtide**, написанный Jose Gama под язык программирования и систему статистических вычислений **R**. Для того чтобы получить координаты смещения точки, необходимо сначала подключить пакет (рис.1), а затем написать команду **CalculateTide**[название, год, месяц, день, широта, долгота, булева переменная (TRUE = представить данные в виде матрицы)]. В результате выполнения программы, на экране представлены координаты смещения точки с минутным интервалом (рис. 2).

Метод «Гусеница»-SSA независимо разрабатывался и в России и в Великобритании под различными названиями: «Гусеница» и SSA (SingularSpectrumAnalysis). Он применяется для анализа временных рядов и может решать различные задачи, такие как, выделение тренда, обнаружение периодик, сглаживание ряда, построение полного разложения ряда в сумму тренда, периодик и шума.

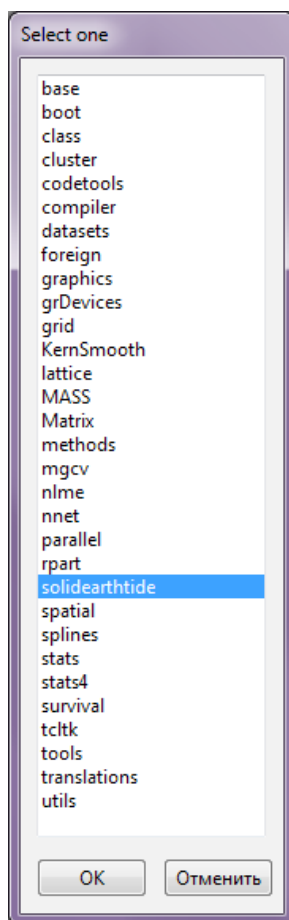


Рис. 1. Подключение пакета в языке R

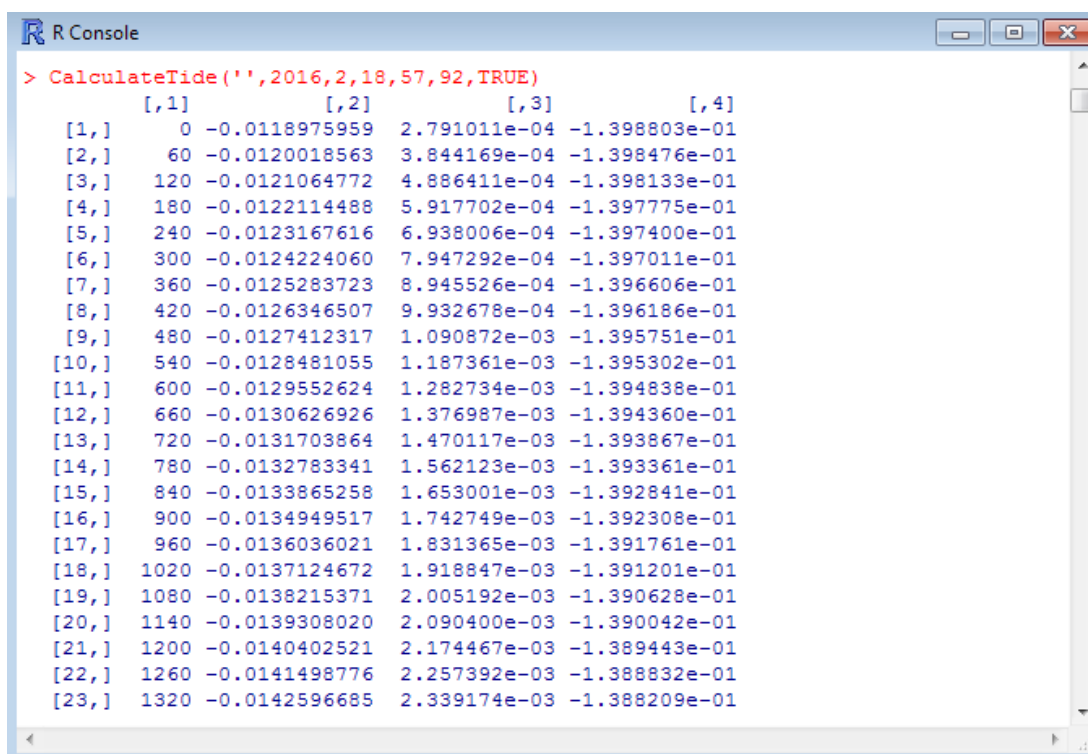


Рис. 2. Пример работы программы

Трехмерные данные, полученные с помощью пакета **Solidearthtide**, можно графически представить с помощью программы «Гусеница», где по оси X — время, по Y — смещение; верхняя кривая — это направление Восток-Запад, средняя — Север-Юг, а нижняя — Вверх-Вниз (рис. 3). В результате применения программы «Гусеница» получаем исходный и восстановленный ряды (в нашем случае они совпали), а также ряд остатков, играющий принципиальную роль при анализе временного ряда (рис. 4).

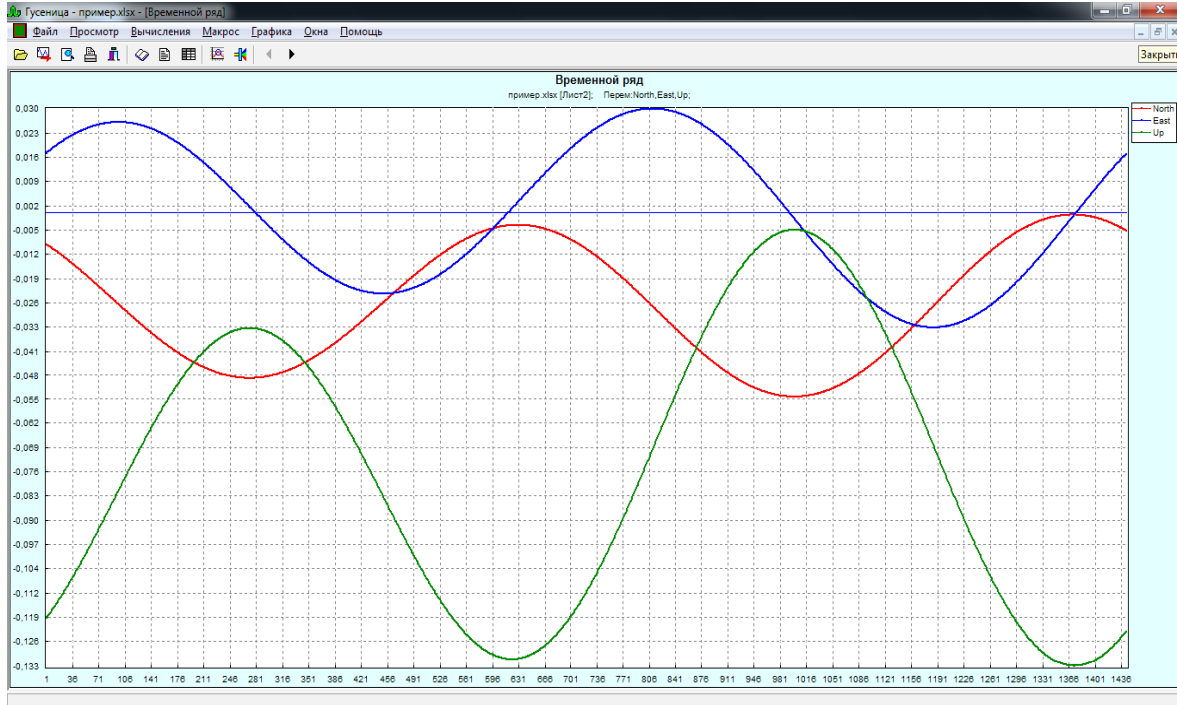


Рис. 3. Графическое представление трехмерного временного ряда

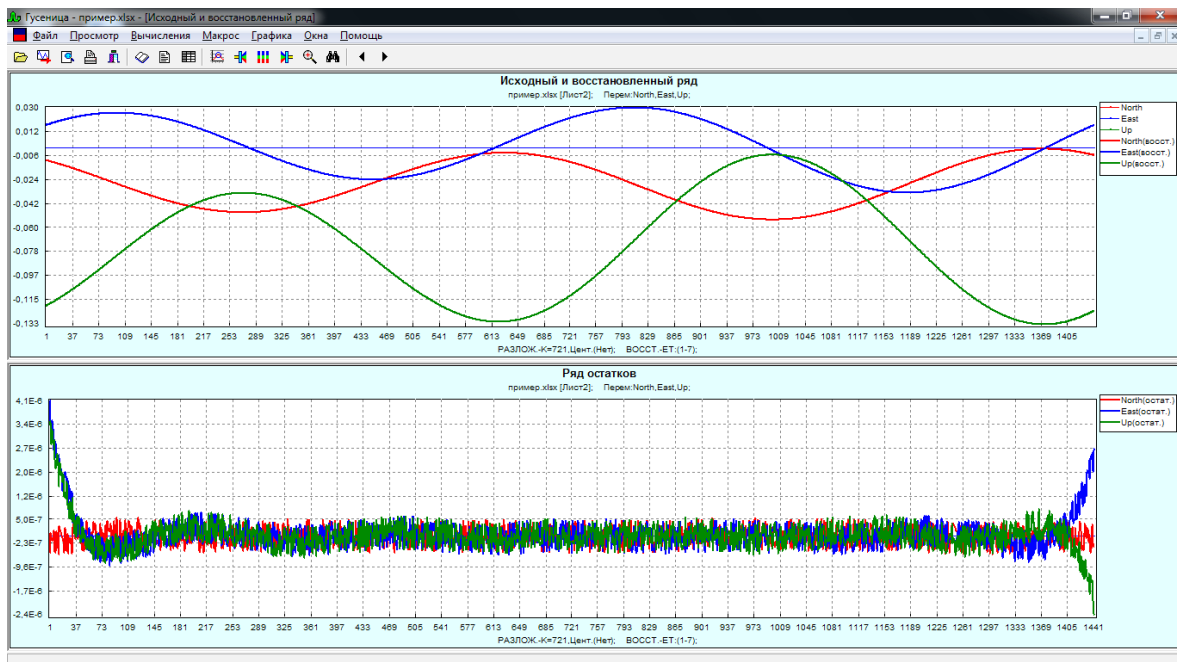


Рис. 4. Результат работы программы «Гусеница»

Актуальность выделения предвестников землетрясений очевидна, так как до сих пор ни один предложенный метод не может с высокой точностью определить время, место и силу землетрясений.



## Литература:

1. Голяндина, Н. Э. Метод «Гусеница» — SSA анализа временных рядов: учебное пособие. — СПб: 2004. — 76 с.
2. Данилов, Д. Л. Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / А. А. Жиглявский. — СПб: СПбГУ, 1997. — 308 с.
3. Официальный сайт CaterpillarSSA [Электронный ресурс] сайт для скачивания утилиты CaterpillarSSA // <http://www.gistatgroup.com/gus/index.html>
4. Мельхиор, П. Земные приливы. — М.: Мир, 1968. — 482 с.
5. Уильямс Дж. Е. Приливные ритмы: ключ к истории вращения Земли и эволюции лунной орбиты // J. Phys. Earth. — 1990.
6. Dennis Milbert SOLID EARTH TIDE. Электронный ресурс. — Режим доступа: <http://home.comcast.net/~dmilbert/softs/solid.htm> (дата обращения 10.12.2014).
7. Салтыков, В. А. Механизм приливных эффектов в сейсмичности на основе модели амплитудно-зависимой диссипации // Физическая мезомеханика. — 2014. — Вып. № 5. — Т. 17. — с. 103–110.
8. Sachiko Tanaka, Masakazu Ohtake, and Haruo Sato. Evidence for tidal triggering of earthquakes as revealed from statistical analysis of global data // J. GEOPHYSICAL RESEARCH. — 2002. — Vol. 107, No. B10. — P. 2211.
9. Laurent Métivier, Olivier de Viron, Clinton P. Conrad, Stéphane Renault, Michel Diament, Geneviève Patau. Evidence of earthquake triggering by the solid earth tides // Earth and Planetary Science Letters. — 2009. — Vol. 278. — P. 370–375.
10. XIE Chao-Di, WU Xiao-Ping, LEI Xing-Lin, MAO Wei, SUN Nan. Long-period tides and global earthquake energy release // Chinese Journal of Geophysics. — 2013. — Vol. 56, No. 6. — P. 823–832.
11. Sibgatulin, V.G., Peretokin S.A., Kabanov A.A. Resonances of gravitational tides and their effect on geological environment // Earth science frontiers. — 2014. — Vol. 21 (4). — P. 303–310.

## Метод сквозного счета для численного моделирования деформации пористых металлов

Краснов Александр Александрович, аспирант  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

### Введение

В связи с возросшим интересом к новым материалам с перспективными свойствами, как с экономической, так и с механической точек зрения, большое значение имеет моделирование поведения различных сред под воздействием внешних сил. Металлические пены — представители целого семейства пористых материалов. Их отличительными свойствами являются низкая плотность и высокие прочностные характеристики [1, 2]. Причины, по которым пористые металлы еще не стали очень популярны, заключаются в несовершенстве технологии их производства (сложно получить однородное распределение пор) и высокой стоимостью этой технологии. В результате исследований последних лет намечились значительные изменения, как в совершенствовании методов получения металлических пен, так и в снижении стоимости их производства.

### Технология

Получить пористые металлы можно несколькими способами [3]:

- введением газа в жидкий сплав с образованием пузырьков нужного размера и их дальнейшей стабилизацией охлаждением;
- формированием смеси из порошков металла и вспенивающего материала (например,  $TiH_2$ ) последующим нагреванием смеси с высвобождением газа  $H_2$  и образованием пузырьков;
- спеканием полых металлических сфер;
- растворением газа в жидком металле под давлением, с контролируемым высвобождением в процессе затвердевания;

- заполнением песком полимерного пористого материала с открытыми ячейками с дальнейшим выжиганием полимера и заполнением получившейся формы металлическим сплавом;
- покрытием полимерного пористого материала с открытыми ячейками частицами металлического сплава методом электрического осаждения с последующим выжиганием полимера;
- задержкой инертного газа в металлическом порошке под высоким давлением и дальнейшим нагреванием с расширением газа;
- созданием смеси металла и растворимого материала, с последующим выщелачиванием.

Все методы производства пористых металлов связаны с высокими температурами и необходимостью точно контролировать изменения температуры и давления на различных стадиях технологических процессов.

**Модель**

Для описания модели используется реологический метод. На рис. 1 приведена реологическая схема пористой среды [4]. Согласно этой схеме поведение пористого металла до момента схлопывания пор соответствует пружине с модулем упругой податливости  $a$ , а повышение жесткости после схлопывания пор соответствует второй пружине с модулем  $b$ . Жесткий контакт соответствует пористости материала и имитирует уплотнение среды. Также эта схема учитывает пластические свойства пористого металла.

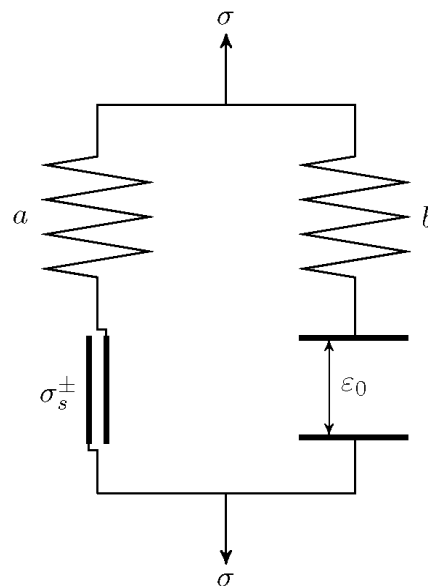


Рис. 1. Реологическая схема

Диаграмма связи между напряжением и деформацией пористой среды при одноосном сжатии изображена на рис. 2.

Процесс упругой деформации материала описывается уравнением  $\sigma = \varepsilon / a$ , а упругопластической (после схлопывания пор) –  $\sigma = (\varepsilon + \varepsilon_0) / b - \sigma_s^-$ . Точка  $\varepsilon = -\varepsilon_0$  соответствует моменту схлопывания пор. Приведенная диаграмма не противоречит результатам практических экспериментов по сжатию пористых металлов [1, 3, 5].

Используя приведенную выше реологическую схему можно составить следующие определяющие соотношения:

$$\begin{cases} \rho_0 \dot{v} = \nabla \cdot \sigma + f, \\ \sigma = s + q^\pi, \\ (\tilde{s} - s) : (a : \dot{s} - \nabla v) \geq 0 \quad (\tilde{s}, s \in F), \\ 2b : \dot{q} = \nabla v + \nabla v^*. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь  $\rho_0 = \rho(1 - \Theta_0)$  – плотность пористого материала;  $\Theta_0$  – пористость;  $v$  – вектор скорости;  $f$  – вектор объемных сил;  $\nabla$  – оператор Гамильтона;  $*$  – сопряженный тензор. Используются механические характеристики пористого материала: модули упругой податливости  $a$ ,  $b$  и определяющие их модули сдвига  $\mu_a$ ,  $\mu_b$ ; модули объем-

ного сжатия  $k_a, k_b$ ; предел текучести среды  $\tau_s$ ; начальная пористость  $\Theta_0$ , вычисленные для материала с малой пористостью в работе [6]. Искомыми функциями являются вектор скорости  $\mathbf{v}$  и тензоры  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{q}$ .

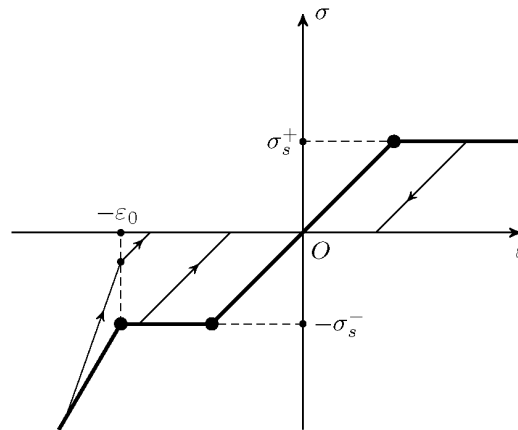


Рис. 2. Диаграмма связи между напряжением и деформацией

Полагая  $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ , после скалярного умножения обеих частей уравнения движения на вектор скорости двойной свертки дифференциального уравнения для  $\mathbf{q}$  с тензором  $\mathbf{q}^\pi$  и суммирования результатов, получим неравенство внутренней диссипации энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\rho_0 |\mathbf{v}|^2) + \mathbf{s} : \mathbf{a} + \mathbf{q}^\pi : \mathbf{b} : \mathbf{q}^\pi \leq \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) + \rho_0 \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

Левая часть неравенства представляет собой скорость изменения кинетической и потенциальной энергий, а правая — мощность внутренних поверхностных и активных объемных сил. Разность между правой и левой частями равна скорости пластической диссипации энергии, которая в соответствии с принципами необратимой термодинамики не может быть отрицательной величиной. При выводе данного неравенства существенно использовалось тождество [4]:

$$2\mathbf{q}^\pi : \mathbf{b} : \dot{\mathbf{q}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{q}^\pi : \mathbf{b} : \mathbf{q}^\pi),$$

которое справедливо для проекции на произвольный выпуклый конус.

### Вычислительный алгоритм

Чтобы построить алгоритм численной реализации описанной модели, представим соотношения (1) в виде вариационного неравенства в матричной форме:

$$(\tilde{V} - V)^T \left( A \frac{\partial U}{\partial t} - \sum_{k=1}^n B^k \frac{\partial V}{\partial x_k} - G \right) \geq 0, \quad \tilde{V}, V \in F. \tag{2}$$

Здесь  $T$  — символ транспонирования;  $n$  — размерность модели;  $G$  — вектор массовых сил;  $U$  и  $V$  — вектор-функции, содержащие компоненты вектора скорости и тензоров напряжений. Для трехмерного случая:

$$U = (v_1, v_2, v_3, s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23}, s_{13}, s_{12}, q_{11}, q_{22}, q_{33}, q_{23}, q_{13}, q_{12})^T,$$

$$V = (v_1, v_2, v_3, s_{11}, s_{22}, s_{33}, s_{23}, s_{13}, s_{12}, q_{11}^\pi, q_{22}^\pi, q_{33}^\pi, q_{23}^\pi, q_{13}^\pi, q_{12}^\pi)^T.$$

Матрицы-коэффициенты из вариационного неравенства (2) представимы следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \rho \delta & 0 & 0 \\ 0 & A_s & 0 \\ 0 & 0 & A_q \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & B_k & B_k \\ B_k^T & 0 & 0 \\ B_k^T & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\delta$  — единичная матрица  $3 \times 3$ ,

$$A_s = \begin{pmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & 2a_{1123} & 2a_{1113} & 2a_{1112} \\ a_{1122} & a_{2222} & a_{2233} & 2a_{2223} & 2a_{2213} & 2a_{2212} \\ a_{1133} & a_{2233} & a_{3333} & 2a_{3323} & 2a_{3313} & a_{3312} \\ 2a_{1123} & 2a_{2223} & 2a_{3323} & 4a_{2323} & 4a_{2313} & 4a_{2312} \\ 2a_{1113} & 2a_{2213} & 2a_{3313} & 4a_{2313} & 4a_{1313} & 4a_{1312} \\ 2a_{1112} & 2a_{2212} & 2a_{3312} & 4a_{2312} & 4a_{1312} & 4a_{1212} \end{pmatrix},$$

$A_q$  аналогично состоит из компонентов тензора упругой податливости  $b$ ,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При  $U = V$  вариационное неравенство (2) соответствует модели уплотненного состояния пористого металла.

Для решения задачи деформирования пористой среды использован явный по времени алгоритм численной реализации метода сквозного счета с использованием метода расщепления по физическим процессам. На каждом шаге по времени решается задача деформирования упругой пористой среды:

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = \sum_{k=1}^n B^k \frac{\partial V}{\partial x_k} + G, \tag{3}$$

используя метод двуциклического расщепления по пространственным переменным [7]. Для трехмерного случая на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  метод расщепления состоит из следующих этапов:

- решение одномерной задачи в направлении  $x_1$  на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t / 2)$ ;
- решение одномерной задачи в направлении  $x_2$  на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t / 2)$ ;
- решение одномерной задачи в направлении  $x_3$  на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t / 2)$ ;
- повторный пересчет в направлении  $x_3$  на интервале  $(t_0 + \Delta t / 2, t_0 + \Delta t)$ ;
- повторный пересчет в направлении  $x_2$  на интервале  $(t_0 + \Delta t / 2, t_0 + \Delta t)$ ;
- повторный пересчет в направлении  $x_1$  на интервале  $(t_0 + \Delta t / 2, t_0 + \Delta t)$ .

Расщепление системы уравнений (3) дает несколько одномерных систем:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial U^1}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial V^1}{\partial x_1} + G^1, & U^1(t_0, x) &= U(t_0, x), \\ A \frac{\partial U^2}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial V^2}{\partial x_2} + G^2, & U^2(t_0, x) &= U^1(t_0 + \Delta t / 2, x), \\ A \frac{\partial U^3}{\partial t} &= B^3 \frac{\partial V^3}{\partial x_3} + G^3, & U^3(t_0, x) &= U^2(t_0 + \Delta t / 2, x), \\ A \frac{\partial U^4}{\partial t} &= B^3 \frac{\partial V^4}{\partial x_3} + G^3, & U^4(t_0 + \Delta t / 2, x) &= U^3(t_0 + \Delta t, x), \\ A \frac{\partial U^5}{\partial t} &= B^2 \frac{\partial V^5}{\partial x_2} + G^2, & U^5(t_0 + \Delta t / 2, x) &= U^4(t_0 + \Delta t, x), \\ A \frac{\partial U^6}{\partial t} &= B^1 \frac{\partial V^6}{\partial x_1} + G^1, & U^6(t_0 + \Delta t / 2, x) &= U^5(t_0 + \Delta t, x). \end{aligned}$$

Искомое  $U(t_0 + \Delta t, x)$  равно  $U^6(t_0 + \Delta t, x)$ . Описанный метод обеспечивает устойчивость численного решения при выполнении на всех этапах одномерных условий устойчивости и является методом второго порядка точности (при

условии использования на его этапах схем второго порядка). Одномерные системы уравнений на этапах расщепления решаются при помощи явной монотонной схемы "предиктор-корректор".

Чтобы учесть пластические свойства металла, вариационное неравенство (2) заменой производной по времени конечной разностью на интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  приводится к виду:

$$(\tilde{V} - V)^T A(U - \bar{U}) \geq 0, \quad \tilde{V}, V \in F,$$

где  $\bar{U}$  — решение упругой задачи (3) в момент времени  $t_0 + \Delta t$ . Для модели пористого металла это неравенство решается достаточно просто [8].

### Параллельная реализация алгоритма

Расчеты проводятся на многопроцессорной вычислительной системе. Программирование выполнено по технологии SPMD (Single Program — Multiple Data) на языке Fortran-90 с использованием библиотеки MPI (Message Passing Interface). Программа выполняет подобные вычисления, сведенные к согласованной поэтапной реализации метода расщепления по пространственным переменным. Программная реализация алгоритма осложняется необходимостью склейки решений на границах разделения области между вычислительными узлами.

Вычисления выполняются для моделирования деформации блока пористого алюминия с различными значениями пористости  $\Theta_0$  (5 %, 10 %, 25 %).

Литература:

1. Banhart, J., Baumeister J. Deformation Characteristics of Metal Foams // Journal of Materials Science. — 1998. — Vol. 33, Iss. 6. — P. 1431–1440.
2. Gibson, L. J., Ashby M. F. Cellular Solids: Structure and Properties, Second Edition // (ISBN: 978-0-521-49911-9). Cambridge University Press, 1997.
3. Gibson, L. J. Mechanical Behavior of Metallic Foams // Annual Review of Materials Research. — 2000. — Vol. 30. — P. 191–227.
4. Садовская, О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. — М.: Физматлит, 2008.
5. Ashby, M. F. Plastic Deformation of Cellular Materials. Encyclopedia of Materials: Science and Technology (ISBN: 978-0-08-043152-9). Pergamon Press. — 2001. — P. 7068–7071.
6. Золотухин, А.В. Численное моделирование свойств пористых металлов // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы авиации и космонавтики». — Красноярск: СибГАУ. — 2011. — Т. 1. — с. 138–139.
7. Марчук, Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988.
8. Sadovskii, V.M., Sadovskaya O.V. Mathematical Modeling of a Metal Foam as an Elastic-Plastic Continuum with Changing Resistance // AIP Conf. Proc. — 2015. — Vol. 1648. — P. 63005–1–63005–4 (DOI: 10.1063/1.4912863).

## Метод автоматической классификации документов в задаче профессионального самоопределения

Макарова Мария Юрьевна, кандидат технических наук, доцент,  
Самохина Виктория Михайловна, кандидат педагогических наук, доцент,  
Технический институт (филиал) Северо-Восточного федерального университета имени М. К. Аммосова в г. Нерюнгри

*Статья посвящена описанию метода латентно-семантического анализа для решения задачи профессионального самоопределения. Рассмотрены наиболее популярные методы автоматической классификации документов и обоснован выбор метода латентно-семантического анализа. Представлены результаты реализации данного подхода в информационной системе поддержки принятия решений по выбору профессии, которые подтверждают целесообразность применения метода латентно-семантического анализа.*

**Ключевые слова:** методы автоматической классификации документов, латентно-семантический анализ, профессиональное самоопределение.

Процесс успешного профессионального самоопределения предполагает получение расширенной информации о профессиях, направлениях подготовки и возможных вакансиях. Для решения данной задачи в статье предлагается метод, который позволит оптимальным образом установить соответствия между компетенциями специалиста и соответствующими направлениями подготовки, тем самым повысив удобство и простоту принятия решения по выбору профессии. Поскольку образовательные стандарты и требования работодателей к квалификации соискателей представляют собой текстовое описание, задача установления соответствий между компетенциями и профессиями может быть решена с помощью программной реализации метода автоматической классификации текстовых документов.

Под классификацией текстовых документов подразумевается процедура присвоения текстам соответствующей тематической категории [6, с. 13]. Задача методов классификации состоит в том, чтобы наилучшим образом выбрать отличительные признаки и сформулировать правила по объединению наиболее похожих данных. Рассмотрим наиболее популярные методы автоматической классификации документов.

1. Иерархические методы предполагают получение древовидной структуры кластеров: первоначально все объекты разбиты на кластеры, объединение наиболее похожих данных продолжается до тех пор, пока все объекты не будут составлять один кластер [8, с. 151]. Для объединения кластеров используются следующие методы: метод ближнего соседа, метод наиболее удаленных соседей, метод Варда, метод попарного среднего. Достоинствами данных методов являются их наглядность, логичное представление информации в виде подчиненной структуры и возможность группировки объектов по максимальному количеству признаков. В качестве недостатков можно отметить малую гибкость и трудоемкость при реализации.

2. Метод квадратичной ошибки (метод  $k$ -средних) [6, с. 23] представляет собой последовательность следующих действий: выделяются группы, расположенные на воз-

можно больших расстояниях друг от друга; каждый документ присваивается тому кластеру, чей центр является наиболее близким документу; перевычисляются центры каждого кластера и, если достигнуто условие остановки, алгоритм завершается. Исходные центры кластеров выбираются зачастую случайным образом. Достоинствами метода являются простота, понятность и быстрота использования. В качестве недостатков можно отметить следующие: большая чувствительность к «шумам» (ненужной, лишней информации об объекте), которые могут исказить среднее значение; медленная работа на больших объемах информации; необходимость определения количества кластеров.

3. Методы теории графов заключаются в построении минимального остовного дерева (MST, minimum spanning tree) [1]. Все документы представляются в виде графа, у которого вершины — документы, а дуги — пары документов, вес которых равен расстоянию между их векторными представлениями. После построения минимального остовного дерева ребра с наибольшими длинами удаляются, в результате чего образуются более маленькие деревья, из узлов которых и генерируются кластеры. Преимуществом метода является большее количество информации об объектах по сравнению с иерархическими методами. Основным недостатком данного подхода является сложность обновления кластеров при добавлении нового объекта и необходимость составления остовного дерева.

4. Методы, основанные на концепции плотности заключаются в обнаружении кластеров на основе предположения о том, что внутри каждого кластера наблюдается характерная плотность объектов, которая значительно выше плотности объектов за его пределами. Так исследуются все документы, а те объекты, которые не вошли ни в один кластер, признаются «шумом». Преимуществами данного метода являются способность нахождения кластеров произвольной формы и обнаружения «шума». Среди недостатков можно отметить следующие: необходимость «вручную» подбирать приемлемые значения плотности объектов; ошибочное определение объектов как «шум» или объединение всех объектов в один огромный кластер.

5. Нейросетевые методы (самоорганизующиеся карты Кохонена, алгоритмы теории адаптивного резонанса) представляют собой алгоритмы с обучением, основанные на свойствах человеческого мозга [7]. Данный подход имеет следующие достоинства: высокую эффективность работы с большими объемами данных; способность воспроизводить сложные соотношения; отсутствие ограничений на функцию распределения и типы данных; сохранение работоспособности при наличии пропусков в обучающей выборке. Однако метод нейронных сетей является довольно трудоемким при обучении, и результат использования методов напрямую зависит от точности и правильности реализации обучения.

6. Методы понижения размерности пространства (латентно-семантический анализ, метод главных компонент) основываются на том, что группируются документы, содержащие семантически близкие термины. Главным достоинством данных методов является попытка преодоления синонимии и омонимии за счет использования только статистической информации о множестве документов. Недостатком данного метода являются высокие вычислительные затраты, что становится критичным при больших объемах исходных данных.

Применительно к решению задачи профессионального самоопределения необходим метод, который позволит устанавливать соответствия между профессиями, направлениями подготовки и вакансиями на рынке труда. Объемы информации о профессиях (должностные обязанности) и направлениях подготовки (компетенции) не слишком огромны, а устанавливать соответствия между этими данными необходимо не так уж часто: только при добавлении новой записи в базу данных системы. Важным фактором является минимальная обработка данных, простота в реализации, решение проблемы синонимии в текстах, поскольку необходимо учитывать близкие по смыслу термины предметной области, поэтому был выбран метод латентно-семантического анализа.

Латентно-семантический анализ основан на идее, что совокупность всех контекстов, в которых встречается и не встречается данное слово, задает множество обоюдных ограничений, которые в значительной степени позволяют определить похожесть лексических значений слов между собой [2]. В качестве исходной информации используется матрица, содержащая частоты использования каждого термина в документах. Используя разложение матрицы по сингулярным выражениям, каждый терм и документ представляются в виде векторов в общем пространстве размерности. Для определения степени схожести текстовых документов удобнее всего использовать косинусную меру, основанную на вычислении значения косинуса между двумя векторами документов.

Совершенствование метода латентно-семантического анализа применительно к решению задач профессионального самоопределения заключается в предварительной обработке компетенций (выделении блоков общекультурных и профессиональных компетенций) и нормали-

зации исходной информации и предполагает выполнение следующих шагов:

1. Предварительная обработка исходной текстовой информации: исключение стоп-слов (предлоги, союзы, частицы).

2. Проведение операции выделения основы слова с помощью алгоритма Портера [3], то есть получение термов.

3. Исключение термов, встречающихся в блоке текста один раз.

4. Составление частотной матрицы  $\mathbf{M}$ , в которой строки являются полученными на предыдущем этапе термами, нулевой столбец представляет собой описание профессии, следующие столбцы — сгруппированные компетенции.

5. Нормализация матрицы  $\mathbf{M}$  для учета важности каждого термина в том или ином блоке компетенций с использованием меры TF-IDF [4], которая позволяет увеличить вес термов с высокой частотой в пределах конкретного блока и с низкой частотой употреблений в других блоках:

$$\bar{m}_{i,j} = \lg \frac{D}{d_i} m_{i,j} / \sum_{i=1}^H m_{i,j}, \quad (1)$$

где  $m_{i,j}$  — элементы полученной нормализованной

матрицы  $\bar{\mathbf{M}}$ ;

$m_{i,j}$  — элементы исходной частотной матрицы  $\mathbf{M}$ , то есть число повторений  $i$ -го термина в соответствующем  $j$ -м блоке компетенций;

$H$  — общее количество термов;

$D$  — количество блоков компетенций;

$d_i$  — количество блоков, в которых встречается  $i$ -й терм.

Реализация сингулярного разложения полученной матрицы  $\bar{\mathbf{M}}$ :

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{V}^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{U}$  — ортогональная матрица;

$\mathbf{W}$  — диагональная матрица, которая содержит сингулярные числа;

$\mathbf{V}$  — ортогональная матрица, на основе которой делается вывод о степени схожести текстовых документов.

Расчет косинусной меры сходства блоков компетенций с нулевым столбцом полученной матрицы  $\mathbf{V}$  на основе трехмерной декомпозиции. В ходе экспериментов использование первых трех строк матрицы позволяет установить максимальное количество соответствий между исходными элементами, а при большей размерности появляются ошибки в установлении сходств между блоками:

$$c_j = \sum_{i=0}^2 v_{i,0} v_{i,j} / \left( \sqrt{\sum_{i=0}^2 v_{i,0}^2} \sqrt{\sum_{i=0}^2 v_{i,j}^2} \right), \quad (3)$$

где  $c_j$  — коэффициенты сходства компетенций с описанием профессии;

$v_{i,0}$  — значения нулевого столбца (описание профессии);

$v_{i,j}$  — значения блоков-компетенций.

Расчет коэффициента соответствия  $K_C$  для компетенций направления подготовки и исходного описания профессии:

$$K_c = \frac{100\%}{D} \sum_{j=1}^D c_j, \quad (4)$$

Максимальное значение коэффициента  $K_C$  определяет направление подготовки, наиболее полно соответствующее должностным требованиям к данной профессии

и лучше всего подходящее для ее освоения. Для увеличения числа альтернативных решений, которые может принять соискатель в процессе профессионального становления, предложено также устанавливать соответствующие профессиями направления подготовки и вакансии, отличающиеся от максимального значения  $K_C$  не более чем на 5%.

Рассмотренный метод был реализован в информационной системе поддержки принятия решений в процессе профессионального самоопределения [5]. Тестирование разработанного подхода позволило определить направления подготовки и вакансии, соответствующие профессиям рынка труда. В таблице представлен фрагмент полученных результатов:

Таблица 1. Результаты реализации метода латентно-семантического анализа в задаче профессионального самоопределения

Профессии	Возможные вакансии	Направления подготовки
Менеджер	Менеджер по персоналу Менеджер по рекламе	380302 Менеджмент
Системный администратор	Математик-программист Информатик-аналитик Системный администратор	010302 Прикладная математика и информатика 020303 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем 090303 Прикладная информатика
Программист	Инженер по автоматизированным системам управления производством Техник-программист	090301 Информатика и вычислительная техника 090302 Информационные системы и технологии 090304 Программная инженерия
Преподаватель	Учитель Педагог-психолог	440302 Психолого-педагогическое образование 440305 Педагогическое образование

Полученные в ходе тестирования результаты в 92% случаев совпадают с данными профессиональных стандартов и единого квалификационного справочника долж-

ностей, что позволяет говорить о целесообразности применения метода латентно-семантического анализа для решения задач профессионального самоопределения.

Литература:

1. B. Chazelle. A Minimum Spanning Tree Algorithm with Inverse-Ackermann Type Complexity. Journal of the ACM. 2000. — 47 (6). — pp. 1028–1047.
2. Landauer, T.K., Foltz P.W., & Laham D. Introduction to Latent Semantic Analysis // Discourse Processes, 1998. URL: <http://lsa.colorado.edu/papers/dp1.LSAintro.pdf>
3. Lewis, D. D., An evaluation of phrasal and clustered representations on a text categorization task. In Proceedings of SIGIR-92, 15th ACM International Conference on Research and Development in Information Retrieval (Kobenhavn, DK, 1992), pp. 37–50.
4. TF-IDF:: A Single-Page Tutorial [Электронный ресурс] // Information Retrieval and Text Mining. URL: <http://www.tfidf.com/> (дата обращения — 21.02.2015).
5. Макарова, М. Ю., Самохина В. М. Информационная система поддержки принятия решений в процессе профессионального самоопределения // Молодой ученый. — 2015. — № 21. — с. 801–805.
6. Пескова, О. В. Методы автоматической классификации текстовых электронных документов // Научно-техническая информация. Сер. 2. — 2006. — № 3. — с. 13–20.



7. Репин, А. И., Смирнов, Н. И., Сабанин, В. Р. Технологии искусственного интеллекта в задачах диагностики информационных подсистем АСУТП // Сборник трудов конференции Control 2005. М.:Издательство МЭИ, 2005. с. 19–25.
8. Чубукова, И. А. Data Mining. Учебное пособие. — М.: Интернет-Университет Информационных технологий; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 382 с.

## О строении одной разрешимой алгебры Лейбница

Мамадалиев Уктамжон Хасанбоевич, старший преподаватель  
Наманганский государственный университет (Узбекистан)

*In this paper we consider Leibniz algebra with a known nilradical. It proved that such an algebra is decomposed as a direct sum of its nilradical and two-dimensional complementary subspace.*

**Определение 1.** Алгебра  $G$  над полем  $F$  называется алгеброй Ли, если для любых  $x, y, z \in G$  выполняется тождества:  
 $[x, x] = 0$  — антикоммутативности,  
 $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$  — Якоби,  
 где  $[, ]$  — умножение в  $G$ .

**Определение 2.** Алгебра  $L$  над полем  $F$  называется алгеброй Лейбница, если для любых  $x, y, z \in L$  выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y]$$

где  $[, ]$  — умножение в  $L$ .

Заметим, что если в  $L$  выполняется тождество  $[x, x] = 0$ , то тождество Лейбница преобразуется в тождество Якоби. Таким образом алгебры Лейбница являются "некоммутативным" аналогом алгебр Ли.

Подалгебру  $H$  алгебры Лейбница  $L$  назовем двусторонним идеалом если  $[L, H] \subseteq L$  и  $[H, L] \subseteq L$ .

Для произвольной алгебры Лейбница  $L$  с помощью соответственных двусторонних идеалов рекурсивным образом определяются нижний, центральный и производные ряды соответственно последовательностями

$$L^1 = L, L^{n+1} = [L^n, L^1], n \geq 1 \text{ и } L^{[1]} = L, L^{[n+1]} = [L^{[n]}, L^{[1]}], n \geq 1.$$

**Определение 3.** Алгебра Лейбница  $L$  называется разрешимой, если существует  $m \in \mathbb{N}$  такое, что  $L^{[m]} = 0$ . Натуральное число  $m$  называется индексом разрешимости алгебры  $L$ , если  $L^{[m-1]} \neq 0$  и  $L^{[m]} = 0$ .

Алгебра Лейбница  $L$  называется нильпотентной, если существует  $s \in \mathbb{N}$  такое, что  $L^s = 0$ . Минимальное число  $s$ , обладающее таким свойством называется индексом нильпотентности (нильиндексом) алгебры  $L$ , т. е.  $L^{s-1} \neq 0$  и  $L^s = 0$ .

**Замечание.** Нетрудно видеть, что индекс нильпотентности произвольной  $n$ -мерной нильпотентной алгебры не превосходит числа  $n + 1$ .

**Определение 4.** Максимальный нильпотентный идеал алгебры Лейбница называется нильрадикалом этой алгебры.

**Определение 5.** Линейное преобразование  $d$  алгебры Лейбница  $L$  называется дифференцированием, если  $d([x, y]) = [d(x), y] + [x, d(y)]$

для любых  $x, y \in L$ .

**Определение 6.** [8]. Пусть  $d_1, d_2, \dots, d_n$  дифференцирования алгебры Лейбница  $L$ . Дифференцирования  $d_1, d_2, \dots, d_n$  называются ниль-независимыми если

$$\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 \dots + \alpha_n d_n$$

не является нильпотентной для всех скаляров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ .

Другими словами, если для всех скаляров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in F$ , существует натуральное число  $k$  такое, что если  $(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2 \dots + \alpha_n d_n)^k = 0$ , то  $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ .

Пусть  $R$  разрешимая алгебра Лейбница. Тогда она может быть представлена в виде разложения  $R = N \oplus Q$ , где  $N$  есть нильрадикал, а  $Q$  — векторное пространство-дополнение [5].

**Теорема 1.** Пусть  $R$  алгебра Лейбница и  $N$  её нильрадикал. Тогда размерность векторного пространства-дополнения к  $N$  не больше чем максимального количества ниль-независимых дифференцирований  $N$ . [5]

Изучения алгебр Лейбница со структурной точки зрения является одной из актуальных задач теории алгебр Ли и алгебр Лейбница.

В статье [4] приводятся и изучаются некоторые свойства алгебр со следующими структурными строениями

$$M: \begin{cases} [e_1, e_1] = e_n, \\ [e_{n-1}, e_1] = e_2, \\ [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

В настоящей статье изучаем строение алгебр Лейбница имеющие такие алгебры в качестве нильрадикала.

В следующем предложении описаны пространства дифференцирований алгебр Лейбница  $M$ .

**Теорема 2.** Всякое дифференцирование алгебры Лейбница  $M$  имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{n-3} & \alpha_{n-2} & 0 & \alpha_n \\ 0 & \alpha_1 + \gamma_{n-1} & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \dots & \beta_{n-3} & \beta_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha_1 + \gamma_{n-1} & \beta_3 & \beta_4 & \dots & \beta_{n-4} & \beta_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha_1 + \gamma_{n-1} & \beta_3 & \dots & \beta_{n-5} & \beta_{n-4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\alpha_1 + \gamma_{n-1} & \dots & \beta_{n-6} & \beta_{n-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n-7} & \beta_{n-6} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-3)\alpha_1 + \gamma_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \dots & \beta_{n-2} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-1} & \gamma_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-3} & 0 & 2\alpha_1 \end{pmatrix}$$

**Доказательство.** Зададим дифференцирование в алгебре  $M$  в виде:

$$d(e_1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad d(e_2) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i, \quad d(e_{n-1}) = \sum_{i=1}^n \gamma_i e_i$$

Рассмотрим свойство дифференцирования:

$$1) \quad d([e_1, e_1]) = [d(e_1), e_1] + [e_1, d(e_1)]$$

$$d(e_n) = \alpha_{n-1} e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \alpha_{i-1} e_i + 2\alpha_1 e_n$$

$$2) \quad d([e_1, e_2]) = [d(e_1), e_2] + [e_1, d(e_2)]$$

$$0 = 0 + \left[ e_1, \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \right], \text{ отсюда } \beta_1 = 0, \text{ следовательно } d(e_2) = \sum_{i=2}^n \beta_i e_i$$

$$3) \quad d([e_2, e_1]) = [d(e_2), e_1] + [e_2, d(e_1)]$$

$$d(e_3) = \left[ \sum_{i=2}^n \beta_i e_i, e_1 \right] + \left[ e_2, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right]$$

Отсюда  $d(e_3) = (\alpha_1 + \beta_2)e_3 + \sum_{i=4}^{n-2} \beta_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_2$

4)  $d([e_3, e_1]) = [d(e_3), e_1] + [e_3, d(e_1)]$

$$d(e_4) = (2\alpha_1 + \beta_2)e_4 + \sum_{i=5}^{n-2} \beta_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_3$$

5)  $d([e_4, e_1]) = [d(e_4), e_1] + [e_4, d(e_1)]$

$$d(e_5) = (3\alpha_1 + \beta_2)e_5 + \sum_{i=5}^{n-2} \beta_{i-1}e_i + \beta_{n-1}e_4$$

По математической индукции нетрудно доказать, что имеет место

$$d(e_i) = ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} \beta_{j+2-i}e_j + \beta_{n-1}e_{i-1}, \quad 3 \leq i \leq n-3 \quad (1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} d(e_i) &= d([e_{i-1}, e_1]) = [d(e_{i-1}), e_1] + [e_{i-1}, d(e_1)] = \\ &= \left[ ((i-3)\alpha_1 + \beta_2)e_{i-1} + \sum_{j=i}^{n-2} \beta_{j+3-i}e_j + \beta_{n-1}e_{i-2}, e_1 \right] + \left[ e_{i-1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right] = \\ &= ((i-3)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} \beta_{j+2-i}e_j + \beta_{n-1}e_{i-1} + \alpha_i e_i = \\ &= ((i-2)\alpha_1 + \beta_2)e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} \beta_{j+2-i}e_j + \beta_{n-1}e_{i-1} \end{aligned}$$

6)  $d([e_{n-3}, e_1]) = [d(e_{n-3}), e_1] + [e_{n-3}, d(e_1)]$ . Отсюда имеем

$$d(e_{n-2}) = ((n-4)\alpha_1 + \beta_2)e_{n-2} + \beta_{n-1}e_{n-3}$$

7)  $d([e_{n-2}, e_1]) = [d(e_{n-2}), e_1] + [e_{n-2}, d(e_1)]$  Отсюда  $0 = \beta_{n-1}e_{n-2}$ , следовательно

$$\beta_{n-1} = 0, \quad d(e_2) = \sum_{i=2}^{n-2} \beta_i e_i + \beta_n e_n$$

8)  $d([e_{n-1}, e_1]) = [d(e_{n-1}), e_1] + [e_{n-1}, d(e_1)]$

$$d(e_2) = \left[ \left( \sum_{i=1}^4 \gamma_i e_i \right), e_1 \right] + \left[ e_{n-1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right]$$

$$\sum_{i=2}^{n-2} \beta_i e_i + \beta_n e_n = (\alpha_1 + \gamma_{n-1})e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \gamma_{i-1} e_i + \gamma_1 e_n \text{ отсюда следует}$$

$$\beta_2 = \alpha_1 + \gamma_{n-1}, \quad \gamma_1 = \beta_n, \quad \gamma_i = \beta_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-3. \text{ Следовательно}$$

$$d(e_2) = (\alpha_1 + \gamma_{n-1})e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_i e_i + \beta_n e_n, \quad d(e_{n-1}) = \beta_n e_1 + \sum_{i=2}^{n-3} \beta_{i+1} e_i + \gamma_{n-2} e_{n-2} + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \gamma_n e_n$$

9)  $d([e_n, e_1]) = [d(e_n), e_1] + [e_n, d(e_1)]$ ,  $0 = \left[ \left( \alpha_{n-1} e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \alpha_{i-1} e_i + 2\alpha_1 e_n \right), e_1 \right]$

$$0 = \alpha_{n-1}e_3 + \sum_{i=4}^{n-2} \alpha_{i-2}e_i \text{ отсюда } \alpha_{n-1} = 0, \alpha_i = 0 \quad 2 \leq i \leq n-4$$

Следовательно  $d(e_1) = \alpha_1e_1 + \alpha_{n-3}e_{n-3} + \alpha_{n-2}e_{n-2} + \alpha_n e_n$

$$10) d([e_1, e_{n-1}]) = [d(e_1), e_{n-1}] + [e_1, d(e_{n-1})]$$

$$0 = 0 + \left[ e_1, \beta_n e_1 + \sum_{i=2}^{n-3} \beta_{i+1} e_i + \gamma_{n-2} e_{n-2} + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \gamma_n e_n \right] 0 = \beta_n e_n \cdot \beta_n = 0, \gamma_1 = \beta_n = 0$$

Итак,  $d(e_1) = \alpha_1e_1 + \alpha_{n-3}e_{n-3} + \alpha_{n-2}e_{n-2} + \alpha_n e_n$ ,

$$d(e_2) = (\alpha_1 + \gamma_{n-1})e_2 + \sum_{i=3}^{n-2} \beta_i e_i, \quad d(e_i) = ((i-1)\alpha_1 + \gamma_{n-1})e_i + \sum_{j=i+1}^{n-2} \beta_{j+2-i} e_j, \quad 3 \leq i \leq n-3,$$

$$d(e_{n-2}) = ((n-3)\alpha_1 + \gamma_{n-1})e_{n-2}, \quad d(e_{n-1}) = \sum_{i=2}^{n-3} \beta_{i+1} e_i + \gamma_{n-2} e_{n-2} + \gamma_{n-1} e_{n-1} + \gamma_n e_n,$$

$$d(e_n) = \alpha_{n-3}e_{n-2} + 2\alpha_1e_n$$

Теорема доказана.

Отсюда нетрудно видеть, что число нильнезависимых дифференцирований равно двум и с учетом теоремы 1 приходим к выводу, что имеет место

**Теорема 3.** Любая разрешимая алгебра Лейбница  $R$  имеющая алгебру  $M$  качестве нильрадикала может быть представлена в виде разложения  $R = M \oplus Q$ , где  $Q$  — векторное пространство-дополнение к  $M$  имеющая размерность равная двум.

Литература:

1. Аюпов, Ш. А., Омиров Б. А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница // Сиб. матем. ж. 2001. Т. 42. № 1. с. 18–29.
2. S. A. Ayupov, B. A. Omirov, On Leibniz algebras, in: Algebra and operator theory (Tashkent, 1997), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, pp. 1–12.
3. D. W. Barnes, On Levi's theorem for Leibniz algebras, arXiv:1109.1060v1.
4. L. M. Camacho, E. M. Canete, J. R. Gomez, B. A. Omirov, Quasi-filiform Leibniz Algebras of maximum length. arXiv:1009.2148v1.
5. J. M. Casas, M. Ladra, B. A. Omirov, I. A. Karimjanov, Classification of solvable Leibniz Algebras with null-filiform Nilradical. Linear and Multilinear Algebra, 2013 vol. 61, N6 p 758–774.
6. J.-L. Loday, une version non commutative des algebras de Lie: les algebras de Leibniz, Enseign. Math. (2) 39 (3–4) (1993) 269–293.
7. A. I. Malcev, Solvable Lie algebras, Amer. Math. Soc. Translation 1950 (27) (1950).
8. G. M. Mubarakzjanov, On solvable Lie algebras, Izv. Vysš. Učehn. Zaved. Matematika 1963 (no 1 (32)) (1963) 114–123.

## О жесткости одной разрешимой алгебры Лейбница с филиформным нильрадикалом

Мамадалиев Уктамжон Хасанбоевич, старший преподаватель  
Наманганский государственный университет (Узбекистан)

Активные исследования алгебр Ли привели к возникновению нового алгебраического объекта — алгебр Лейбница. Алгебра Лейбница является обобщением алгебры Ли, для которого уникальное свойство алгебры Ли, а именно свойство оператора правого умножения быть дифференцированием, сохраняется. Понятие алгебры Лейбница было введено Лоде [4] как не антисимметрическое обобщение алгебр Ли. В течение последних 20 лет активно изучалась теория алгебр Лейбница, и многие результаты из теории алгебр Ли были продолжены до алгебр Лейбница. Из тождества Лейбница вытекает тот факт, что алгебры Лейбница заданной размерности образуют алгебраическое многообразие. Так как любое алгебраическое многообразие представляется в виде конечного объединения конечного числа неприводимых компонент, а они в свою очередь полностью описываются открытыми множествами, то важное значение при описании многообразий алгебр состоит в описании алгебр, у которых орбиты под действием линейной группы являются открытыми множествами. Алгебры с такими орбитами называются жесткими алгебрами.

Данная работа продолжает цикл изучения работ посвященной свойствам алгебр Лейбница начатой в работе [5]. В работе приводится пример такой алгебры изоморфной приведенной в работе [5].

**Определение 1.** Алгебра  $L$  над полем  $F$  называется алгеброй Лейбница, если для любых элементов  $x, y, z \in L$  выполняется тождество Лейбница:

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] - [[x, z], y],$$

Приведем определение групп когомологий для алгебр Лейбница. Для алгебры Лейбница  $L$  и ее представления  $M$  введем обозначения:  $C^n(L, M) := \text{Hom}(L^{\otimes n}, M)$ , при  $n \geq 0$  (при  $n < 0$ ,  $C^n(L, M)$  положим равным нулю).  $C^*(L, M) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C^n(L, M)$ . Элементы множества  $C^*(L, M)$  будем называть коцепями  $L$  со значением в  $M$ , а элементы  $C^n(L, M)$  коцепями степени  $n$ .

Пусть  $d^n: C^n(L, M) \rightarrow C^{n+1}(L, M)$  гомоморфизм, определенный следующим образом:

$$(d^n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) := [x_1, f(x_2, \dots, x_{n+1})] + \sum_{i=2}^{n+1} (-1)^i [f(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}), x_i] + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} (-1)^{j+1} (f(x_1, \dots, x_{i-1}, [x_i, x_j], x_{i+1}, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{n+1})),$$

где  $f \in C^n(L, M)$ ,  $x_i \in L$  и символ  $\widehat{x}$  означает отсутствие элемента  $x$ .

Элементы ядра  $d^n$  (обозначим  $\text{Ker} d^n := ZL^n(L, M)$ ) назовём  $n$ -коциклами, а элементы образа  $d^{n+1}$  (обозначим  $\text{Im} d^{n+1} := BL^{n+1}(L, M)$ ) —  $n$ -кограницами. Очевидно, что  $BL^n(L, M) \subseteq ZL^n(L, M)$ . Фактор пространство  $HL^n(L, M) := ZL^n(L, M) / BL^n(L, M)$  назовём пространством когомологий алгебры  $L$  степени  $n$  со значениями в  $M$ .

Для произвольной алгебры Лейбница  $L$  определим последовательности

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L^1], k \geq 1.$$

$$L^{[1]} = L, L^{[k+1]} = [L^{[k]}, L^{[k]}], k \geq 1.$$

**Определение 2.** Алгебра Лейбница  $L$  называется нильпотентной (соответственно разрешимой), если существует  $s \in \mathbb{N}$  такое, что  $L^s = 0$  ( $L^{[s]} = 0$ ).

**Определение 3.** Алгебра Лейбница  $L$  размерности  $n$  называется филиформной, если  $\dim L^i = n - i$ ,  $2 \leq i \leq n$ .

Напомним, что в каждой размерности с точностью до изоморфизма существует одна естественным образом градуированная не разложимая и не Лиевая филиформная алгебра Лейбница. Такая алгебра обозначается через  $F_n^1$  и в нём существуют базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , такое, что умножение в этом базисе имеет вид [1]:

$$F_n^1 : [e_i, e_1] = e_3, [e_i, e_1] = e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

В работе [3] получено описание разрешимых алгебр Лейбница с нильрадикалом  $F_n^1$ .

**Теорема 1** [3]. Пусть  $R_1$  — разрешимая алгебра Лейбница с нильрадикалом  $F_n^1$ , тогда  $\dim R_1 = n + 1$  и существует базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, x\}$  такой, что умножение в алгебре  $R_1$  имеет вид:

$$R_1 : \begin{cases} [e_i, e_1] = e_{i+1}, & 2 \leq i \leq n-1, \\ [x, e_1] = -e_1 - e_2, \\ [e_1, x] = e_1, \\ [e_i, x] = (i-1)e_i, & 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Напомним, что дифференцированием  $D$  алгебры  $L$  называется линейное преобразование, удовлетворяющее условию:

$$D(xy) = D(x)y + xD(y), \forall x, y \in L.$$

В следующей предложении описаны пространства дифференцирований разрешимых алгебр Лейбница  $R_1$ .

**Предложение 1.** Всякое дифференцирование алгебры  $R_1$ , имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a_1 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-2)a_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & (n-1)a_1 & 0 \\ -b_3 & -b_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Из определения множества  $BL^2(R_1, R_1)$  и Предложения 1 нетрудно заключить, что  $\dim BL^2(R_1, R_1) = (n+1)^2 - 2$ .

В следующей теореме мы приводим результат, в котором подсчитана размерность пространства  $ZL^2(R_1, R_1)$ .

**Теорема 2.**  $\dim ZL^2(R_1, R_1) = (n+1)^2 - 2$ .

Из определения второй группы когомологий  $HL^2(R_1, R_1) = ZL^2(R_1, R_1) / BL^2(R_1, R_1)$  мы имеем, что  $HL^2(R_1, R_1) = 0$ .

**Теорема 3.** Алгебра  $R_1$  жесткая в многообразия  $n+1$  — мерных алгебр Лейбница.

Литература:

1. Аюпов, Ш. А. Омиров Б. А. О некоторых классах нильпотентных алгебр Лейбница. Сиб. Мат. Журнал, 2001. Т. 42. с. 18–29.
2. Balavoine, D. Déformations et rigidité géométrique des algebras de Leibniz. Comm. in Algebra. — 1996. — Vol. 24. — P. 1017–1034.
3. Casas, J. M., Ladra M., Omirov B. A. and Karimjanov I. A., Classification of solvable Leibniz algebras with naturally graded filiform nilradical. Linear Algebra Appl., 438 (7), p 2973–3000, 2013.
4. Loday J.-L. Une version non commutative des algebras de Lie: les algebras de Leibniz. Enseign. Math. — 1993. — Vol. 39. — P. 269–293.
5. Мамадалиев, У.Х. Об одной жесткой разрешимой алгебре Лейбница. УзМЖ, 2013, № 3, — с70–78.

## Об одной задаче определения правой части линейного дифференциального уравнения четвертого порядка

Мамытов Айтбай Омонович, соискатель, старший преподаватель  
Ошский государственный университет (Кыргызстан)

*В работе исследована обратная задача определения правой части для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка с переопределением во внутренних точках. Сначала с помощью функции Грина исходная прямая задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь методами обратной теории задач, доказывается существование и единственность решения рассматриваемой обратной задачи.*

**Ключевые слова:** обратная задача, дифференциального уравнения с частными производными, функция Грина.

К настоящему времени обратные задачи превратились в бурно развивающуюся область знаний, проникающую почти во все сферы математики, включая алгебру, анализ, дифференциальные уравнения, математическую физику и др. С другой стороны, теория обратных задач широко применяется для решения практических задач почти во всех областях науки, в частности, в физике, медицине, экологии, экономике.

На данный момент в связи с проблемами геофизики, океанологии, физики атмосферы, использованием криогенных жидкостей в технике и ряда других проблем значительно возрос интерес к изучению динамики неоднородных, и в частности, стратифицированных жидкостей, которые приводят к начально-краевым задачам для уравнений с частными производными четвертого порядка.

В работе рассматривается обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка.

**Постановка задачи.** Требуется найти функции  $f(t)$  и  $u(t, x)$  в области  $\Omega_T = \{(x, t) | 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ , удовлетворяющие уравнению

$$u_{tt} = \alpha u_{xxtt} + \beta u_{xx} + \sum_{i=1}^n f_i(t) h_i(t, x) + f_1(t, x), \tag{1}$$

заданным начальным и краевым условиям,

$$u(0, x) = \varphi(x), u'_t(0, x) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{2}$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3}$$

и известно решение  $u(t, x)$  в точке  $x_i \in (0, 1)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$u(t, x_i) = g_i(t), t \in [0, T], \tag{4}$$

где  $0 < T$  — заданная постоянная,  $\alpha, \beta$  — известные постоянные.

Предположим выполнение следующих условий:

$$\begin{aligned} h_i(t, x) f_1(t, x) \in C([0, T] \times [0, 1]), \varphi(x), \psi(x) \in C^{(2)}[0, 1], \\ g_i(t) \in C^{(2)}[0, T], \alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0, \frac{\beta}{\alpha} < 0, \alpha > 0, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{5}$$

**Лемма 1.** Если  $\frac{\beta}{\alpha} < 0, \alpha \neq 0, \alpha, \beta \in R$ , то резольвента  $R(t, s)$  ядра  $K(t, s) = -\frac{\beta}{\alpha}(t - s)$ ,

$(t, s) \in G = \{(t, s) : 0 \leq s \leq t \leq T\}$  представима в виде

$$R(t, s) = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} sh \left\{ \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(t - s) \right\}, (t, s) \in G. \tag{6}$$

**Доказательство.** Для доказательства покажем, что

$$R(t, s) = \int_s^t K(t, \tau)R(\tau, s)d\tau + K(t, s), (t, s) \in G.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_s^t K(t, \tau)R(\tau, s)d\tau + K(t, s) &= -\int_s^t \frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}sh\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau-s)\right\}d\tau - \frac{\beta}{\alpha}(t-s) = \\ &= -\frac{\beta}{\alpha}(t-\tau)ch\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau-s)\right\}\Big|_{\tau=s}^{\tau=t} + \int_s^t \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)ch\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau-s)\right\}d\tau - \frac{\beta}{\alpha}(t-s) = \\ &= -\frac{\beta}{\alpha}(t-s)ch0 - \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}sh\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(\tau-s)\right\}d\tau\Big|_{\tau=s}^{\tau=t} - \frac{\beta}{\alpha}(t-s) = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)}sh\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(t-s)\right\} = \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}sh\left\{\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(t-s)\right\}d\tau = R(t, s). \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** Если  $\alpha > 0$ , то функция Грина краевой задачи

$$L[v] \equiv v_{xx} - \frac{1}{\alpha}v = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad f(x) \in C[0, 1], \quad v(0) = v(1) = 0$$

записывается в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left( -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} \right] + \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right) e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \\ + \left( -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] - \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, \quad 0 \leq x \leq \xi; \\ \left( -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} \right] - \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right) e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \\ + \left( -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] + \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right) e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, \quad 0 \leq \xi \leq x. \end{cases} \tag{7}$$

**Доказательство.** Функцию Грина  $G(x, \xi)$  будем искать в виде

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (a_1 + b_1)e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + (a_2 + b_2)e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, \quad 0 \leq x \leq \xi; \\ (a_1 - b_1)e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + (a_2 - b_2)e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, \quad 0 \leq \xi \leq x, \end{cases} \tag{8}$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2$  — пока неизвестные функции. Из определения функции Грина  $G(x, \xi)$  имеем:

$$G(0, \xi) = 0 \Leftrightarrow (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0,$$



$$G(1, \xi) = 0 \Leftrightarrow (a_1 - b_1)e^{-\frac{1}{\sqrt{a}}} + (a_2 - b_2)e^{\frac{1}{\sqrt{a}}} = 0,$$

$$G(+s, s) = G(-\xi, \xi) \Leftrightarrow (a_1 + b_1)e^{-\frac{\xi}{\sqrt{a}}} + (a_2 + b_2)e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}} = (a_1 - b_1)e^{-\frac{\xi}{\sqrt{a}}} + (a_2 - b_2)e^{\frac{\xi}{\sqrt{a}}},$$

$$G'_x(\xi+, \xi) - G'_x(\xi-, \xi) = 1.$$

Продифференцируем (8) по  $x$ :

$$G'_x(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_1 + b_1)e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_2 + b_2)e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, & 0 \leq x \leq \xi; \\ -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_1 - b_1)e^{-\frac{x}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_2 + b_2)e^{\frac{x}{\sqrt{\alpha}}}, & 0 \leq \xi \leq x, \end{cases}$$

$$\left[ -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_1 - b_1)e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_2 - b_2)e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] - \left[ -\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_1 + b_1)e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}(a_2 + b_2)e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right] = 1 \text{ Тогда}$$

$$\begin{cases} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0, \\ (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)e^{\frac{2}{\sqrt{\alpha}}} = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$b_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}, \quad b_2 = \frac{\sqrt{\alpha}}{4} e^{-\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}}, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ e^{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} - sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} \right], \\ a_2 = -\frac{\sqrt{\alpha}}{4sh\frac{1}{\sqrt{\alpha}}} \left[ sh\frac{1-\xi}{\sqrt{\alpha}} - e^{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}sh\frac{\xi}{\sqrt{\alpha}}} \right]. \end{cases} \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), получим (7). Лемма 2 доказана.

Для решения обратной задачи (1)-(4) введем обозначение

$$v(t, x) = u_{tt}(t, x). \tag{11}$$

Тогда имеют место равенства

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \int_0^t v(s, x) ds + \psi(x), \\ u(t, x) = \int_0^t (t-s)v(s, x) ds + \psi(x)t + \varphi(x). \end{cases} \tag{12}$$

Учитывая (11) и (12), из (1) имеем

$$v_{xx} = -\frac{\beta}{\alpha} \int_0^t (t-s)v_{xx}(s, x) ds + \frac{1}{\alpha} v(t, x) - \frac{1}{\alpha} \psi''(x)t - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n f_i(t)h_i(t, x) + \frac{1}{\alpha} f_1(t, x). \tag{13}$$

Применяя резольвенту (5) ядра  $K(t, s) = -\frac{\beta}{\alpha}(t - s)$ ,  $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ , из (12) получим

$$v_{xx} - \frac{1}{\alpha}v(t, x) = -\frac{1}{\alpha}\psi''(x)t - \frac{1}{\alpha}\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n f_i(t)h_i(t, x) - \frac{1}{\alpha}f_1(t, x) + \int_0^t \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}(t-s)\right) \times \left\{ \frac{1}{\alpha}v(s, x) - \frac{1}{\alpha}\psi''(x)s - \frac{1}{\alpha}\varphi''(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n f_i(s)h_i(s, x) - \frac{1}{\alpha}f_1(s, x) \right\} ds. \tag{14}$$

Учитывая (3), из (11) имеем

$$v(t, 0) = v(t, 1) = 0. \tag{15}$$

Используя функцию Грина  $G(x, \xi)$  определенную по формуле (7) к краевой задаче (14)-(15), получим

$$v(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left\{ -\frac{1}{\alpha}\psi''(\xi)t - \frac{1}{\alpha}\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n f_i(t)h_i(t, \xi) - \frac{1}{\alpha}f_1(t, \xi) + \int_0^t R(t, s) \left[ \frac{1}{\alpha}v(s, \xi) - \frac{1}{\alpha}\psi''(\xi)s - \frac{1}{\alpha}\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^n f_i(s)h_i(s, \xi) - \frac{1}{\alpha}f_1(s, \xi) \right] ds \right\} d\xi. \tag{16}$$

Введя обозначение для известных функций

$$F(t, x) = \int_0^1 G(x, \xi) \left\{ -\frac{1}{\alpha}\psi''(\xi)t - \frac{1}{\alpha}\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}f_1(t, \xi) + \int_0^t R(t, s) \left[ -\frac{1}{\alpha}\psi''(\xi)s - \frac{1}{\alpha}\varphi''(\xi) - \frac{1}{\alpha}f_1(s, \xi) \right] ds \right\} d\xi \tag{17}$$

уравнение (16) перепишем в виде

$$v(t, x) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha} \left[ \int_0^1 G(x, \xi) h_i(t, \xi) d\xi \right] f_i(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^t R(t, s) \left[ \int_0^1 G(x, \xi) h_i(s, \xi) d\xi \right] f_i(s) ds + F(t, x). \tag{18}$$

Полагая  $x = x_i$  и учитывая (4), (11), из (18) имеем

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \left[ \int_0^1 G(x_i, \xi) h_i(t, \xi) d\xi \right] f_i(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^t \int_0^1 G(x_i, \xi) R(t, s) v(s, \xi) d\xi ds - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \int_0^t R(t, s) \left[ \int_0^1 G(x_i, \xi) h_i(s, \xi) d\xi \right] f_i(s) ds + F(t, x_i) - g''(t), \tag{19}$$

$t \in [0, T], i = 1, 2, \dots, n.$

Пусть

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \neq 0, \forall t \in [0, T], \text{ где } a_{ij}(t) = \frac{1}{\alpha} \int_0^1 G(x_i, \xi) h_i(t, \xi) d\xi, i, j = 1, 2, \dots, n \tag{20}$$

Таким образом, для определения  $f_i(t)$  и  $v(t,x), i=1,2,\dots,n$ , мы получили систему линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода (18) и (19). Тем самым доказана следующая

**Теорема.** Пусть выполняются условия (5) и (20). Тогда обратная задача (1)-(4) имеет единственное решение  $\{v(t,x), f(t), f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  из пространства  $C^{2,2}([0, T] \times [0, 1]) \times C_n[0, T]$ , где  $C_n[0, T]$  — пространство  $n$ -мерных вектор-функций с элементами из  $C[0, T]$ .

Литература:

1. Asanov, A., Atamanov E. R. Nonclassical and Inverse Problems for Pseudoparabolic Equations. — Netherlands: VSP, Utrecht, 1997. — 152 p.
2. Асанов, А., Атаманов Э. Р. Обратная задача для операторного интегро-дифференциального псевдопараболического уравнения. — Сиб. матем. журнал. — 1995. Т. 36. № 4. — с. 752–762.
3. Бухгейм, А. Л. Уравнения Вольтерра и обратные задачи. — Новосибирск: Наука, 1983. — 207 с.
4. Кабанихин, С. И. Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. — 457 с.
5. Лаврентьев, М. М. О некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
6. Матанова, К. Б. Обратная задача для дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка // Вестник ОшГУ. Труды международной научно-теоретической конференции «Проблемы образования, науки и культуры в начале 21 века». 2001. Вып. 4. — с. 94–100.

## Структура разбиений прямоугольников на Т-тетрамино

Петрова Анна Андреевна, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Очевидно, что любой прямоугольник вида  $4m \times 4n$  разбивается на Т-тетрамино (см. рис. 1). Пример такого разбиения при  $m=2, n=3$  представлен на рис. 2.

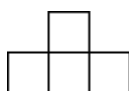


Рис. 1. Т-тетрамино

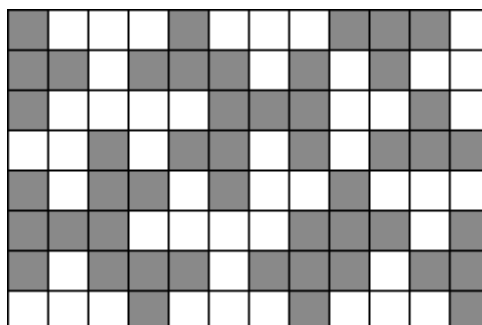


Рис. 2. Разбиение  $8 \times 12$  на Т-тетрамино

Кроме того, D. W. Walkup доказал, что только прямоугольники вида  $4m \times 4n$  разбиваются на Т-тетрамино. (см. [1])

Изучим структуру разбиений таких прямоугольников на Т-тетрамино.

**Определение.** Назовем сеткой  $m \times n$  плоский граф  $G$ , множество вершин которого равно  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , а ребрами соединены те вершины  $(i, j), (i', j')$ , у которых  $|i - i'| + |j - j'| = 1$ . На рисунке 3 приведен пример сетки  $4 \times 6$ . На рис. 4 — один из возможных способов разбиения сетки на простые циклы.

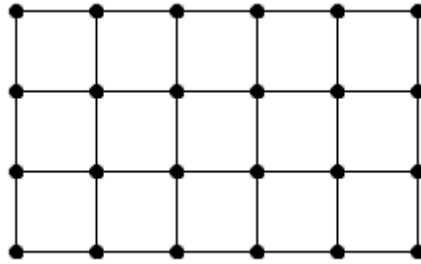


Рис. 3. Сетка 4x6

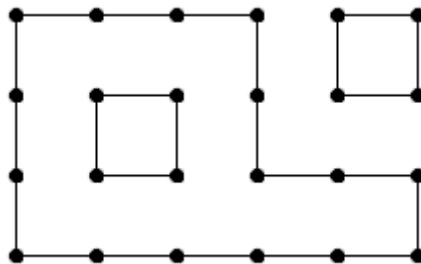


Рис. 4. Разбиение сетки 4x6 на простые циклы

Сопоставим разбиения прямоугольников  $4m \times 4n$  на Т-тетрамино и разбиения сеток  $2m \times 2n$  на простые циклы.

Разобьём прямоугольник  $4m \times 4n$  на квадраты  $2 \times 2$ . На центрах этих квадратов построим сетку, размер которой будет  $2m \times 2n$  со стороной 2 клетки. Сетка прямоугольника с  $m=2, n=3$  (см. рис. 2) изображена на рис. 3. Заметим, что разбиение этой сетки на рис. 4 можно соотнести с разбиением прямоугольника  $8 \times 12$  на Т-тетрамино на рис. 2. Наглядное сопоставление приведено на рис. 5.

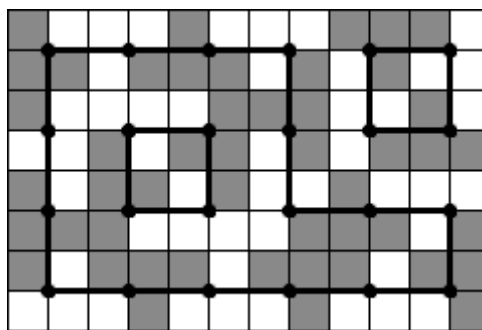


Рис. 5. Сопоставление разбиения прямоугольника  $8 \times 12$  на Т-тетрамино и разбиения сетки  $4 \times 6$  на простые циклы

**Определение.** Цикл разбивает плоскость на две области: конечную и бесконечную. Назовём конечную — *внутренней областью*, а бесконечную — *внешней областью* цикла.

Направим одно ребро цикла в любую сторону. Направление остальных рёбер определим по следующему принципу: два соседних ребра направим в одну сторону (то есть из их общей вершины одно ребро выходит, другое входит). Тем самым, если идти по направлению цикла, то можно вернуться в ту же вершину.

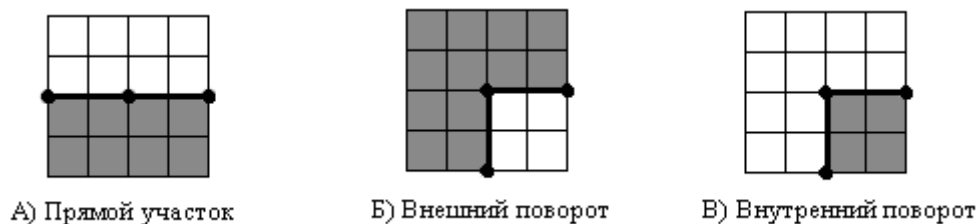


Рис. 6.

**Определение.** Рассмотрим два последовательных ребра цикла. Построим квадрат 4 x 4 клетки так, чтобы в его центре была общая вершина этих рёбер (считаем, что ребро цикла имеет длину 2 клетки). Далее рассмотрим внутренние и внешние клетки цикла, принадлежащие квадрату. Если отношение внутренних к внешним 1:3, назовём совокупность этих двух рёбер *внешним поворотом*, если 3:1 — *внутренним поворотом*, если 1:1 — *прямым участком*. Объединение прямых участков будем так же считать прямым участком. *Вершиной поворота* назовем общую вершину рёбер поворота. Иллюстрация к определениям приведена на рис. 6, где серым обозначена внутренняя область цикла.

**Определение.** Назовём *двуповоротом* два поворота, вершины которых соединены прямым участком, который в свою очередь назовём *прямым участком двуповорота*, а количество рёбер, принадлежащих прямому участку — *длиной двуповорота*. Выделим два вида двуповоротов: *косой*, один поворот которого внешний, другой внутренний, и *прямой*, у которого либо оба внутренних, либо внешних поворота. Косой двуповорот назовем *хорошим* (здесь и далее — по отношению к T-тетрамино), если его длина кратна 2. Прямой двуповорот назовем *хорошим*, если его длина не кратна 2. Назовём цикл *хорошим*, если все двуповороты в нём хорошие. На рис. 7 А) показан хороший прямой двуповорот длины 3, на рис. 7 Б) — хороший косой двуповорот длины 2.

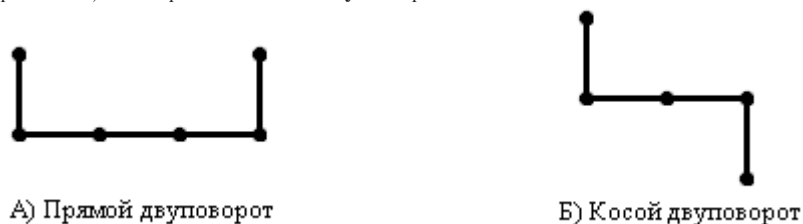


Рис. 7.

**Определение.** Назовём *трубой* множество клеток, хотя бы одна вершина которых принадлежит циклу, а *границей трубы* — множество всех границ клеток трубы, которые не касаются цикла. *Граничная клетка* трубы — клетка, одна из границ которой принадлежит границе трубы. *Доминошкой двуповорота* назовём множество из двух соседних граничных клеток, общая граница которых принадлежит прямому участку двуповорота. *Прямым участком трубы* назовём объединение доминошек одного из двуповоротов. *Последняя доминошка двуповорота* — доминошка двуповорота, которая является последней доминошкой двуповорота по направлению цикла. На рис. 8 приведен пример трубы, на котором жирным выделена её граница, а серым обозначены прямые участки её двуповоротов.

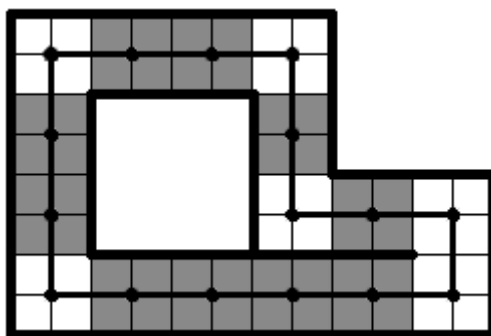


Рис. 8.

Будем говорить, что двуповорот можно разбить на Т-тетрамино, если существует цикл, соержащий данный двуповорот, труба которого разбивается на Т-тетрамино.

**Определение.** *Хорошей трубой* назовём трубу, образованную хорошим циклом. Наконец, последнюю доминошку двуповорота будем называть *хорошей*, когда данный двуповорот можно разбить на Т-тетрамино.

**Замечание 1.** Рассмотрим разбиение прямого участка трубы на Т-тетрамино. Заметим, что доминошки можно разбить на 4 группы, в которых идентичным образом будут состыковываться Т-тетрамино. А каждая четвертая доминошка трубы будет принадлежать одной группе. (см. рис. 9)



Рис. 9. Доминошки

Расположим на плоскости поворот так, как показано на рис. 10 (стрелочкой обозначено направление трубы). Рассмотрим Т-тетрамино, касающееся тремя клетками верхней горизонтально расположенной границы трубы и находящейся ближе всех к левой вертикальной границе (на рис. 10 обозначено серым цветом). Заметим, что существует два варианта того, как Т-тетрамино может «входить в поворот»: первый — когда выбранное нами Т-тетрамино касается левой вертикальной границы (см. рис. 10 А); второй — когда не касается (см. рис. 10 Б). Будем говорить «двуповорот начинается первым (вторым) способом».



Рис. 10. Способы начала двуповорота

**Теорема 1.** Двуповорот хороший тогда и только тогда, когда его можно разбить на Т-тетрамино.

**Доказательство.**

Докажем индукцией по длине двуповорота —  $d$ .

База.  $d=1$

Прямой двуповорот длины 1 можно разбить на Т-тетрамино двумя способами в зависимости от способа начала. (см. рис. 11)

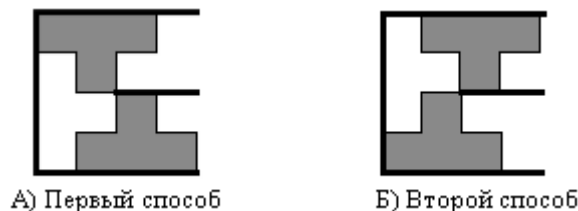


Рис. 11. Разбиение прямого двуповорота длины 1

Косой двуповорот длины 1 разбить на Т-тетрамино невозможно вне зависимости от способа начала. (см. рис. 12)

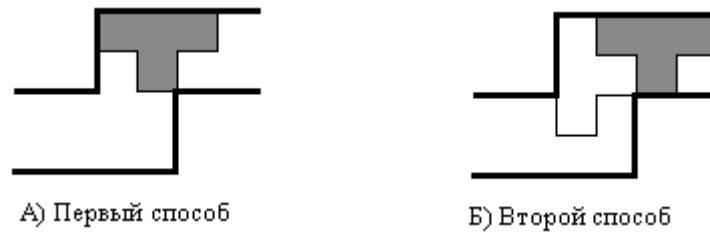


Рис. 12. Попытка разбиения косого двуповорота длины 1

$d=2$

Прямой двуповорот длины 2 разбить на Т-тетрамино невозможно вне зависимости от способа начала. (см. рис. 13)

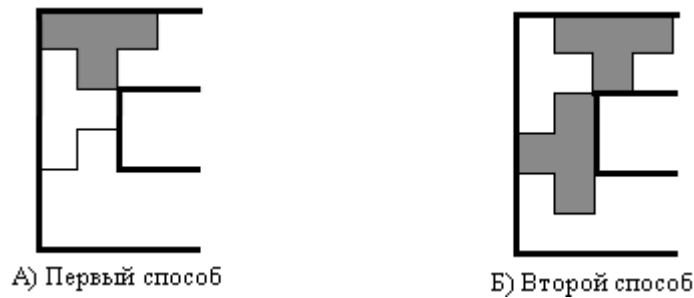


Рис. 13. Попытка разбиения прямого двуповорота длины 2

Косой двуповорот длины 2 можно разбить на Т-тетрамино двумя способами в зависимости от способа начала. (см. рис. 14)

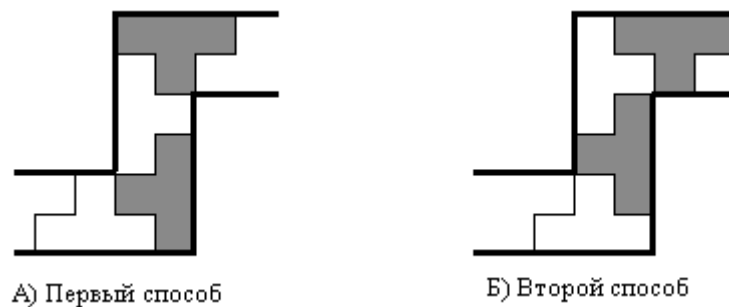


Рис. 14. Разбиение косого двуповорота длины 2

Индукционный переход.

По замечанию 1 очевидно, что последние доминошки двуповоротов длины  $d$  и  $d+2$  принадлежат одной группе, значит если одна из них хорошая, то и вторая. Следовательно, двуповорот длины  $d$  можно замостить Т-тетрамино тогда и только тогда, когда двуповорот длиной  $d+2$  можно замостить Т-тетрамино. Теорема доказана.

**Утверждение.** Если двуповорот начинался первым (вторым) способом и он разбит на Т-тетрамино, то следующий по направлению двуповорот также будет начинаться первым (вторым) способом.

**Доказательство.**

Докажем индукцией по длине изначального двуповорота  $d$ .

**База.** Рассмотрим прямой двуповорот ( $d=1$ ) и косой двуповорот ( $d=2$ ). Из рис. 11 и 14 видно, что следующий по направлению двуповорот начнется тем же способом, что и изначальный.

**Индукционный переход.** По замечанию 1 очевидно, что последние доминошки двуповоротов длины  $d$  и  $d+2$  принадлежат одной группе, следовательно, следующие по направлению двуповороты будут начинаться одинаковым способом.

**Замечание 2.** Если двуповорот хороший, то его можно разбить на Т-тетрамино ровно двумя способами, определенными способом начала поворота.

**Теорема 2.** Труба хорошая тогда и только тогда, когда она разбивается на Т-тетрамино.

**Доказательство.**

Пусть труба хорошая. По утверждению верно, что, начав разбиение какого-то двуповорота и двигаясь по направлению трубы, мы сможем корректно разбивать трубу на Т-тетрамино и, дойдя до предыдущего по отношению к первому двуповороту, мы его начнём разбивать на Т-тетрамино тем же способом, каким начали заполнять первый двуповорот.

Пусть труба разбивается на Т-тетрамино. Если труба разбивается на Т-тетрамино, то все её двуповороты разбиваются на Т-тетрамино. По обратной Теореме 1 верно, что все двуповороты хорошие. Теорема доказана.

**Утверждение.** Для каждого разбиения прямоугольника  $4m \times 4n$  на  $K$  хороших труб существует  $2^K$  разбиений этого прямоугольника на Т-тетрамино.

Утверждение верно по замечанию 2.

В заключение сформулируем импликацию, требующие отдельного рассмотрения.

**Гипотеза 1.** Если цикл хороший, то вершины сетки внутри него так же можно разбить на хорошие циклы.

**Гипотеза 2.** Для каждого хорошего цикла существует прямоугольник  $4m \times 4n$ , в разбиение сетки которого на простые циклы может входить данный цикл.

**Гипотеза 3.** Никаких других разбиений данного прямоугольника нет.

Литература:

1. D. W. Walkup. Covering a rectangle with T-tetrominoes. Amer. Math. Monthly, 72:986–988, 1965.

## Анализ маятниковых волн в слоистой среде на основе одномерной модели

Похабова Мария Александровна, аспирант  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

### Введение

В последнее время наблюдается растущий интерес исследователей в областях геомеханики и геофизики к использованию различных моделей для описания породного массива, а также изучению закономерностей деформирования и разрушения горных пород.

Необходимость учета строения реального горного массива отмечена в работе [1]. В [2] при решении серий задач о волновых процессах в блочных средах учтена концепция М. А. Садовского, согласно которой горный массив представляет собой систему вложенных друг в друга блоков разного масштабного уровня. Блоки связаны друг с другом прослойками. Часто прослойки представлены более слабыми, трещиноватыми породами, что приводит к выделению в сейсмическом отклике на импульсное воздействие низкочастотных волн маятникового типа. Таким образом, наличие блочной структуры приводит к существенному изменению процесса распространения волн в такой среде.

В Институте горного дела СО РАН выполнен большой комплекс теоретических и экспериментальных исследований по изучению волн маятникового типа [3,4]. Как показали эксперименты, отличительными особенностями маятниковых волн являются их относительно большая длина, малая скорость распространения (существенно меньшая, чем скорости волн в материале блока) и относительно слабое затухание в массиве.

Цель настоящей статьи состоит в исследовании особенностей формирования упругих волн в блочных средах на основе математических моделей, учитывающих сложные реологические свойства материала прослоек, и при их импульсном возбуждении проверить справедливость гипотезы о возможности существования волн маятникового типа.

### Уравнения одномерных движений слоистой среды

В рамках одномерной модели исследуется специфика распространения упругих волн в блочных средах. Рассматривается условная схема строения горной породы, которая в идеальном случае представляет собой вложенную слоистую структуру с инвариантным отношением масштабов блоков и прослоек. Характерный элемент такой структуры, состоящий из  $n$  упругих слоев толщины  $h$  и упругих прослоек толщины  $\delta$ , показан на рис. 1.



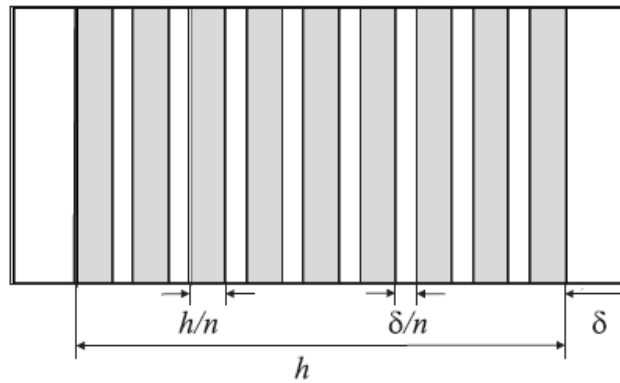


Рис. 1. Иерархическая слоистая структура горной породы

Для постановки задачи введем характеристики:  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $c$  и  $c_0$ ,  $a = 1/\rho c^2$  и  $a_0 = 1/\rho_0 c_0^2$  – плотности, скорости звука и упругие податливости материалов слоя и прослойки соответственно. С помощью этих характеристик, можно записать системы уравнений, описывающие поведение материалов в слое и прослойке.

Внутри слоя с номером  $k$  выполняются одномерные уравнения теории упругости

$$\rho \frac{\partial v^k}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^k}{\partial x}, \quad a \frac{\partial \sigma^k}{\partial t} = \frac{\partial v^k}{\partial x}, \tag{1}$$

записанные относительно продольной скорости  $v^k$  в направлении оси  $x$  ( $x$  меняется от 0 до  $h$  в пределах каждого слоя) и нормального напряжения  $\sigma^k$ . Поведение материала прослойки описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\rho_0 \frac{d}{dt} \frac{v^{k+1} - v^k}{2} = \frac{\sigma^{k+1} - \sigma^k}{\delta}, \quad a_0 \frac{d}{dt} \frac{\partial \sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}, \tag{2}$$

в которую входят граничные значения введенных выше скоростей и напряжений, левые для  $(k + 1)$ -го слоя и правые для  $k$ -го слоя.

К нашей задаче сформулируем начальные условия:  $v^k = \sigma^k = 0$ , ( $k = 1, \dots, n$ ) и граничные условия следующего вида:  $\sigma^1(0, t) = -p(t)$ ,  $v^n(h, t) = 0$ , где  $p(t)$  – заданное внешнее давление.

Термодинамическая согласованность постановки краевой задачи вытекает из закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^n \int_0^h \left( \rho |v^k(x, t)|^2 + \alpha |\sigma^k(x, t)|^2 \right) dx + \\ & + \frac{\delta}{2} \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n-1} \left( \rho_0 \left| \frac{v^{k+1}(0, t) + v^k(h, t)}{2} \right|^2 + \alpha_0 \left| \frac{\sigma^{k+1}(0, t) + \sigma^k(h, t)}{2} \right|^2 \right) = \\ & = \sigma^n(h, t)v^n(h, t) - \sigma^1(0, t)v^1(0, t), \end{aligned} \tag{3}$$

в соответствии с которым изменение кинетической и потенциальной энергий в слоях и прослойках равна мощности на границе.

### Численные результаты расчетов

Для проверки работоспособности разработанных алгоритмов и программ выполнены расчеты плоских продольных волн, вызванных кратковременными и длительными воздействиями на границе слоистой среды с упругими прослойками.

На рис. 2 и рис. 3 приведены зависимости безразмерной скорости частиц  $\bar{v}$  от пространственной координаты, отнесенной к толщине слоя  $h$ , в задаче о действии  $\Lambda$ -образного импульса. Импульс единичной амплитуды действовал на левой границе расчетной области, правая ее граница считалась неподвижной. Рис. 2 соответствует длительности импульса, равной времени прохода упругой волны через один слой, рис. 3 – в два с половиной раза большей длитель-

ности. На рис. 2 а) и 3 а) изображены профили скоростей на момент прохождения падающей волны примерно 370 слоев. На рис. 2 б) и 3 б) отраженная волна проходит в обратном направлении примерно 200 слоев.

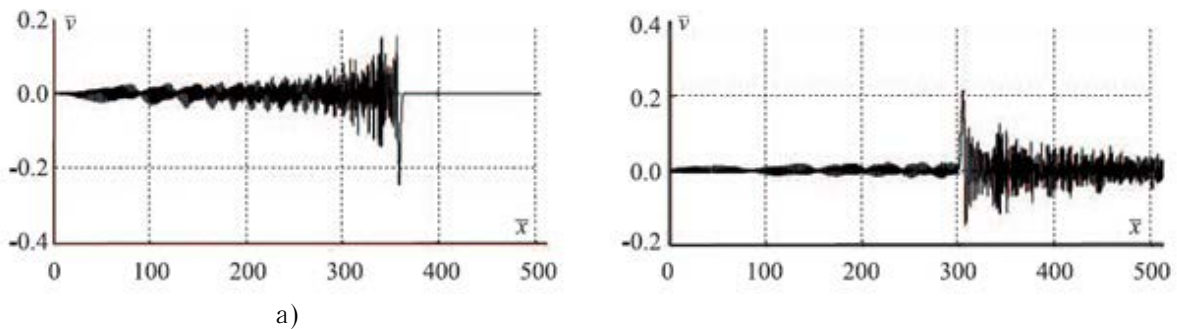


Рис. 2. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отражающей (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием короткого импульса

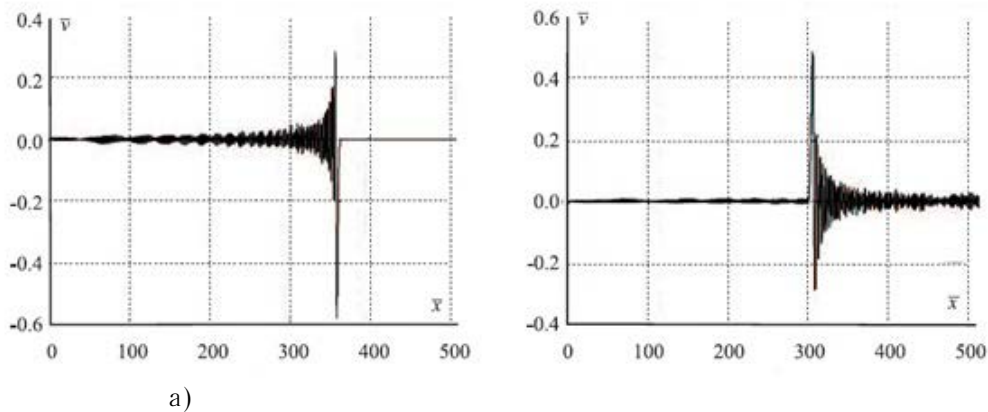


Рис. 3. Распределение скорости за фронтом падающей (а) и отражающей (б) волн, вызванных в слоистой среде воздействием длительного импульса

Представленные результаты демонстрируют качественное отличие волновой картины в слоистых средах по сравнению с однородной средой. Это отличие на начальном этапе заключается в появлении отраженных от прослоек волн – характерных осцилляций за фронтом волны нагружения по мере ее прохождения через границы раздела. Со временем после многократного переотражения за фронтом головной волны возникает стационарная волна, называемая «маятниковой».

Из сопоставления рис. 2 и 3 видно, что с увеличением длительности импульса амплитуда головной волны увеличивается, возрастая до единицы при дальнейшем увеличении длительности, а амплитуда осцилляций за фронтом убывает и стремится к нулю. Таким образом обнаружить ослабленную микроструктуру слоистой или блочной среды можно только с помощью коротких волн.

В процессе тестирования алгоритмов проводились аналогичные расчеты для упругих прослоек, импеданс которых  $z_0 = \rho_0 c_0$  совпадал с импедансом слоев  $z = \rho c$ . При этом плотность материала в прослойках была на порядок ниже плотности материала в слоях, а скорость корректировалась естественным образом, поскольку скорости распространения возмущений в слое и прослойках сильно различаются. В этом случае волна, вызванная импульсным воздействием на границе, проходит через прослойки как в однородной среде в виде уединенного импульса.

### Вязкоупругое взаимодействие

Анализ экспериментальных данных по распространению упругих волн в слоистых средах показывает, что прослойки ведут себя неупруго даже при малых амплитудах волн. Более сложный вариант модели, учитывающий естественные диссипативные процессы в прослойках, представлен реологической схемой на рис. 4.

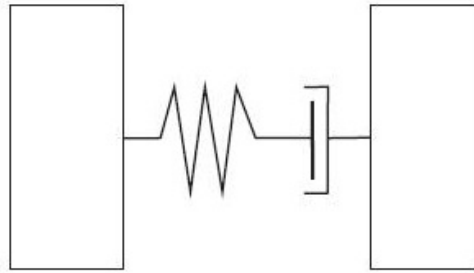


Рис. 4. Модель Максвелла

Вязкоупругое взаимодействие по модели Максвелла, согласно которой деформация прослойки складывается из упругой и вязкой составляющей, описывается системой (2) после замены второго уравнения более общим уравнением

$$a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2} + \frac{\sigma^{k+1} + \sigma^k}{2\eta} = \frac{v^{k+1} - v^k}{\delta}$$

где  $\eta$  – коэффициент вязкости материала прослойки.

В этом случае, умножив первое уравнение (2) на  $(v^{k+1} + v^k)/2$ , а уравнение (4) на  $(\sigma^{k+1} + \sigma^k)/2$ , можно получить уравнение баланса энергии (3), в левой части которого появляется диссипативное слагаемое  $1/\eta((\sigma^{k+1} + \sigma^k)/2)^2$ , пропорциональное квадрату напряжения в прослойке.

Численное решение задачи строилось на основе схемы Иванова [7]. Схема в пределах слоя не обладает искусственной диссипацией энергии. Ее идея состоит в том, чтобы закон сохранения энергии выполнялся на дискретном уровне.

На рис. 5 схематически показана сеточно-характеристическая интерпретация применяемого метода.

$$S^k = zv^k - \sigma^k, \quad R^{k+1} = zv^{k+1} - \sigma^{k+1},$$

где  $z = \rho c$  – импеданс.

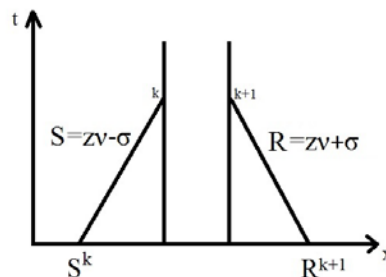


Рис. 5. Сеточно-характеристическая интерпретация в схеме Иванова

Из основной системы уравнений записываем уравнения на характеристики

$$\begin{aligned} z(v^{k+1} - v^k) + \sigma^{k+1} + \sigma^k &= R^{k+1} - S^k, \\ z(v^{k+1} + v^k) + \sigma^{k+1} - \sigma^k &= R^{k+1} + S^k, \end{aligned}$$

где  $R^{k+1}$  и  $S^k$  – заданные величины.

Анализ результатов расчетов с вязкоупругими прослойками показал, что при прохождении волны через прослойку за фронтом основной волны возникают отраженные волны, которые представляют большой интерес для исследования.

На рис. 6 показан один из примеров осциллограммы, на которой четко видны фронты головной и маятниковой волн.

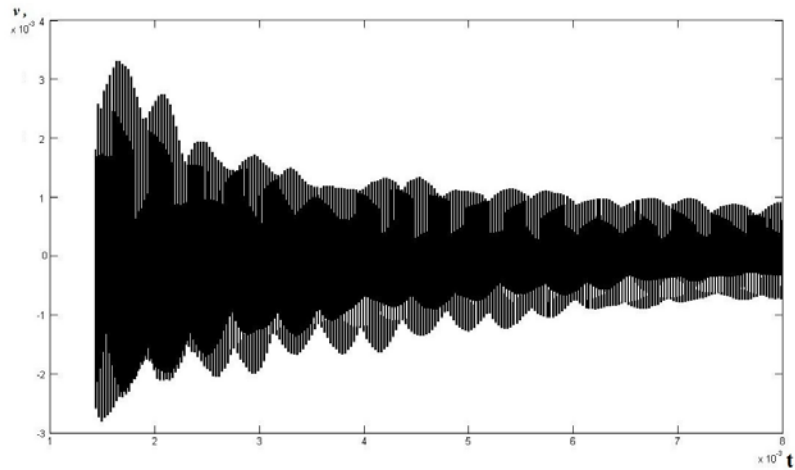


Рис. 6. Осциллограмма

С помощью преобразования Фурье, применяя частотный анализ, находим низкую частоту данной волны (рис. 7).

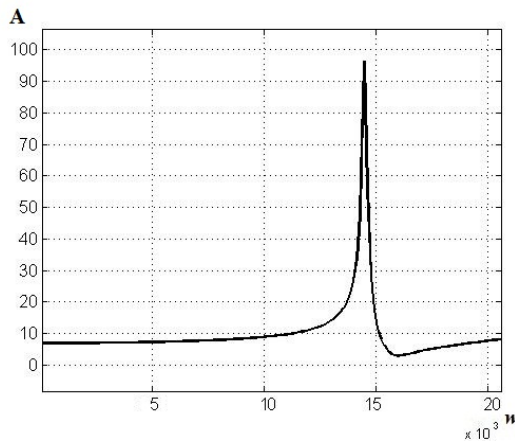


Рис. 7. Низкая частота маятниковой волны

Полученные результаты подтверждают гипотезу существования низкочастотных маятниковых волн.

**Методические расчеты**

Большая серия методических расчетов позволила увидеть некоторые особенности распространения низкочастотных маятниковых волн. На рис. 8 представлена зависимость частоты волны от толщины прослойки при различных параметрах блоков. В данном случае рассматривались блоки с толщиной слоя 1 см, 3 см и 5 см соответственно. Как видно из рис. 8, чем больше толщина прослойки, тем меньше частота маятниковой волны. Также частота волны зависит и от толщины самого блока. Чем больше сам блок, тем меньше частота волны.

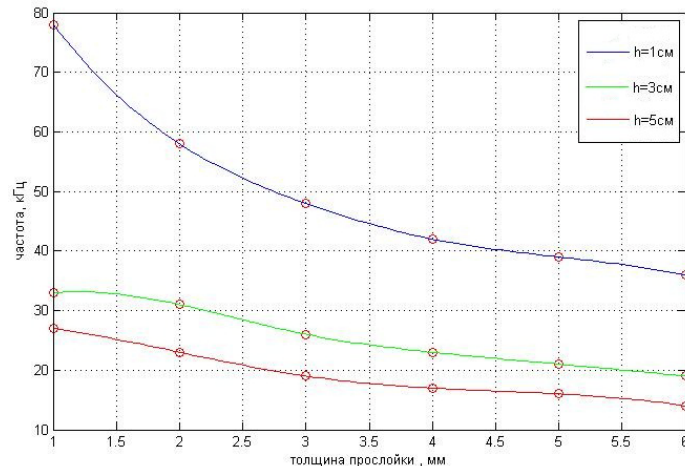


Рис. 8. Зависимость частоты волны от толщины прослойки

В следующих расчетах проверялась гипотеза о том, что частота волны зависит от импеданса прослойки. В данном численном эксперименте материал в слое напоминает горную породу, в прослойках материал приближен к резине. Для прослойки были взяты следующие параметры:  $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ , скорость звука  $c = 1500 \text{ м/с}$ . Эксперимент состоял в том, что для начала нашли частоты волны для данных параметров прослойки. На рис. 9 эти результаты соответствуют I линии. Затем провели два расчета таким образом, что импеданс в прослойке не менялся, а параметры скорости и плотности были следующие:  $\rho = 400 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 4500 \text{ м/с}$  и  $\rho = 3600 \text{ кг/м}^3$ ,  $c = 500 \text{ м/с}$  – II и III линии соответственно. Из графика, полученного из расчетов для этих параметров скоростей и плотностей, можно констатировать, что частота волны зависит от скорости звука в выбранном материале. Чем меньше скорость звука в материале прослойки, тем меньше частота волны.

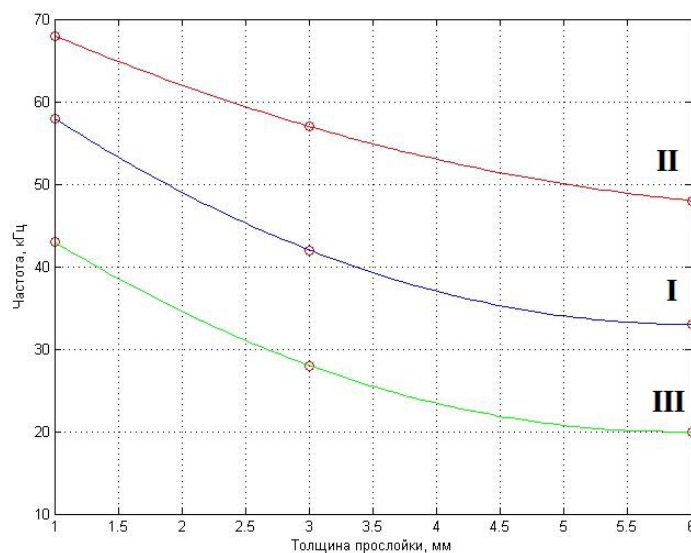


Рис. 9. Зависимость частоты волны от толщины прослойки для разных импедансов прослойки

Доказательством этого факта, также может служить следующий численный эксперимент, представленный на рис. 10, где проводились расчеты для разных скоростей звука в материале.

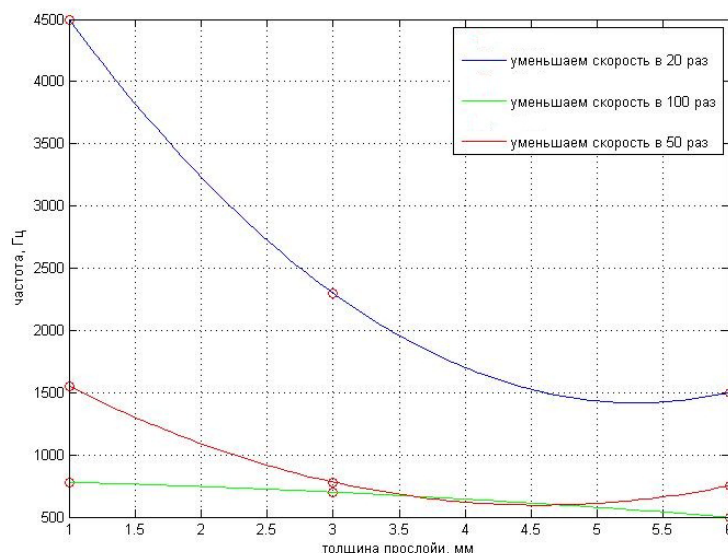


Рис. 10. Зависимость частоты от толщины прослойки для разных скоростей звука

### Заключение

Разработаны вычислительные алгоритмы для исследования распространения волн напряжений и деформаций в слоистых средах, состоящих из большого количества деформируемых слоев с податливыми прослойками. На основе реологического метода построены модели деформирования материала прослоек различного уровня сложности. Приведены результаты расчетов, демонстрирующие особенности распространения плоских волн в слоистых средах.

Литература:

1. Садовский, М. А. Естественная кусковатость горной породы // ДАН СССР. — 1979. — Т. 247, № 4. — с. 829–833.
2. Александрова, Н. И., Черников А. Г., Шер Е. Н. Экспериментальная проверка одномерной расчетной модели распространения волн в блочной среде // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. — 2005. — № 3. — с. 46–55.
3. Александрова, Н. И. О распространении упругих волн в блочной среде при импульсном нагружении // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. — 2003. — № 6. — с. 38–47.
4. Александрова, Н. И., Шер Е. Н. Моделирование процесса распространения волн в блочных средах // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. — 2004. — № 6. — с. 49–57.
5. Варыгина, М. П., Похабова М. А., Садовская О. В., Садовский В. М. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. — 2011. — Т. 12, № 2. — с. 190–197.
6. Sadovskaya, O. V., Sadovskii V. M., Pokhabova M. A. Numerical modeling of a block medium as an orthotropic Cosserat continuum // Lecture Notes in Computer Science. — 2015. — Vol. 9045. — P. 340–347.
7. Иванов, Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.

## Методы Рунге-Кутты первого порядка с согласованными областями устойчивости

Рыбков Михаил Викторович, ассистент  
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

### Введение

При численном решении задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

в [1–2] предлагается применять явные методы типа Рунге-Кутты

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf \left( t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), \quad (2)$$

где  $y$  и  $f$  — гладкие вещественные  $N$ -мерные вектор функции;  $t$  — независимая переменная;  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  — стадии метода;  $\alpha_i$ ,  $p_{mi}$ ,  $\beta_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq i-1$  — коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2). Тем не менее, при интегрировании жестких задач условие устойчивости накладывает сильные ограничения на величину шага интегрирования, что существенно снижает эффективность метода.

В [2–3] построен алгоритм получения коэффициентов многочленов устойчивости, с помощью которых можно построить явные методы с заданными формой и размером области устойчивости до степени  $m=13$ . Там же численно показано значительное повышение эффективности алгоритмов интегрирования за счет комбинирования численных формул с различными характеристиками устойчивости в процессе вычислений на основании критерия устойчивости. При этом в [2] не рассмотрен вопрос о выборе коэффициентов  $\beta_{ij}$ , которые влияют на устойчивость промежуточных численных схем и, в конечном счете, на эффективность алгоритма интегрирования. Авторы ограничились замечанием, что устойчивости промежуточных формул можно добиться за счет выбора достаточно малых  $\beta_{ij}$ .

Здесь на основе алгоритма, описанного в [4], получены коэффициенты многочленов устойчивости до степени  $m=27$ , соответствующие методам первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости. Предложен такой выбор коэффициентов  $\beta_{ij}$ , чтобы промежуточные численные схемы метода были согласованы с основной. Построены методы первого порядка с согласованными областями устойчивости, и приведены результаты расчетов.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00047).

**Численные схемы**

Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \tag{3}$$

для решения которой применим методы типа Рунге-Кутты, записанные в следующем виде

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \tag{4}$$

где  $k_i = hf(y_{n,i-1})$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $y_{n,0} = y_n$ . Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных задач, если в (2) положить

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m, \quad \alpha_1 = 0. \tag{5}$$

В дальнейшем потребуется матрица  $B_m$  с элементами  $b_{ij}$  следующего вида [2]:

$$b_{ii} = 1, \quad 1 \leq i \leq m, \quad b_{ki} = 0, \quad 2 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq k-1, \tag{6}$$

$$b_{ki} = \sum_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}, \quad 2 \leq k \leq m, \quad k \leq i \leq m,$$

где  $\beta_{ij}$  – коэффициенты схемы (2) или (4).

Устойчивость одношаговых методов обычно исследуется на линейном скалярном уравнении

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0 \tag{7}$$

с комплексным  $\lambda$ ,  $\text{Re}(\lambda) < 0$ . Применяя вторую формулу (4) к (7), получим

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad z = h\lambda, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=1}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{8}$$

Обозначая  $C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T$  и  $P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T$ , соотношения (8) можно переписать в виде

$$B_m P_m = C_m,$$

где элементы матрицы  $B_m$  определены соотношениями (6). Для промежуточных численных схем (4) имеем

$$y_{n,k} = Q_k(z) y_n, \quad Q_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^k c_{ki} z^i, \quad c_{ki} = \sum_{j=i}^k b_{ij} \beta_{k+1,j}, \quad 1 \leq k \leq m-1. \tag{10}$$

Используя обозначения  $\beta_k = (\beta_{k+1,1}, \dots, \beta_{k+1,k})^T$  и  $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kk})^T$ , получим, что коэффициенты  $\beta_{ij}$  промежуточных схем (4) и коэффициенты соответствующих многочленов устойчивости связаны соотношениями

$$B_k \beta_k = c_k, \quad 1 \leq k \leq m-1. \tag{11}$$

Заметим, что из сравнения (6) и (10) следует, что  $b_{ki} = c_{i-1,k-1}$ , то есть элементы  $(k+1)$ -го столбца матрицы  $B_m$  совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости  $Q_k(z)$ . Отсюда следует, что при заданных коэффициентах многочленов устойчивости основной и промежуточной численных схем коэффициенты методов (4) однозначно определяются из линейных систем (9) и (11) с верхними треугольными матрицами  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Ниже этот факт будет использоваться при определении коэффициентов численных формул (4) при условии, что области устойчивости промежуточных численных схем согласованы с основной.

Разлагая точное и приближенное решения в ряды Тейлора по степеням  $h$ , можно записать

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + \frac{h^2}{2} f'f + O(h^3), \tag{12}$$

$$y_{n+1} = y_n + \left( \sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} \right) hf + \left( \sum_{j=2}^m b_{2j} p_{mj} \right) h^2 f' f_n + O(h^3),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном  $y(t_n)$  и приближенном  $y_n$  решениях, соответственно. Из сравнения соотношений (12) видно, что численная формула (4) будет иметь первый порядок точности, если  $\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} = 1$ . Отсюда следует, что для построения  $m$ -стадийных методов первого порядка точности в линейной системе (9) следует положить  $c_{m1} = 1$ .

**Согласование областей устойчивости**

Предположим, что заданы коэффициенты многочленов устойчивости

$$Q_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^k c_{ki} z^i, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{13}$$

При выборе коэффициентов многочлена (13) можно руководствоваться различными соображениями. Если выбрать многочлен Чебышева, то соответствующий метод будет иметь максимальную длину области устойчивости вдоль вещественной оси. Область устойчивости таких методов является почти многосвязной и в результате ошибок округлений, которые приводят к появлению небольших мнимых частей собственных чисел матрицы Якоби, она сокращается. Описанным в [4] способом выберем коэффициенты многочлена таким образом, чтобы область устойчивости растягивалась вдоль мнимой оси и становилась односвязной. Это обеспечивает лучшие свойства устойчивости метода к ошибкам округления при несущественном сокращении длины интервала устойчивости.

Для каждого  $k, 1 \leq k \leq m$ , обозначим через  $\gamma_k$  длину такого максимального интервала  $[\gamma_k, 0]$ , что для всех  $z \in [\gamma_k, 0]$  имеет место неравенство  $|Q_k(z)| \leq 1$ . Учитывая, что  $z = h\lambda$ , в (13) для каждого  $Q_k(z), 1 \leq k \leq m$  проведем замену  $h$  на  $(h\gamma_k/\gamma_m)$ . В результате вместо (13) получим

$$Q'_k(z) = 1 + \sum_{i=1}^k c'_{ki} z^i, \quad c'_{ki} = (\gamma_k/\gamma_m)^i c_{ki}, \quad 1 \leq k \leq m. \tag{14}$$

Замена  $h$  на  $(h\gamma_k/\gamma_m)$  означает, что приближенное решение по промежуточным схемам (4) вместо точек  $(t_n + c_{k1}h), 1 \leq k \leq m-1$  будет вычисляться в точках  $(t_n + c'_{k1}h), 1 \leq k \leq m-1$ . В этом случае максимальный шаг из условия устойчивости основной схемы будет максимальным и для промежуточных численных формул.

Определение коэффициентов методов (4) будем осуществлять по следующему алгоритму. С использованием [1] вычислим коэффициенты полиномов (13), удовлетворяющие некоторым заданным свойствам. Затем вычислим коэффициенты многочленов (14) с применением соответствующей замены переменных. Учитывая, что элементы  $(k+1)$ -го столбца матрицы  $B_m$  совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости  $Q'_k(z)$ , сформируем матрицу

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & c'_{11} & c'_{21} & \dots & c'_{m-1,1} \\ 0 & 0 & c'_{22} & \dots & c'_{m-1,2} \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c'_{m-1,m-1} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

Используя в (11) вектор  $c'_k = (c'_{k1}, \dots, c'_{kk})^T$  вместо  $c_k$ , все коэффициенты методов (4) с согласованными областями устойчивости однозначно определяются из линейных систем (9) и (11).

**Контроль точности вычислений**

Для контроля точности методов первого порядка будем использовать оценку локальной ошибки  $\delta_{n,1}$ . С применением (12) видим, что для  $m$ -стадийного метода она имеет вид

$$\delta_{n,1} = \left( 0.5 - \sum_{j=2}^m b_{2j} p_{mj} \right) h^2 f' f + O(h^3) = (0.5 - c_{m2}) h^2 f' f + O(h^3),$$

где  $c_{m2}$  — коэффициент при  $z^2$  многочлена устойчивости (8). Оценку  $\varepsilon_{n,1}$  данной ошибки можно вычислить многими способами. Разлагая  $k_i, 1 \leq k \leq m$  в ряды Тейлора, нетрудно видеть, что

$$k_i - k_j = (\alpha_i - \alpha_j) h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad i \neq j.$$

Отсюда следует, что  $\varepsilon_{n,1}$  можно вычислить по приближенной формуле

$$\varepsilon_{n,1} = [(0.5 - c_{m2}) / (\alpha_i - \alpha_j)] (k_i - k_j), \quad 1 \leq i, j \leq m, \quad i \neq j. \tag{16}$$

Для жестких задач на переходных участках характерным является быстрое изменение решения на небольших промежутках. Для того чтобы избежать неудовлетворительной точности, естественно, в оценке ошибки использовать стадии, вычисленные в крайних точках отрезка  $[t_n, t_{n+1}]$ . Стадия  $k_1$  вычисляется в точке  $t_n$ , и поэтому в (16) положим  $j=1, i>j$ . Для методов с согласованными областями устойчивости имеет место неравенство  $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < 1$ . Отсюда следует, что ни одна стадия в точке  $t_{n+1}$  не вычисляется. С другой стороны, применение в (16) стадий с достаточно большими номерами будет приводить к значительному увеличению вычислительных затрат в случае повторных вы-



числений решения вследствие невыполнения требуемой точности. С целью повышения эффективности расчетов поступим следующим образом. В качестве предварительной оценки применим величину

$$\varepsilon'_{n,1} = [(0.5 - c_{m2}) / \alpha_2](k_2 - k_1). \tag{17}$$

Поскольку  $k_1$  зависит от размера шага линейно, то нарушение неравенства  $\|\varepsilon'_{n,1}\| \leq \varepsilon$  будет приводить всего лишь к одному дополнительному вычислению правой части задачи (3). Здесь  $\varepsilon$  – требуемая точность расчетов,  $\|\cdot\|$  – некоторая норма в  $R^N$ . Учитывая, что

$$hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3),$$

окончательное решение по точности будем принимать на основе неравенства  $\|\varepsilon''_{n,1}\| \leq \varepsilon$ , где

$$\varepsilon''_{n,1} = (0.5 - c_{m2})(hf(y_{n+1}) - k_1). \tag{18}$$

### Контроль устойчивости

Неравенство для контроля устойчивости построим по аналогии с [1]. Для получения данного неравенства применим метод (4) для решения задачи (3) при  $f(y) = Ay + b$ , где  $A$  и  $b$  соответственно матрица и вектор с постоянными коэффициентами размерности  $N$ . Очевидно, что в этом случае выполнены соотношения

$$k_1 = hf_n, \quad k_2 = hf_n + \alpha_2 h^2 f'_n f_n, \quad k_3 = hf_n + \alpha_3 h^2 f'_n f_n + \alpha_2 \beta_{32} h^3 f''_n f_n,$$

где  $f_n = Ay_n + b, f'_n = A$ . Выберем  $b'_i$  и  $b''_i, 1 \leq i \leq 3$  из условия выполнения равенств

$$\sum_{i=1}^3 b'_i k_i = h^3 f''_n f_n, \quad \sum_{i=1}^3 b''_i k_i = h^2 f'_n f_n.$$

Нетрудно видеть, что данные соотношения будут выполнены, если

$$b'_2 = \alpha_3 / (\alpha_2 \beta_{32}), \quad b'_1 = -(\alpha_2 + \alpha_3) / (\alpha_2 \beta_{32}), \quad b'_3 = 1 / (\alpha_2 \beta_{32}), \\ b''_1 = -1 / \alpha_2, \quad b''_2 = 1 / \alpha_2, \quad b''_3 = 0.$$

Теперь оценку максимального собственного числа  $\lambda_n^{max}$  матрицы Якоби  $df(y_n)/dy$  задачи (3) можно вычислить по формуле

$$h\lambda_n^{max} = |\alpha_2 \beta_{32}|^{-1} \max_{1 \leq j \leq N} |[\alpha_2 k_3 + \alpha_3 k_2 - (\alpha_2 + \alpha_3) k_1]_j / [k_2 - k_1]_j|. \tag{19}$$

Тогда неравенство для контроля устойчивости  $m$ -стадийного метода (4) имеет вид  $h\lambda_n^{max} \leq |\gamma_m|$ , где  $|\gamma_m|$  – длина интервала устойчивости  $m$ -стадийной схемы.

### Метод первого порядка

Для численного решения задачи Коши (1) рассмотрим явный трехстадийный метод типа Рунге-Кутты вида

$$y_{n+1} = y_n + p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3, \\ k_1 = hf(y_n), \quad k_2 = hf(y_n + \beta_{21} k_1), \quad k_3 = hf(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2), \tag{20}$$

где  $y$  и  $f$  – вещественные  $N$ -мерные вектор-функции;  $t$  – независимая переменная;  $h$  – шаг интегрирования;  $k_1, k_2$  и  $k_3$  – стадии метода;  $p_1, p_2, p_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$  – числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (20).

Выберем коэффициенты (20) таким образом, чтобы они имели первый порядок точности и расширенную область устойчивости. Если рассматривать методы с максимальной областью устойчивости, то она является многосвязной. Построим многочлены первой, второй и третьей степени такие, чтобы соответствующие методы имели односвязные области устойчивости с интервалом устойчивости, близким к максимальному. Применяя алгоритм [4], получим коэффициенты

$$c_{11} = 1, \\ c_{21} = 1, \quad c_{22} = 0,128025128205128, \\ c_{31} = 1, \quad c_{32} = 0.152092927269786, \quad c_{33} = 0.00580524400854353.$$

При этом

$$\gamma_1 = -2, \gamma_2 = -7.79, \gamma_3 = -17.46.$$

Составив и решив линейные системы (9) и (11) с учетом (15) для схемы (20), получим в результате коэффициенты метода

$$\beta_{21} = 0.1145071788561091, \beta_{31} = 0.2232889987694127, \beta_{32} = 0.2232889987694127, \\ p_1 = 0.3302041481091081, p_2 = 0.4427464105719455, p_3 = 0.2270494413189463.$$

Для контроля точности численной формулы используем оценки (17) и (18). Интервал устойчивости численной схемы (20) первого порядка точности равен 17.46. Поэтому для ее контроля можно применять неравенство  $h\lambda_n^{\max} \leq 17.46$ , где  $h\lambda_n^{\max}$  определяется по формуле (19).

### Результаты расчетов

Расчеты проводились с точностью  $\varepsilon = 10^{-2}$  на Intel(R) Core(TM) i3-5010U CPU с двойной точностью. В конкретных расчетах норма  $\|\xi\|$  в неравенствах для контроля точности вычисляется по формуле

$$\|\xi_n\| = \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_n^i| / (|y_n^i| + r),$$

где  $i$  – номер компоненты,  $r$  – положительный параметр. Если по  $i$ -й компоненте решения выполняется неравенство  $|y_n^i| < r$ , то контролируется абсолютная ошибка  $re$ , в противном случае – относительная ошибка  $\varepsilon$ . В расчетах параметр  $r$  выбирался таким образом, чтобы по всем компонентам решения фактическая точность была не хуже задаваемой.

Сравнение эффективности метода Рунге-Кутты первого порядка с согласованными областями устойчивости с контролем точности и устойчивости проводилось с трехстадийным методом третьего порядка точности с контролем и без контроля устойчивости, описанным в [5]. Ниже через  $is$ ,  $i\omega$  и  $if$  обозначены, соответственно, суммарное число шагов интегрирования, число повторных вычислений решения (возвратов), вследствие нарушения требуемой точности расчетов, и число вычислений правой части задачи (1).

В качестве тестового примера выбрана упрощенная модель с периодическим решением для описания реакции Белоусова-Жаботинского (орегонатор), которая записывается следующим образом:

$$y_1' = 77.27(y_2 - y_1 y_2 + y_1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1^2), \\ y_2' = (-y_2 - y_1 y_2 + y_3) / 77.27, y_3' = 0.161(y_1 - y_3), \\ t \in [0, 300], y_1(0) = y_3(0) = 4, y_2(0) = 1.1, h_0 = 10^{-3}.$$

Она является «слишком» жесткой для явных методов. Тем не менее, данный пример приведен здесь с целью подчеркнуть преимущество методов с контролем устойчивости.

Методом первого порядка с согласованными областями устойчивости и контролем точности и устойчивости решение задачи вычислено с затратами  $is=451\ 689$ ,  $i\omega=1\ 941$  и  $if=1\ 808\ 907$ . Для метода третьего порядка без контроля устойчивости затраты  $is=2\ 903\ 722$ ,  $i\omega=769\ 200$  и  $if=10\ 249\ 566$ . Из сравнения результатов следует, что контроль устойчивости приводит к повышению эффективности за счет устранения некоторых повторных вычислений решения из-за неустойчивости численной формулы. Тенденция сохраняется при интегрировании других примеров.

### Заключение

В работе получены коэффициенты многочленов устойчивости до степени  $m = 27$  и построены соответствующие явные  $m$ -стадийные методы типа Рунге-Кутты первого порядка точности, у которых области устойчивости промежуточных численных формул согласованы с областью основной схемы. Построены неравенства для контроля точности вычислений и устойчивости численной схемы.

Разработанные наборы методов первого порядка с контролем точности и устойчивости могут быть применены в алгоритмах интегрирования с переменным шагом, порядком и переменным числом стадий. В этом случае повышение эффективности достигается не только за счет переключения с метода высокого порядка на метод низкого порядка на участке установления, но и за счет «разгона» шага на этом участке путем применения набора методов первого порядка с согласованными областями устойчивости. При этом согласование численных схем приводит примерно к 30-процентному повышению эффективности алгоритма интегрирования и обеспечивает более оправданное поведение шага на участке установления.

Литература:

1. Хайрер, Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

2. Новиков, Е. А. Явные методы для жестких систем. — Новосибирск: Наука, 1997. — 195 с.
3. Новиков, Е. А. Конструирование областей устойчивости явных методов типа Рунге-Кутты // Вычислительные методы и программирование. — 2009. — № 10. — с. 248–257.
4. Новиков, Е. А., Рыбков М. В. Численный алгоритм построения многочленов устойчивости методов первого порядка // Вестник Бурятского государственного университета. — 2014. — № 9–2. — с. 80–85.
5. Новиков, А. Е., Новиков Е. А. Комбинированный алгоритм третьего порядка для решения жестких задач // Вычислительные технологии. — 2011. — Т. 16, № 6. — с. 54–67.

## Параллельный вычислительный алгоритм для анализа акустических волн в жидком кристалле с учетом моментных взаимодействий

Смолехо Ирина Владимировна, аспирант  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

### Введение

Жидкий кристалл — это промежуточное агрегатное состояние вещества, в котором проявляются одновременно свойства упругости и текучести. Жидкокристаллическая фаза образуется при плавлении ряда органических веществ. Она существует в интервале от температуры плавления до некоторой более высокой температуры, при нагреве до которой вещество переходит в обычную жидкость. Подобно жидкости этот кристалл может принимать форму сосуда, в который он помещен. Однако кроме этого свойства, объединяющего его с жидкостями, он обладает наличием порядка пространственной ориентации молекул, характерным для кристаллов. В зависимости от вида упорядочения осей молекул жидкие кристаллы разделяются на три разновидности: нематические, смектические и холестерические.

Один из подходов к построению математических моделей для описания поведения жидких кристаллов основывается на представлении о жидкокристаллической среде как о мелкодисперсной сплошной среде, в каждой точке которой домены жидких кристаллов могут перемещаться в соответствии с законами динамики вязкой или невязкой жидкости и вращаться, проявляя упругие свойства. Модели жидкого кристалла были предложены Эриксоном [1], Лесли [2], Аэро [3] и другими авторами.

Данная работа посвящена численному решению дифференциальных уравнений второго порядка для касательного напряжения и угловой скорости, полученных из системы уравнений, описывающей термомеханическое поведение жидкого кристалла.

### Математическая модель

Основная система уравнений жидкого кристалла при слабых акустических возмущениях с учетом моментных напряжений в двумерном случае выглядит следующим образом [4–6]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}, & \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}, & j \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 2q + \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -k \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial t}, & \frac{\partial q}{\partial t} &= \alpha \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega \right), & & (1) \\ \frac{\partial \mu_x}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial \omega}{\partial x}, & \frac{\partial \mu_y}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial \omega}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \omega, \\ c \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \beta T \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00130 и 16-31-00078). Автор считает своим долгом выразить благодарность к. ф.-м. н. О. В. Садовской и д. ф.-м. н., профессору В. М. Садовскому за постановку задачи и обсуждение результатов.

Здесь  $u$  и  $v$  – компоненты вектора скорости;  $\omega$  – угловая скорость;  $\varphi$  – угол поворота молекул кристалла;  $p$  – гидростатическое давление;  $q$  – касательное напряжение;  $\mu_x$  и  $\mu_y$  – моментные напряжения;  $T$  – абсолютная температура;  $\rho$  – плотность;  $j$  – момент инерции;  $k$  – модуль объемного сжатия;  $\alpha$  – модуль упругого сопротивления вращению;  $\beta$  – коэффициент теплового расширения;  $c$  – удельная теплоемкость;  $x$ ,  $y$  и  $t$  – пространственные переменные и время;  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  – коэффициенты теплопроводности в направлении ориентации молекул жидкого кристалла и в поперечном направлении;  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa_{12}$  и  $\kappa_{22}$  – компоненты симметричного тензора теплопроводности:  $\kappa_{11} = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi$ ,  $\kappa_{12} = (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \varphi \cos \varphi$ ,  $\kappa_{22} = \kappa_1 \sin^2 \varphi + \kappa_2 \cos^2 \varphi$ . В систему (1) входят уравнения поступательного и вращательного движений, уравнение для угла поворота, уравнения состояния для давления и касательного напряжения, уравнение анизотропной теплопроводности с переменными коэффициентами. Параллельный вычислительный алгоритм для решения системы уравнений жидкого кристалла без учета моментного воздействия подробно описан в [7].

Рассмотрим, как из системы (1) получается система уравнений второго порядка для касательного напряжения и угловой скорости. Продифференцировав первое уравнение системы (1) по  $x$ , а второе по  $y$ , и, сложив результаты, получим:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\Delta p.$$

Затем продифференцируем уравнение для давления по  $t$ :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \Delta p + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}.$$

Далее первое уравнение системы (1) продифференцируем по  $y$ , а второе по  $x$ . После вычитания имеем:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\Delta q.$$

С учетом этого выражения после дифференцирования соответствующих уравнений системы (1) по  $t$ , получим отдельную подсистему для касательного напряжения  $q$  и угловой скорости  $\omega$ :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{\rho} \Delta q - 2\alpha \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = \frac{2}{j} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\gamma}{j} \Delta \omega.$$

Начальные данные для системы (2) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} q|_{t=0} &= q^0, & \frac{\partial q}{\partial t}|_{t=0} &= \alpha \left( \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} - 2\omega^0 \right) = -2\alpha \omega^0, \\ \omega|_{t=0} &= \omega^0, & \frac{\partial \omega}{\partial t}|_{t=0} &= \frac{1}{j} \left( 2q^0 + \frac{\partial \mu_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y^0}{\partial y} \right) = \frac{2q^0}{j}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $\omega^0$ ,  $q^0$ ,  $\mu_x^0$ ,  $\mu_y^0$  – заданные в начальный момент времени константы.

Из подсистемы (2) можно вывести уравнение четвертого порядка для  $q$ . Выразив из первого уравнения  $\partial \omega / \partial t$  и подставив во второе, продифференцированное по  $t$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\alpha}{\rho} \Delta q - \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^3 \omega}{\partial t^3} = \frac{2}{j} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{j} \Delta \frac{\partial \omega}{\partial t} \Rightarrow \\ \frac{\partial^4 q}{\partial t^4} + \frac{4\alpha}{j} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \left( \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{j} \right) \frac{\partial^2 \Delta q}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{j} \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 q}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 q}{\partial y^4} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Начальные данные для соответствующей задачи Коши таковы:

$$q|_{t=0} = q^0, \quad \frac{\partial q}{\partial t}|_{t=0} = \alpha \left( \frac{\partial v^0}{\partial x} - \frac{\partial u^0}{\partial y} - 2\omega^0 \right), \quad \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}|_{t=0} = \frac{\alpha}{\rho} \Delta q^0 - 2\alpha \frac{\partial \omega^0}{\partial t},$$

$$\left. \frac{\partial^3 q}{\partial t^3} \right|_{t=0} = \frac{\alpha}{\rho} \Delta \left( \frac{\partial q}{\partial t} \right)^0 - \frac{2\alpha}{j} \left( 2q^0 + \frac{\partial \mu_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y^0}{\partial y} \right).$$

**Численный алгоритм**

Для решения системы уравнений второго порядка (2) разработан численный алгоритм. Искомыми величинами являются касательное напряжение  $q$  и угловая скорость  $\omega$  внутри расчетной области. Используются начальные данные вида (3). Граничные условия задаются в терминах  $q$ ,  $\omega$ , а также  $\partial q/\partial x$ ,  $\partial q/\partial y$  и  $\partial \omega/\partial x$ ,  $\partial \omega/\partial y$ . Применяется явная конечно-разностная схема “крест” второго порядка аппроксимации по  $x$ ,  $y$  и  $t$ . Уравнения системы (2) на каждом временном слое аппроксимируются заменой производных по времени и пространству конечными разностями:

$$\begin{aligned} & \frac{q_{j_1, j_2}^{n+1} - 2q_{j_1, j_2}^n + q_{j_1, j_2}^{n-1}}{(\Delta t)^2} + \alpha \frac{\omega_{j_1, j_2}^{n+1} - \omega_{j_1, j_2}^{n-1}}{\Delta t} = \\ & = \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{q_{j_1+1, j_2}^n - 2q_{j_1, j_2}^n + q_{j_1-1, j_2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{q_{j_1, j_2+1}^n - 2q_{j_1, j_2}^n + q_{j_1, j_2-1}^n}{(\Delta y)^2} \right), \\ & \frac{\omega_{j_1, j_2}^{n+1} - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1, j_2}^{n-1}}{(\Delta t)^2} - \frac{1}{j} \frac{q_{j_1, j_2}^{n+1} - q_{j_1, j_2}^{n-1}}{\Delta t} = \\ & = \frac{\gamma}{j} \left( \frac{\omega_{j_1+1, j_2}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1-1, j_2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{j_1, j_2+1}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1, j_2-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $j_1 = \overline{2, N_1 - 1}$  и  $j_2 = \overline{2, N_2 - 1}$ . Далее из второго уравнения выражается  $\omega_{j_1, j_2}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \omega_{j_1, j_2}^{n+1} &= 2\omega_{j_1, j_2}^n - \omega_{j_1, j_2}^{n-1} + \frac{\Delta t}{j} (q_{j_1, j_2}^{n+1} - q_{j_1, j_2}^{n-1}) + \\ &+ \frac{\gamma(\Delta t)^2}{j} \left( \frac{\omega_{j_1+1, j_2}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1-1, j_2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{j_1, j_2+1}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1, j_2-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned} \tag{4}$$

После подстановки (4) в первое уравнение получается формула для расчета  $q_{j_1, j_2}^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha}{j} + \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) q_{j_1, j_2}^{n+1} &= \left( \frac{\alpha}{j} - \frac{1}{(\Delta t)^2} \right) q_{j_1, j_2}^{n-1} + \frac{2}{(\Delta t)^2} q_{j_1, j_2}^n + \frac{2\alpha}{\Delta t} (\omega_{j_1, j_2}^{n-1} - \omega_{j_1, j_2}^n) + \\ &+ \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{q_{j_1+1, j_2}^n - 2q_{j_1, j_2}^n + q_{j_1-1, j_2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{q_{j_1, j_2+1}^n - 2q_{j_1, j_2}^n + q_{j_1, j_2-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) - \\ &- \frac{\alpha \gamma \Delta t}{j} \left( \frac{\omega_{j_1+1, j_2}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1-1, j_2}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{j_1, j_2+1}^n - 2\omega_{j_1, j_2}^n + \omega_{j_1, j_2-1}^n}{(\Delta y)^2} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, на новом слое по времени нужно сначала решать уравнение (5) для  $q$ , а затем уравнение (4) для  $\omega$  при заданных начальных данных и граничных условиях.

**Исследование устойчивости схемы**

Пусть точное решение конечно-разностной схемы выглядит следующим образом:

$$q_{j_1, j_2}^n = \lambda^n \hat{q} e^{i(j_1 \alpha_1 + j_2 \alpha_2)}, \quad \omega_{j_1, j_2}^n = \lambda^n \hat{\omega} e^{i(j_1 \alpha_1 + j_2 \alpha_2)}.$$

Подставим его в первое уравнение системы (2):

$$\hat{q} \frac{\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + \lambda^{n-1}}{(\Delta t)^2} e^{i(j_1 \alpha_1 + j_2 \alpha_2)} + \alpha \hat{\omega} \frac{\lambda^{n+1} - \lambda^{n-1}}{\Delta t} e^{i(j_1 \alpha_1 + j_2 \alpha_2)} =$$

$$= \frac{\alpha}{\rho} \hat{q} \lambda^n \left( \frac{e^{i((j_1+1)\alpha_1+j_2\alpha_2)} - 2e^{i(j_1\alpha_1+j_2\alpha_2)} + e^{i((j_1-1)\alpha_1+j_2\alpha_2)}}{(\Delta x)^2} + \frac{e^{i(j_1\alpha_1+(j_2+1)\alpha_2)} - 2e^{i(j_1\alpha_1+j_2\alpha_2)} + e^{i(j_1\alpha_1+(j_2-1)\alpha_2)}}{(\Delta y)^2} \right).$$

После деления обеих частей уравнения на  $\lambda^n e^{i(j_1\alpha_1+j_2\alpha_2)}$  ( $\lambda \neq 0$ ), получим:

$$\hat{q} \frac{\lambda - 2 + 1/\lambda}{(\Delta t)^2} + \hat{\omega} \alpha \frac{\lambda - 1/\lambda}{\Delta t} = \hat{q} \frac{\alpha}{\rho} \left( \frac{e^{i\alpha_1} - 2 + e^{-i\alpha_1}}{(\Delta x)^2} + \frac{e^{i\alpha_2} - 2 + e^{-i\alpha_2}}{(\Delta y)^2} \right).$$

Упростим выражение

$$\hat{q} \left( \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{(\Delta t)^2} + 4 \frac{\alpha}{\rho} \lambda \left( \frac{\sin^2(\alpha_1/2)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2(\alpha_2/2)}{(\Delta y)^2} \right) \right) + \hat{\omega} \alpha \frac{\lambda^2 - 1}{\Delta t} = 0.$$

Проведя аналогичные выкладки для второго уравнения системы (2), получим:

$$\hat{\omega} \left( \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{(\Delta t)^2} + 4 \frac{\gamma}{j} \lambda \left( \frac{\sin^2(\alpha_1/2)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2(\alpha_2/2)}{(\Delta y)^2} \right) \right) - \hat{q} \frac{1}{j} \frac{\lambda^2 - 1}{\Delta t} = 0.$$

Для получения характеристического уравнения составим матрицу из коэффициентов при  $\hat{q}$  и  $\hat{\omega}$ :

$$\begin{vmatrix} \frac{(\lambda-1)^2}{(\Delta t)^2} + 4 \frac{\alpha}{\rho} \lambda \left( \frac{\sin^2(\alpha_1/2)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2(\alpha_2/2)}{(\Delta y)^2} \right) & \alpha \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\Delta t} \\ -\frac{1}{j} \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\Delta t} & \frac{(\lambda-1)^2}{(\Delta t)^2} + 4 \frac{\gamma}{j} \lambda \left( \frac{\sin^2(\alpha_1/2)}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2(\alpha_2/2)}{(\Delta y)^2} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Введя обозначения

$$A = \frac{\sin^2 \alpha_1/2}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2 \alpha_2/2}{(\Delta y)^2}, \quad a = \frac{\alpha}{\rho} A (\Delta t)^2, \quad b = \frac{\gamma}{j} A (\Delta t)^2, \quad c = \frac{\alpha}{j} (\Delta t)^2,$$

вычислим определитель

$$\begin{aligned} (\lambda-1)^4 + 4\lambda(\lambda-1)^2(a+b) + 16\lambda^2ab + (\lambda^2-1)^2c &= 0, \\ (1+c)(\lambda^2-1)^2 + 4\lambda(\lambda-1)^2(a+b-1) + 16\lambda^2ab &= 0. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим три случая при разных значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$ :

$$1). \text{ Если } b=0, \text{ то } (1+c)(\lambda+1)^2 + 4\lambda(a-1) = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda \left( 1 - 2 \frac{1-a}{1+c} \right) + 1 = 0,$$

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad \left( 1 - 2 \frac{1-a}{1+c} \right)^2 - 1 \leq 0, \quad -1 \leq 1 - 2 \frac{1-a}{1+c} \leq 1, \quad 2 \geq 2 \frac{1-a}{1+c} \geq 0, \quad a \leq 1.$$

Следовательно, в этом случае получим условие устойчивости  $\forall \alpha_1, \alpha_2$ :

$$\frac{\alpha}{\rho} (\Delta t)^2 \leq \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right)^{-1}.$$

2). Если  $a=0$ , то  $(1+c)(\lambda+1)^2 + 4\lambda(b-1) = 0$ , и аналогично предыдущему случаю, получим, что  $b \leq 1$ . Условие устойчивости выглядит следующим образом:

$$\frac{\gamma}{j} (\Delta t)^2 \leq \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right)^{-1}.$$

3). Если  $a+b=1$ , то  $(1+c)(\lambda^2-1)^2 + 16\lambda^2ab = 0$ . Сделаем замену  $z = \lambda^2$ , получим

$$z^2 - 2z \left( 1 - 8 \frac{ab}{1+c} \right) + 1 = 0, \quad |z_1| = |z_2| = 1, \quad \left( 1 - 8 \frac{ab}{1+c} \right)^2 - 1 \leq 0, \quad -1 \leq 1 - 8 \frac{ab}{1+c} \leq 1,$$

$$4ab \leq 1 + c, \quad 4ab \leq (a + b)^2 + c, \quad 0 \leq (a - b)^2 + c.$$

Последнее условие выполняется автоматически. Условие  $a + b = 1$  означает, что

$$\left( \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{j} \right) (\Delta t)^2 = \left( \frac{\sin^2 \alpha_1 / 2}{(\Delta x)^2} + \frac{\sin^2 \alpha_2 / 2}{(\Delta y)^2} \right)^{-1}.$$

При таком выборе шага  $|\lambda| = 1$  для заданных значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

В общем случае получается следующее условие устойчивости:

$$\left( \frac{\alpha}{\rho} + \frac{\gamma}{j} \right) (\Delta t)^2 \leq \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right)^{-1}.$$

### Параллельная программа

Описанный выше алгоритм для численного решения системы уравнений (2) по формулам (4), (5), реализован в виде параллельной программы. Она написана на языке Си с применением технологии CUDA, которая позволяет существенно увеличить вычислительную производительность благодаря использованию графических ускорителей видеокарт. GPU (Graphical Processing Unit) ориентирован на выполнение программ с большим объемом вычислений. За счет большого количества параллельно работающих процессорных ядер, обычный компьютер превращается в суперкомпьютер со скоростью вычислений в сотни раз выше, чем ПК, использующий лишь вычислительную мощность центрального процессора (CPU).

Все вычисления производятся на GPU. Расчетная область разбивается на квадратные блоки, содержащие одинаковое количество нитей. Каждый блок представляет независимый набор взаимодействующих между собой нитей, которые из разных блоков не могут взаимодействовать между собой. Благодаря идентификаторам, имеющимся в CUDA, каждой нити ставится в соответствие ячейка разностной сетки. В параллельном режиме нити графического устройства выполняют однотипные операции в ячейках по расчету решения.

Параллельная программа имеет следующую структуру:

- задание размерностей конечно-разностной сетки и всех используемых констант (на CPU);
- описание одномерных массивов для касательного напряжения и угловой скорости (на CPU);
- задание начальных данных для этих величин в узлах конечно-разностной сетки (на CPU);
- описание событий start и stop для замера времени выполнения программы на GPU, начало замера времени, начало параллельной части работы программы;
- копирование необходимых для расчетов констант из CPU в GPU;
- описание массивов для угловой скорости и касательного напряжения, а также для всех необходимых вспомогательных величин, выделение под них памяти (на GPU);
- копирование данных из CPU в GPU (массивов искомых величин);
- задание переменных типа dim3 для количества блоков в сетке и количества нитей в каждом из таких блоков (на GPU);
- основной расчетный цикл по времени, в котором последовательно выполняются процедуры-ядра (на GPU):
- задание граничных условий в направлении  $x$ ,
- задание граничных условий в направлении  $y$ ,
- решение системы уравнений для касательного напряжения и угловой скорости с помощью конечно-разностной схемы “крест”, (после выполнения ядер производится барьерная синхронизация, чтобы обеспечить завершение вычислений каждой нитью до начала выполнения следующих вычислений);
- копирование результатов счета из GPU в CPU (массивов угловой скорости и касательного напряжения) в контрольных точках (на некоторых шагах по времени);
- освобождение памяти переменных на GPU;
- окончание замера времени работы на GPU, печать этого времени, уничтожение событий start и stop, завершение параллельной части работы программы;
- освобождение памяти переменных на CPU, завершение работы программы.

### Результаты расчетов

Для демонстрации работы параллельной программы выполнена серия расчетов на высокопроизводительном вычислительном сервере Flagman с графическими вычислителями Tesla C2050 в Институте вычислительного моделирования СО РАН (общее число потоковых ядер CUDA на сервере – 3584).

Расчеты проводились для жидкого кристалла 5ЦБ со следующими параметрами:  $\rho = 1022 \text{ кг/м}^3$ ,  $j = 1.33 \cdot 10^{-10} \text{ кг/м}$ ,  $\alpha = 0.161 \text{ ГПа}$ ,  $\gamma = 1 \cdot 10^{-5} \text{ Н}$ .

На рис. 1 приведены линии уровня касательного напряжения в разные моменты времени для задачи с начальными данными:

$$\omega|_{t=0} = \omega_0, \quad q|_{t=0} = 0, \quad \partial\omega/\partial t|_{t=0} = 0, \quad \partial q/\partial t|_{t=0} = -2\alpha\omega_0$$

и нулевыми граничными условиями  $\bar{q} = \bar{\omega} = 0$ . Расчеты проведены на квадратной области  $100 \text{ мкм} \times 100 \text{ мкм}$ . Размерность конечно-разностной сетки  $1024 \times 1024$  ячеек.

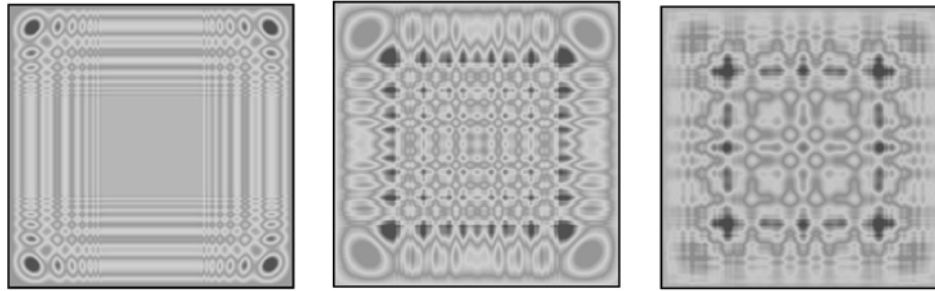


Рис. 1. Заданная начальная угловая скорость  $\omega_0$ : линии уровня касательного напряжения (1000-й, 2500-й и 4000-й шаги по времени)

На рис. 2 представлены результаты расчетов для задачи о действии трех П-образных импульсов касательного напряжения на частях боковых границ расчетной области. Время действия каждого импульса и промежутков времени между ними 8 нс. Заданы нулевые начальные данные. Граничные условия на левой и правой границах:  $q = \bar{q}$ , если  $|y - y_c| \leq l$ ; и  $q = 0$ , если  $|y - y_c| > l$ ;  $\partial\omega/\partial x = 0$ . Здесь  $y_c$  – центр зоны, где действует нагрузка,  $l$  – радиус этой зоны. В расчетах  $y_c = 20 \text{ мкм}$ ,  $l = 10 \text{ мкм}$ . На верхней и нижней границах заданы условия периодичности. Расчеты проведены на прямоугольной области  $100 \text{ мкм} \times 40 \text{ мкм}$ . Размерность сетки  $2560 \times 1024$  ячеек.

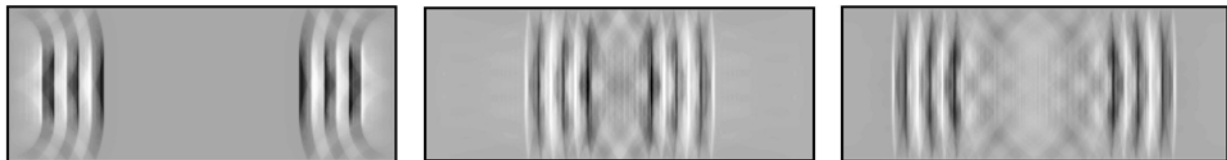


Рис. 2. Три П-образных импульса касательного напряжения на боковых границах: линии уровня касательного напряжения (1000-й, 3000-й и 3500-й шаги по времени)

На рис. 3 приведены результаты для задачи о периодическом действии касательного напряжения на части границы. Граничные условия на нижней границе:  $q = \bar{q} \sin(2\pi\nu t)$ , если  $|x - x_c| \leq l$ ; и  $q = 0$ , если  $|x - x_c| > l$ ;  $\partial\omega/\partial y = 0$ . Верхняя граница закреплена, на боковых заданы условия периодичности. Частота  $\nu$  в расчетах принималась равной  $\nu_* = 1/t_*$ , где  $t_* = \pi\sqrt{j/\alpha}$  – период осцилляций, и  $0.5\nu_*$ . Размерность сетки  $2048 \times 1024$  ячеек.

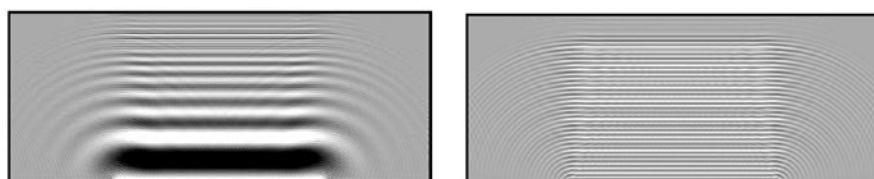


Рис. 3. Периодическое действие касательного напряжения: линии уровня угловой скорости ( $\nu = \nu_*$  и  $\nu = 0.5\nu_*$ , 4000-й шаг по времени)



**Заключение**

В рамках акустического приближения модели жидкого кристалла получена система уравнений второго порядка для касательного напряжения и угловой скорости с учетом моментных взаимодействий. Разработан алгоритм численного решения этой системы, который реализован в виде параллельной программы на языке Си по технологии CUDA с использованием графических ускорителей видеокарт. Проведены тестовые расчеты, демонстрирующие работу программы.

Литература:

1. Ericksen, J. L. Conservation laws for liquid crystals // Trans. Soc. Rheol. — 1961. — V. 5. P. 23–34.
2. Leslie, F. M. Some constitutive equations for liquid crystals // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — V. 28. — P. 265–283.
3. Аэро, Э. Л., Булыгин А. Н. Уравнения движения нематических жидких кристаллов // Прикл. матем. и механ. — 1971. — Т. 35, вып. 5. — с. 879–891.
4. Садовский, В. М., Садовская О. В. Об акустическом приближении термомеханической модели жидкого кристалла // Физическая мезомеханика. — 2013. — Т. 16, № 3. — с. 55–62.
5. Sadvovskii, V. M. Equations of the dynamics of a liquid crystal under the influence of weak mechanical and thermal perturbations // AIP Conf. Proc. — 2014. — V. 1629. — P. 311–318.
6. Sadvovskaya, O. V. Numerical simulation of the dynamics of a liquid crystal in the case of plane strain using GPUs // AIP Conf. Proc. — 2014. — V. 1629. — P. 303–310.
7. Смолехо, И. В. Параллельная реализация алгоритма для описания термоупругих волн в жидких кристаллах // Молодой ученый. Часть I. — 2015. № 11 (96). — с. 107–112.

**Комбинаторные приложения треугольника Паскаля**

Соловьева Ольга Александровна, студент

Арзамасский филиал Нижегородского государственного университета имени Н. И. Лобачевского

Одним из самых известных и занимательных математических объектов можно назвать треугольник Паскаля, который представляет собой бесконечную числовую таблицу, имеющую треугольную форму и сформированную по следующему принципу: по боковым сторонам стоят единицы и каждое число, кроме этих боковых единиц, представляет собой сумму двух предшествующих чисел. В данном виде термин «треугольник Паскаля» был обнаружен в сочинении Блеза Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», вышедшем в свет в 1653 году [4, с. 27].

Треугольник Паскаля, с одной стороны, является достаточно простой конфигурацией чисел, понятной обучающимся, но, с другой — он привлекает множеством интересных фактов, связывая с их помощью совершенно разные разделы математики. В данной статье рассматриваются моменты эффективного применения арифметического треугольника в курсе комбинаторики и теории вероятности.

Зная определение понятия операции Паскаля, можно выразить биномиальные коэффициенты. Они определяются следующим образом: бином  $(1 + y)$  возводят в степени 0, 1, 2, ... и выстраивают получающиеся многочлены по возрастанию степени  $y$ . Получают:

$$(1 + y)^0 = 1 \tag{1.1}$$

$$(1 + y)^1 = 1 + y \tag{1.2}$$

$$(1 + y)^2 = (1 + y)(1 + y) = (1 + 2y + y^2) \tag{1.3}$$

$$(1 + y)^3 = (1 + y)^2(1 + y) = (1 + 3y + 3y^2 + y^3) \tag{1.4}$$

В итоге общей формулой для каждого целого  $m \geq 0$  является выражение вида

$$(1 + y)^m = u_0 + u_1y + \dots + u_p y^p \tag{1.5}, \text{ где } u_0, u_1, \dots, u_p \text{ — некоторые числа.}$$

Многочлен, который расположен в правой части этого соотношения, называют разложением бинома для показателя  $m$ . Его коэффициенты (их количество равно  $p$ ) зависят от  $m$ . Коэффициент при  $y^n$  в разложении бинома для показателя  $m$  обозначается через  $\binom{m}{n}$ . Числа  $\binom{m}{n}$  носят название биномиальных коэффициентов [4, с.27]. Заметим, что соотношение (1.5) эквивалентно равенству:

$$(1 + y)^m = \binom{m}{0} + \binom{m}{1}y + \binom{m}{2}y^2 + \dots + \binom{m}{p}y^p$$

Все строки коэффициентов совпадают с соответствующими строками треугольника Паскаля, так как строка коэффициентов разложения для показателя 0 совпадает с нулевой строкой Паскаля. По этой причине числа  $\binom{m}{n}$  определены при  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, m$ , причем  $\binom{m}{n} = W_m^n$  (1.6).

Таким образом, можно выразить биномиальные коэффициенты через операцию Паскаля:  $(1 + y)^m = W_m^0 + W_m^1y + \dots + W_m^ny^n + \dots + W_m^my^m$ . (1.7)

Эту формулу назовем биномом Ньютона [4, с.30].

*Пример 1.* Возведите в степень:  $(u - v)^5$  [1].

*Решение.* Имеем  $(a + b)^n$ , где  $a = u$ ,  $b = -v$ , и  $n = 5$ . Необходимо использовать 6-й ряд треугольника Паскаля: 1, 5, 10, 10, 5, 1. Тогда получаем  $(u - v)^5 = [u + (-v)]^5 = 1(u)^5 + 5(u)^4(-v)^1 + 10(u)^3(-v)^2 + 10(u)^2(-v)^3 + 5(u)(-v)^4 + 1(-v)^5 = u^5 - 5u^4v + 10u^3v^2 - 10u^2v^3 + 5uv^4 - v^5$ . Подчеркнем, что знаки членов колеблются между + и -. Когда степень  $-v$  является нечетным числом, знак перед ней отрицательный.

*Пример 2.* Возведите выражение  $(2z + 3/z)$  в четвертую степень.

*Решение.* Аналогично примеру 1, определяем для выражения  $(a + b)^n$   $a = 2z$ ,  $b = 3/z$ , и  $n = 4$ . Применяем 5-й ряд треугольника Паскаля:

1, 4, 6, 4, 1. Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \left(2z + \frac{3}{z}\right)^4 &= 1(2z)^4 + 4(2z)^3\left(\frac{3}{z}\right)^1 + 6(2z)^2\left(\frac{3}{z}\right)^2 + 4(2z)^1\left(\frac{3}{z}\right)^3 + 1\left(\frac{3}{z}\right)^4 = 1(16z^4) + \\ &4(8z^3)\left(\frac{3}{z}\right) + 6(4z^2)\left(\frac{9}{z^2}\right) + 4(2z)\left(\frac{27}{z^3}\right) + 1\left(\frac{81}{z^4}\right) = 16z^4 + 96z^2 + 216 + 216z^{-2} + 81z^{-4} \end{aligned}$$

Треугольник Паскаля включает и ряд свойств о сочетаниях и количестве подмножества данного множества. Рассмотрим  $m$  — элементное множество. Известно, что любую  $n$  — элементную его часть называют сочетанием из данных  $m$  элементов по  $n$  и обозначают  $C_m^n$ . Данное выражение имеет смысл при  $m=0, 1, 2, \dots$  и  $0 \leq n \leq m$ . При  $n > m$  оно равно 0. Число всех частей  $m$  — элементного множества обозначим  $C_m$ . Таким образом,  $C_m = C_m^0 + C_m^1 + \dots + C_m^m$  (1.8) [4, с.34].

Числа  $C_m^n$  есть не что иное, как члены арифметического треугольника. Строка  $C_{m+1}^0, C_{m+1}^1, \dots, C_{m+1}^{m+1}$  (1.9) получена из  $C_m^0, C_m^1, \dots, C_m^m$  (1.10) по закону Паскаля. При  $m=0$   $C_0^0$  совпадает с нулевой строкой Паскаля. При любом  $m$  строка (1.10) совпадает с  $m$ -й строкой Паскаля. Следовательно,  $C_m^n = W_m^n$  (1.11). Соотношения (1.8) и (1.11) демонстрируют, что число всех частей  $m$ -элементного множества является суммой членов  $m$  — й строки Паскаля и равна  $2^m$ , то есть  $C_m = 2^m$  (1.12). [4, с.40].

*Пример 3.* Сколько подмножеств имеет множество  $\{*, ), ^, \#, @\}$ ?

*Решение.* Множество имеет 5 элементов, тогда число подмножеств равно 25, или 32.

*Пример 4.* Сеть кафе «Матрена» предлагает следующую начинку для блинчиков: {мясо, творог, варенье, мед, кленовый сироп, сгущенное молоко, сахарная пудра, шоколад, сливочный сыр}.

Сколько разных видов блинчиков может предложить «Матрена», исключая размеры блинчиков или их количество?

*Решение.* Начинки для каждого блинчика являются элементами подмножества множества всех возможных начинок, а пустое множество это блинчик без начинки. Общее число всевозможных блинчиков будет равно

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \dots + \binom{9}{9} = 2^9 = 512. \text{ Таким образом, «Матрена» может предложить 512 различных блин-}$$

чиков.

*Пример 5.* На почте выставлены на продажу 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора? [3].

Решение:  $C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56$  способов

В треугольнике Паскаля число, показывающее, сколькими способами можно выбрать  $k$  элементов из множества, содержащего  $n$  различных элементов, стоит на пересечении  $k$ -ой диагонали и  $n$ -ой строки. Найдем восьмую диагональ сверху и отсчитаем три числа по горизонтали. Получим число 56 (рис. 1).

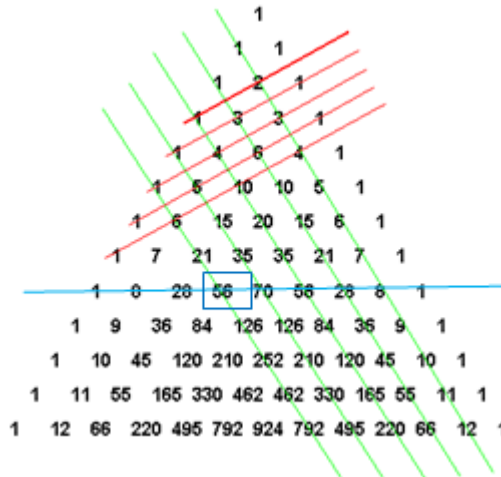


Рис. 1. Решение примера 5 с помощью треугольника Паскаля

Пример 6. На плоскости даны 11 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности. Сколько существует окружностей, каждая из которых проходит через три данные точки? [3].

Решение:  $C_{11}^3 = \frac{11!}{8! \cdot 3!} = 165$  способов (рис.2).

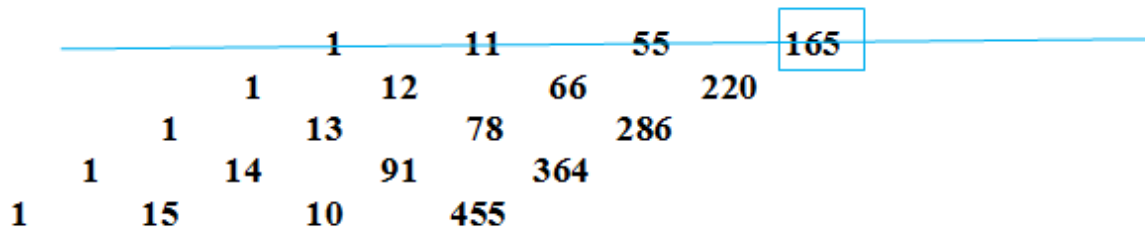


Рис. 2. Часть треугольника Паскаля, необходимая для решения примера 6

Три точки, не лежащие на одной прямой, составляют треугольник. Вокруг любого треугольника можно описать окружность и притом только одну, то есть вокруг данных треугольников — 165 окружностей.

Рассмотрим один из методов нахождения чисел  $W_m^a$  с использованием факториалов. Положим  $0! = 1$ , а для каждого целого  $a$   $a! = (a-1)! \cdot a$ . При  $a \geq 0$   $a! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot a$ . Операция Паскаля выражается через операцию взятия факториала и арифметические операции путем ряда рассуждений, связанных с формулой  $F_a^k = \frac{a!}{k!(a-k)!}$ , где  $a \geq 0, 0 \leq k \leq a$ .

В результате строка  $F_0^0$  является нулевой строкой Паскаля. Строку под номером  $(m+1)$   $F_{m+1}^0; F_{m+1}^1; \dots; F_{m+1}^{m+1}$  по закону Паскаля можно получить из  $m$ -ой строчки  $F_m^0; F_m^1; \dots; F_m^m$ . Значит, при каждом  $a=0, 1, 2, \dots$  строка  $F_a^0; F_a^1; \dots; F_a^a$  совпадет с  $a$ -строкой Паскаля и  $F_a^k = W_a^k$ . Отсюда  $W_a^k = \frac{a!}{k!(a-k)!}$  [4, с.27].

Пример 7. Возведите в степень:  $(p^2 - 2q)^5$ , применяя знания о связи треугольника Паскаля и факториалов [2].

Решение. Определим для  $(a + b)^n$   $a = p^2, b = -2q$ , и  $n = 5$ . Тогда, используя бином Ньютона, имеем:

$$\begin{aligned}
 (p^2 - 1q)^5 &= \binom{5}{0} (p^2)^5 + \binom{5}{1} (p^2)^4 (-2q) + \binom{5}{2} (p^2)^3 (-2q)^2 + \binom{5}{3} (p^2)^2 (-2q)^3 + \\
 &+ \binom{5}{4} p^2 (-2q)^4 + \binom{5}{5} (-2q)^5 = \frac{5!}{0!5!} p^{10} + \frac{5!}{1!4!} p^8 (-2q) + \frac{5!}{2!3!} p^6 (4q^2) + \frac{5!}{3!2!} p^4 (-8q^3) + \\
 &+ \frac{5!}{4!1!} p^2 (16q^4) + \frac{5!}{5!0!} (-32q^5) = 1p^{10} + 5p^8(-2q) + 10p^6(4q^2) + 10p^4(-8q^3) + \\
 &+ 5p^2(16q^4) + 1(-32q^5)
 \end{aligned}$$

Наконец,  $(x^2 - 2y)^5 = x^{10} - 10x^8y + 40x^6y^2 - 80x^4y^3 + 80x^2y^4 - 32y^5$ .

*Пример 8.* Возведите в степень:  $(2/m + 3\sqrt{m})^4$ , используя факториалы.

*Решение.* Подставим в  $(a + b)^n$  следующие значения:  $a = 2/m$ ,  $b = 3\sqrt{m}$ , и  $n=4$ . Тогда, используя бином Ньютона, получим:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{m} + 3\sqrt{m}\right)^4 &= \binom{4}{0} \left(\frac{2}{m}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{2}{m}\right)^3 3\sqrt{m} + \binom{4}{2} \left(\frac{2}{m}\right)^2 (3\sqrt{m})^2 + \binom{4}{3} \left(\frac{2}{m}\right) (3\sqrt{m})^3 \\
 &+ \binom{4}{4} (3\sqrt{m})^4 \\
 &= \frac{4!}{0!4!} \left(\frac{16}{m^4}\right) + \frac{4!}{1!3!} \left(\frac{8}{m^3}\right) (3m^{1/2}) + \frac{4!}{2!2!} \left(\frac{4}{m^2}\right) (9m) + \frac{4!}{3!1!} \left(\frac{2}{m}\right) (27m^{3/2}) \\
 &+ \frac{4!}{4!0!} (81m^2)
 \end{aligned}$$

Таким образом,  $(2/m + 3\sqrt{m})^4 = 16/x^4 + 96/x^{5/2} + 216/x + 216x^{1/2} + 81x^2$ .

*Пример 9.* Найдите 5-й член в выражении  $(2c - 5d)^6$  [2]

*Решение.* Отметим, что  $5 = 4 + 1$ . Тогда  $k = 4$ ,  $a = 2c$ ,  $b = -5d$ , и  $n=6$ . Тогда 5-й член выражения имеет вид:

$$\binom{6}{4} (2c)^{6-4} (-5d)^4 = \frac{6!}{4!2!} (2c)^2 (-5d)^4 = 37,500c^2d^4$$

Резюмируя сказанное выше, подчеркнем, что применение треугольника Паскаля является одним из способов, благодаря которому производится построение решений различного типа комбинаторных заданий и задач на вычисление вероятности события. Обратим внимание, что применение арифметического треугольника на тематических уроках математики и факультативных занятиях позволит привнести творческие элементы в процесс выполнения заданий, стимулировать школьников к углубленному изучению комбинаторики и теории вероятности, что повысит уровень их активности и в итоге окажет положительное влияние на развитие интеллектуальных способностей и личностных качеств учащихся.

Литература:

1. Бином Ньютона. Биномиальное разложение с помощью треугольника Паскаля / [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.math10.com/ru/algebra/veroiatnosti/binominalnaya-teorema/binominalnaya-teorema.html> (дата обращения: 02.05.16)
2. Треугольник Паскаля / [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://gigabaza.ru/doc/68254.html> (дата обращения: 06.05.16)
3. Треугольник Паскаля в комбинаторных задачах / [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://nsportal.ru/ap/library/drugoe/2013/03/27/treugolnik-paskalya-v-kombinatornykh-zadachakh> (дата обращения: 10.05.16)
4. Успенский, В. А. Треугольник Паскаля [Текст] / В. А. Успенский // Популярная лекция по математике № 43. — М.: Наука, 1979. — с. 48

## Модели блочной среды для исследования колебательных процессов в структурно неоднородных средах

Ченцов Евгений Петрович, младший научный сотрудник  
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

### Введение

Анализ колебательных процессов в средах с блочной структурой имеет большой практический интерес. Обычно исследуется кирпичная кладка, которая представляет классическую блочную среду с относительно толстыми податливыми прослойками. Большая часть приложений в строительстве посвящена разработкам дискретных и непрерывных моделей, имитирующих подобную среду и позволяющих воспроизвести такие явления, как появление трещин и совместное проскальзывание, отвечающие за появление структурных разрушений в результате землетрясения [1]. Блочные структуры здесь могут представляться в виде набора блоков или частиц, являющихся идеализацией их прерывистой природы, определяющей механическое поведение системы [2].

Не менее широко модель блочной среды используется для описания волновых процессов в горных породах [3, 4] и трещиноватых и пористых средах, имеющих инородные включения [5]. Находящиеся в породе трещины разделяют среду на блоки, имеющие схожие механические характеристики. Свойства модели блочной среды, состоящей из абсолютно жестких блоков, которые разделены деформируемыми прослойками, представлены в [6]. В работе [7] исследуются закономерности проявления запредельных деформаций, протекающих в реальных иерархически блочных массивах скальных горных пород. Распространение волн в трансверсально-изотропной упругой среде, каждый период которой разделен на несколько различных частей границами с контактом проскальзывания, изучалось в работе [8]. Влияние толщины прослоек на волновые свойства блочной среды исследовалось в [9, 10]. Показано, что при малой толщине прослоек в модели блочной среды, состоящей из упругих блоков, применима классическая теория изотропного континуума, в то время как для относительно толстых прослоек ярко выражен эффект анизотропии. Анализ влияния типа прослоек на свойства блочной среды проведен в [11], где модели деформирования материала прослоек строились на основе реологического метода. Поведение неконсолидированных гранулированных сред, характерных для нефтяных коллекторов, исследовано в [12].

В данной работе строятся модели блочной среды с прослойками, имеющими различные свойства: упругая прослойка, вязкоупругая прослойка и разномодульная упругая прослойка, по-разному сопротивляющаяся растяжению и сжатию.

### Модель блочной среды с упругими прослойками

Рассмотрим случай плоской деформации массива блочной структуры, составленного из прямоугольных упругих блоков со сторонами  $h_1$  и  $h_2$ , и межблочными прослойками толщиной  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Стороны блоков параллельны осям  $x_1$  и  $x_2$  (рис. 1). Движение каждого блока задается системой уравнений однородной изотропной упругой среды:

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_1 &= \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2}, & \dot{\sigma}_{12} &= \rho c_2^2 (v_{2,1} + v_{1,2}), \\ \rho \dot{v}_2 &= \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2}, & \dot{\sigma}_{11} &= \rho c_1^2 (\dot{v}_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{2,2}, \\ & & \dot{\sigma}_{22} &= \rho c_1^2 (v_{1,1} + v_{2,2}) - 2\rho c_2^2 v_{1,1}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $\rho$  – плотность материала блока,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости продольных и поперечных упругих волн. Система записана относительно проекций вектора скорости  $v_k$  и компонента тензора напряжения  $\sigma_{jk}$ . Координаты  $x_1$  и  $x_2$  являются локальными в блоке с началом координат в левом нижнем углу блока.

<sup>1</sup> Автор благодарит профессора Садовского В.М. за оказанное содействие в написании статьи. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 16-31-00078)..

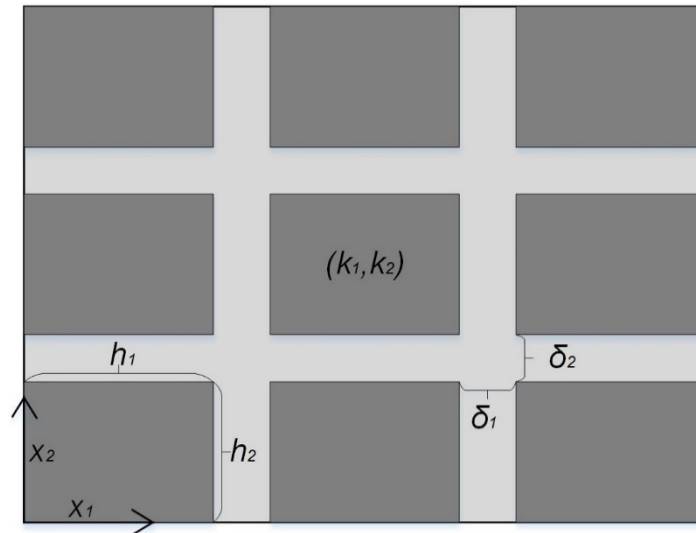


Рис. 1. Схема блочной среды

Упругая прослойка между стоящими рядом в горизонтальном направлении блоками с индексами  $(k_1, k_2)$  и  $(k_1 + 1, k_2)$  описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, учитывающей массу, а также продольную и поперечную жесткость прослойки:

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} &= \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ - \dot{\sigma}_{11}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{11}^+ + \dot{\sigma}_{11}^-}{2} &= \rho' c_1'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_1}, \\ \rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} &= \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ - \dot{\sigma}_{12}^-}{\delta_1}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_1}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\rho', c_1', c_2'$  – плотность и скорости продольных и поперечных волн в прослойке. Упругая прослойка между стоящими рядом в вертикальном направлении блоками с индексами  $(k_1, k_2)$  и  $(k_1, k_2 + 1)$  описывается с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \rho' \frac{\dot{v}_2^+ + \dot{v}_2^-}{2} &= \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ - \dot{\sigma}_{22}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{22}^+ + \dot{\sigma}_{22}^-}{2} &= \rho' c_1'^2 \frac{v_2^+ - v_2^-}{\delta_2}, \\ \rho' \frac{\dot{v}_1^+ + \dot{v}_1^-}{2} &= \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ - \dot{\sigma}_{12}^-}{\delta_2}, & \frac{\dot{\sigma}_{12}^+ + \dot{\sigma}_{12}^-}{2} &= \rho' c_2'^2 \frac{v_1^+ - v_1^-}{\delta_2}. \end{aligned} \tag{3}$$

В уравнениях (3) индексы «+» и «-» относятся к границам взаимодействующих блоков. Данные уравнения термодинамически согласованы с уравнениями (1) в том смысле, что для блочной среды в целом выполняется закон сохранения энергии, где сумма кинетической и потенциальной энергий блочной среды равна сумме кинетической и потенциальной энергий блоков и прослоек. Вопросы термодинамической согласованности для моделей, описывающих поведение различных сплошных сред, обсуждались в монографии [13]. Отсутствие термодинамической согласованности может привести к нежелательным и ложным эффектам при верификации модели.

Для численного решения системы (1)–(3) при заданных начальных данных и граничных условиях разработан вычислительный алгоритм, основанный на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным. Двуциклическое расщепление в блоках предполагает четыре последовательно выполняемых этапа, суть которых заключается в решении одномерных систем. В отличие от обычного одноциклического метода он имеет второй порядок аппроксимации по пространственным координатам и времени в случае, если схемы второго порядка используются для решения одномерных систем уравнений. Одномерные системы в блоках решаются на основе схемы распада разрыва Годунова с равномерной сеткой и максимально возможным шагом по времени, определяемым критерием Куранта-Фридрихса-Левы:  $\Delta t = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2 \} / c_1$ . Учитывая выбранный шаг по времени, схема для продольных волн как минимум в одном направлении не имеет порожденной аппроксимацией диссипации энергии и, тем самым, не приводит к нефизическому затуханию амплитуд бегущих волн. Диссипация энергии поперечных волн может быть уменьшена за счет применения процесса реконструкции. Для уравнений (2) и (3) используется метод Иванова [14]. В соответствии с данным методом, шаг сетки по времени вычисляется в два этапа согласно обозначениям, представленным на рис. 2.

На этапе «предиктор», основываясь на решении с предыдущего временного слоя, находятся скорости  $v_k^\pm$  и напряжения  $\sigma_{jk}^\pm$ , относящиеся к боковым граням прослойки на промежуточном временном слое. На этапе «корректор» значения  $\hat{v}_k = (v_k^+ + v_k^-) / 2$  и  $\hat{\sigma}_{jk} = (\sigma_{jk}^+ + \sigma_{jk}^-) / 2$ , относящиеся к верхнему временному слою, находятся из уравнений, аппроксимирующих (2) и (3). Опуская индексы, уравнения отдельно для продольных и поперечных волн могут быть записаны в виде

$$\rho' = \frac{\hat{v} - v}{\Delta t} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\Delta t} = \rho' c'^2 \frac{v^+ - v^-}{\delta}. \quad (4)$$

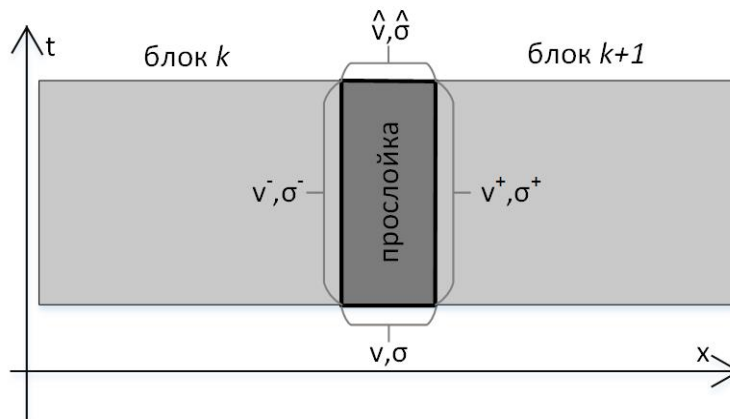


Рис. 2. Обозначения в численной схеме

Значения  $v^\pm$  и  $\sigma^\pm$  на промежуточном временном слое находятся с применением замыкающих уравнений

$$\sigma^+ + \sigma^- = \hat{\sigma} + \sigma, \quad v^+ + v^- = \hat{v} + v, \quad (5)$$

которые гарантируют отсутствие схемной диссипации энергии. Последние два уравнения получены из отношений на бихарактеристики системы (1) и имеют вид

$$zv^+ + \sigma^+ = R^+, \quad zv^- - \sigma^- = S^-, \quad (6)$$

где  $z = \rho c$  – акустический импеданс среды, а значения инвариантов Римана  $R^+$  и  $S^-$  берутся с нижнего временного слоя в приграничных ячейках смежных блоков. Используя метод Иванова, можно предварительно задать заранее определенную диссипацию энергии.

**Модель вязкоупругости Пойнтинга–Томсона**

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние блочной среды, аналогичное состоянию в первой модели, с той разницей, что между упругими блоками находится прослойка с вязкоупругими свойствами, соответствующими реологической схеме, представленной на рис. 3. Упругость такой системы является «совершенной» в том смысле, что вся деформация полностью исчезает при разгрузке и является поэтому «упругой» [15]. Данная механическая модель впервые была предложена Пойнтингом и Томсоном с целью объяснения поведения стеклянных волокон. При постоянном напряжении в подобной системе действующая на элемент сила постепенно релаксирует, вызывая рост общей деформации. После прекращения действия силы часть упругой энергии освобождается мгновенно, а оставшаяся часть освобождается постепенно за счет релаксации напряжения, передаваемого вязким элементом. Это означает, что подобная система сочетает в себе свойства мгновенной и задержанной упругости. Как частный случай, из нее следует две основные модели вязкоупругих сред: модель Максвелла и модель Кельвина–Фойхта.

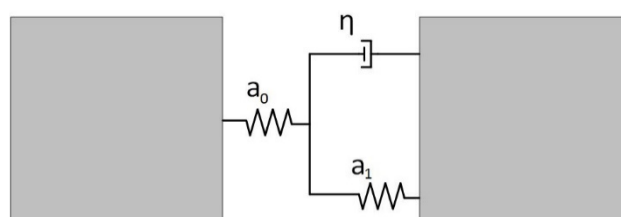


Рис. 3. Реологическая схема Пойнтинга–Томсона

Деформацию левой пружины определим с помощью равенства  $\varepsilon_0 = a_0\sigma$ , правой пружины – соотношением  $\varepsilon_1 = a_1s$ , где  $s$  означает упругое напряжение,  $a_1$  и  $a_2$  – коэффициенты упругости для пружин. Для вязкого элемента выполняется равенство  $\eta\dot{\varepsilon}_1 = \sigma - s$ , где  $\eta$  – модуль вязкости. Общее напряжение в системе и напряжение в правой пружине описываются уравнениями  $\sigma = s + \eta(\dot{\varepsilon} - a_0\dot{\sigma})$  и  $a_1\dot{s} = \dot{\varepsilon} - a_0\dot{\sigma}$ , соответственно. Учитывая, что для вязкого элемента верно выражение  $\sigma - s = \eta a_1\dot{s}$ , легко выписываются определяющие уравнения напряженно-деформированного состояния системы:

$$\sigma = s + \eta a_1\dot{s}, \quad a_1\dot{s} = \dot{\varepsilon} - a_0\dot{\sigma}. \tag{7}$$

Уравнение баланса энергии преобразуется в виде суммы потенциальной и диссипативной частей энергии, соответственно:

$$\sigma\dot{\varepsilon} = (s + \eta a_1\dot{s})a_1\dot{s} + \sigma a_0\dot{\sigma} = \frac{d}{dt} \frac{a_0\sigma^2 + a_1s^2}{2} + \eta a_1^2(\dot{s})^2, \tag{8}$$

а, согласно представленной реологической схеме, уравнения прослойки будут иметь вид:

$$a_1 \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - a_0 \frac{d}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2}, \tag{9}$$

$$\frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{s^+ + s^-}{2} + \eta a_1 \frac{d}{dt} \frac{s^+ + s^-}{2}.$$

Для решения задачи также использовалась бездиссипативная разностная схема Иванова. Численный метод будет иметь пять неизвестных:  $v^+, v^-, \sigma^+, \sigma^-, s^+ + s^-$ . Уравнения прослойки аппроксимируются следующим образом:

$$a_1 \frac{\hat{s} - s}{\tau} = \frac{v^+ - v^-}{\delta} - a_0 \frac{\hat{\sigma} - \sigma}{\tau}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{s^+ + s^-}{2} + \eta a_1 \frac{\hat{s} - s}{\tau}. \tag{10}$$

Уравнение, описывающее состояние в блоке, примет вид:

$$\rho_0 \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}. \tag{11}$$

Аналогично модели с упругими прослойками; дополнительные уравнения получены за счет требования выполнения уравнения баланса энергии и имеют вид (5), за тем исключением, что к ним добавляется замыкающее уравнение для упругих напряжений

$$s^+ + s^- = \hat{s} + s. \tag{12}$$

Выполнимость уравнения баланса энергии в дискретном виде, гарантирующего устойчивость счета, легко показать, используя (11) и соотношения (5), (12). Уравнения на характеристики для схемы в блоках имеют вид (6). В результате преобразований получена система из пяти уравнений, где первые три уравнения аппроксимируют поведение блоков и прослоек, а последние два – модифицированные уравнения на бихарактеристики (6). Представленная разностная схема является неявной и, безусловно, устойчивой. Используя введенные обозначения

$$X = \frac{(2\eta a_1 + \tau)(2a_0 z \delta \sigma + \tau(R^+ - S^-)) + 2a_1 \tau z \delta s}{(2\eta a_1 + \tau)(a_0 z \delta + \tau) + a_1 \tau z \delta}, \quad Y = \frac{\rho_0 \delta (R^+ + S^-) - 2v \rho_0 z \delta}{\rho_0 \delta + \tau z}, \tag{13}$$

решение системы может быть представлено в виде:

$$v^- = \frac{S^- + 1/2(X - Y)}{z}, \quad \sigma^- = 1/2(X - Y),$$

$$v^+ = \frac{R^+ - 1/2(X + Y)}{z}, \quad \sigma^+ = 1/2(X + Y),$$

$$\hat{v} = \frac{v \rho_0 \delta + \tau(R^+ + S^- - z)}{\rho_0 \delta + \tau z}, \quad \hat{\sigma} = X - \sigma, \tag{14}$$

$$s^- + s^+ = \frac{4s \eta a_1 + \tau X}{2\eta a_1 + \tau},$$

$$\hat{s} = \frac{2s a_1 \eta + \tau(X - 1)}{2a_1 \eta + \tau}.$$

Построенная модель используется для поперечных волн, поскольку в продольных влияние вязкости пренебрежимо мало.



**Модель блочной среды с жестким контактом**

Построим теперь более общую модель распространения продольных волн, учитывающую контактное взаимодействие блоков. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние блочной среды, аналогичной первой модели, с той разницей, что между упругими блоками находится прослойка, по-разному сопротивляющаяся растяжению и сжатию. Свойства прослойки соответствуют реологической схеме, представленной на рис. 4. Наличие жесткого контакта в модели позволяет исключить случай, при котором часть одного блока может оказаться в другом блоке.

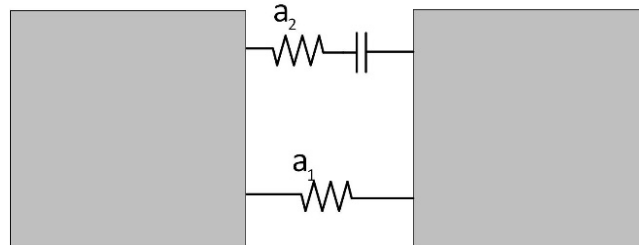


Рис. 4. Модель блочной среды с жестким контактом

Напряжение в системе можно описать в виде суммы  $\sigma = \sigma' + \sigma''$ , где  $\sigma'$  и  $\sigma''$  являются напряжениями в нижней и верхней пружинах, соответственно. Деформация системы представима в виде  $\varepsilon = \sigma''/a_2 + \varepsilon^c$ , где  $\varepsilon^c$  – деформация контакта. Наличие жесткого контакта означает, что система может находиться в одном из трех состояний: покоя (напряжение и деформация отсутствуют); замыкания контактов (дальнейшая деформация невозможна, значит,  $\varepsilon^c = 0, \sigma'' < 0$ ); при наличии деформации отсутствует напряжение ( $\varepsilon^c < 0, \sigma'' = 0$ ). Определяющее выражение запишем в виде  $(\tilde{\sigma} - \sigma'')\varepsilon^c \leq 0, \sigma'' \leq 0, \tilde{\sigma} \leq 0$  или  $\sigma'' = \pi(a_2\varepsilon)$ , где  $\pi$  – проектор на отрицательную полуось. Уравнения прослойки примут вид:

$$\rho' \frac{d}{dt} \frac{v^+ + v^-}{2} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = a_1\varepsilon + a_2\pi(\varepsilon), \tag{15}$$

а уравнение баланса энергии запишется

$$\frac{\rho'}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{v^+ + v^-}{2} \right)^2 + \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = \frac{(\sigma v)^+ - (\sigma v)^-}{\delta}. \tag{16}$$

Адаптируем схему Иванова под исследуемую модель, оставив прежними введенные ранее обозначения в схеме. Аппроксимируем уравнения прослойки выражениями

$$\rho' \frac{\hat{v} - v}{\tau} = \frac{\sigma^+ - \sigma^-}{\delta}, \quad \frac{\hat{\varepsilon} - \varepsilon}{\tau} = \frac{v^+ - v^-}{\delta}, \quad \frac{\sigma^+ + \sigma^-}{2} = a_1 \frac{\hat{\varepsilon} + \varepsilon}{2} + a_2 \pi \left( \frac{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}{2} \right). \tag{17}$$

Уравнения (17) дополняются уравнениями Иванова (5) и соотношениями на инварианты Римана (6). Система (5), (6), (18) удовлетворяет уравнению баланса энергии в дискретном виде, а численный алгоритм на каждом временном слое примет вид:

$$\begin{aligned} w &= \frac{\tau(R^+ - R^-) + 2z\delta\varepsilon}{z\delta + \tau a_1 + \tau a_2}, w < 0, & v^- &= \frac{\tau(\hat{v} + v) - \delta(w - 2\varepsilon)}{2\tau}, \\ w &= \frac{\tau(R^+ - R^-) + 2z\delta\varepsilon}{z\delta + \tau a_1}, w \geq 0, & v^+ &= \frac{\delta(w - 2\varepsilon) + \tau(\hat{v} + v)}{2\tau}, \\ \sigma^- &= zv^- - R^-, \quad \sigma^+ = R^+ - zv^+, & \hat{v} &= \frac{\tau(R^+ + R^-) - (z\tau + \rho'\delta)v}{z\tau + \rho'\delta}, \\ \hat{\varepsilon} &= w - \varepsilon, \end{aligned} \tag{18}$$

**Выводы**

В результате исследования построены модели как для случая с упругими прослойками, так и для сред с более сложными механическими свойствами. Так, модель Пойнтинга–Томсона учитывает вязкоупругие свойства прослоек, в то время как жесткий контакт исключает возможность проникновения одного блока в другой. Использование усложненных моделей позволяет более реалистично моделировать колебательные процессы в блочных средах.

## Литература:

1. Azevedo, J., Sincaian G., Lemos J.V. Seismic Behavior of Blocky Masonry Structures // *Earthquake Spectra*. — 2009. — V. 16, No. 2. — P. 337–365.
2. Lemos, J.V. Discrete Element Modeling of Masonry Structures // *International journal of Architectural Heritage: Conservation, Analysis, and Reseoration*. — 2007. — No. 1. — P. 190–213.
3. Айзенберг-Степаненко, М. В., Шер Е. Н. Моделирование волновых явлений в структурированных средах // *Физическая мезомеханика*. — 2007. — Т. 10, № 1. — с. 47–57.
4. Астафуров, С. В., Шилько Е. В., Псахье С. Г. Влияние стесненных условий на характер деформирования и разрушения блочных сред при сдвиговом нагружении // *Физическая механика*. — 2009. — Т. 12, № 6. — с. 23–32.
5. Молотков, Л. А. Об эффективной модели упругой блочной среды с проскальзыванием на границах // *Зап. научн. сем. ПОМИ*. — 1994. — № 218. — с. 96–117.
6. Сарайкин, В. А. Распространение низкочастотной составляющей волны в модели блочной среды // *Прикладная механика и техническая физика*. — 2009. — Т. 50, № 6. — с. 177–185.
7. Балек, А. Е. Управление напряженно-деформированным состоянием скального массива путем регулируемых подвижек консолидированных геоблоков // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. — 2005. — № 6. — с. 163–169.
8. Молотков, Л. А., Хило А. Е. Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды // *Зап. научн. сем. ЛОМИ*. — 1984. — № 140. — с. 105–122.
9. Садовский, В. М., Садовская О. В., Похабова М. А. Моделирование упругих волн в блочной среде на основе уравнений континуума Коссера // *Вычислительная механика сплошных сред*. — 2014. — Т. 7, № 1. — с. 52–60.
10. Sadvovskii, V. M., Sadvovskaya O. V. Modeling of elastic waves in a blocky medium based on equations of the Cosserat continuum // *Wave Motion*. — 2015. — V. 52. — P. 138–150.
11. Варыгина, М. П., Похабова М. А., Садовская О. В., Садовский В. М. Вычислительные алгоритмы для анализа упругих волн в блочных средах с тонкими прослойками // *Вычислительные методы и программирование*. — 2011. — Т. 12. — с. 435–442.
12. Гарагаш, И. А. Модель динамики фрагментированных сред с подвижными блоками // *Физическая мезомеханика*. — 2002. — Т. 5, № 5. — с. 71–77.
13. Годунов, С. К., Роменский Е. И. Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. — М.: Научная книга, 1998. — 280 с.
14. Иванов, Г. В., Волчков Ю. М., Богульский И. О., Анисимов С. А., Кургузов В. Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.
15. Рейнер, М. Реология // Под ред. Э. И. Григолюка. — М.: Наука, 1965. — 225 с.

## ФИЗИКА

### Математическая модель асинхронного двигателя с переменными $\Psi_R - I_S$ в системе абсолютных единиц на основе интегрирующих звеньев

Емельянов Александр Александрович, доцент;

Бескеткин Виктор Викторович, ассистент;

Авдеев Александр Сергеевич, студент;

Габзалилов Эльвир Фиргатович, студент;

Аюпов Вадим Илхамович, студент;

Федоров Александр Павлович, студент;

Прокопьев Константин Васильевич, студент;

Ситенков Александр Александрович, студент;

Бурхацкий Владимир Владимирович, студент

Российский государственный профессионально-педагогический университет

В наших статьях, рассматривающих электромеханические переходные процессы в линейных асинхронных двигателях, математическое моделирование дано в системе абсолютных единиц. При рассмотрении системы автоматического регулирования скорости в асинхронных двигателях регуляторы тока и скорости определяются из параметров математической модели асинхронного двигателя. В зависимости от принятой системы единиц (абсолютных или относительных) параметры регуляторов будут различны.

Данная работа является развитием статьи [1], в которой переменные  $\bar{I}_S$  и  $\bar{\Psi}_R$  определялись на выходе апериодических звеньев. В этой статье эти переменные получены с интегрирующих звеньев, что существенно изменяет возможности математической модели асинхронного двигателя.

$$\begin{cases} \bar{U}_S = \bar{I}_S \cdot R_S + \frac{d\bar{\Psi}_S}{dt} + j\Omega_K \cdot \bar{\Psi}_S; & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \bar{I}_R \cdot R_R + \frac{d\bar{\Psi}_R}{dt} + j(\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \bar{\Psi}_R; & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_S = (L_m + L_{S\sigma}) \cdot \bar{I}_S + L_m \cdot \bar{I}_R; & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\Psi}_R = L_R \cdot \bar{I}_R + L_m \cdot \bar{I}_S = (L_m + L_{R\sigma}) \cdot \bar{I}_R + L_m \cdot \bar{I}_S; & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \equiv \bar{\Psi}_R \times \bar{I}_S; & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M - M_c = J \cdot \frac{d\Omega}{dt}. & (6) \end{cases}$$

Так как электромагнитный момент определяется через переменные  $\bar{\Psi}_R$  и  $\bar{I}_S$ , то из этих уравнений исключим переменные  $\bar{\Psi}_S$  и  $\bar{I}_R$ .

Из уравнения (4) выразим  $\bar{I}_R$ :

$$\bar{I}_R = \frac{L_m}{L_m + L_{R\sigma}} \cdot \frac{1}{L_m + L_{R\sigma}} \cdot \bar{\Psi}_R - \frac{L_m}{L_m + L_{R\sigma}} \cdot \bar{I}_S.$$

Обозначим  $\frac{L_m}{L_m + L_{R\sigma}} = \frac{\frac{L_m}{L_\delta}}{\frac{L_m}{L_\delta} + \frac{L_{R\sigma}}{L_\delta}} = \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = k_r$ , где о. е.  $l_m = \frac{L_m}{L_\delta}$  и  $l_{r\sigma} = \frac{L_{R\sigma}}{L_\delta}$ , тогда

$$\boxed{\vec{I}_R = \frac{k_r}{L_m} \cdot \vec{\Psi}_R - k_r \cdot \vec{I}_S} \quad (7)$$

Из уравнения (3) исключим  $\vec{I}_R$ :

$$\vec{\Psi}_S = (L_m + L_{S\sigma}) \cdot \vec{I}_S + L_m \cdot \left( \frac{k_r}{L_m} \cdot \vec{\Psi}_R - k_r \cdot \vec{I}_S \right) = (L_m + L_{S\sigma}) \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R - L_m \cdot k_r \cdot \vec{I}_S.$$

Обозначим  $\frac{L_m}{L_m + L_{S\sigma}} = \frac{\frac{L_m}{L_\delta}}{\frac{L_m}{L_\delta} + \frac{L_{S\sigma}}{L_\delta}} = \frac{l_m}{l_m + l_{S\sigma}} = k_s$ , тогда

$$\vec{\Psi}_S = \frac{L_m}{L_m} \cdot (L_m + L_{S\sigma}) \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R - L_m \cdot k_r \cdot \vec{I}_S = L_m \cdot \left( \frac{1}{k_s} - k_r \right) \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R.$$

Преобразуем выражение в скобке:

$$\frac{1}{k_s} - k_r = \frac{l_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{l_m}, \text{ где } l_{\sigma\sigma} = l_{r\sigma} + l_{S\sigma} + \frac{l_{S\sigma} \cdot l_{r\sigma}}{l_m}.$$

$$\frac{l_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{l_m} = \frac{\frac{L_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{L_\delta}}{\frac{L_m}{L_\delta}} = \frac{L_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{L_m}, \quad \frac{L_{\sigma\sigma}}{L_\delta} = \frac{L_{R\sigma}}{L_\delta} + \frac{L_{S\sigma}}{L_\delta} + \frac{\frac{L_{S\sigma} \cdot L_{R\sigma}}{L_\delta}}{\frac{L_m}{L_\delta}}.$$

Тогда

$$\vec{\Psi}_S = L_m \cdot \frac{l_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{l_m} \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R = L_m \cdot \frac{l_{\sigma\sigma} \cdot k_r}{L_\delta} \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R;$$

$$\boxed{\vec{\Psi}_S = L_\delta \cdot l_{\sigma\sigma} \cdot k_r \cdot \vec{I}_S + k_r \cdot \vec{\Psi}_R}. \quad (8)$$

В уравнение (2) подставим  $\vec{I}_R$ :

$$0 = \left( \frac{k_r}{L_m} \cdot \vec{\Psi}_R - k_r \cdot \vec{I}_S \right) \cdot R_R + \frac{d\vec{\Psi}_R}{dt} + j(\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \vec{\Psi}_R;$$

$$0 = R_R \cdot \frac{k_r}{L_m} \cdot \vec{\Psi}_R - k_r \cdot R_R \cdot \vec{I}_S + \frac{d\vec{\Psi}_R}{dt} + j(\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \vec{\Psi}_R, \quad (9)$$

где  $L_m = l_m \cdot L_\delta$ ;  $R_R = r_r \cdot Z_\delta$ .

Отсюда выразим:

$$\frac{d\vec{\Psi}_R}{dt} = k_r \cdot R_R \cdot \vec{I}_S - R_R \cdot \frac{k_r}{L_m} \cdot \vec{\Psi}_R - j(\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \vec{\Psi}_R. \quad (10)$$

В уравнении (9) перейдем к оператору  $\frac{d}{dt} = s$  и разложим векторы  $\vec{\Psi}_R$  и  $\vec{I}_S$  на проекции:

$$\begin{cases} \overline{\Psi_R} = \Psi_{Rx} + j\Psi_{Ry}; \\ \overline{I_S} = I_{Sx} + jI_{Sy}. \end{cases}$$

$$0 = R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} + jR_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Ry} - k_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sx} - jk_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sy} +$$

$$+ s \cdot \Psi_{Rx} + js \cdot \Psi_{Ry} + j(\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx} - (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}. \quad (11)$$

Проекция уравнения (11) на ось +1:

$$0 = R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} - k_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sx} + s \cdot \Psi_{Rx} - (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}; \quad (12)$$

$$\left( R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_{\delta}} + s \right) \cdot \Psi_{Rx} = k_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sx} + (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry};$$

$$R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_{\delta}} \cdot \left( 1 + \frac{l_m \cdot L_{\delta}}{R_R \cdot k_r} \cdot s \right) \cdot \Psi_{Rx} = k_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sx} + (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry};$$

Обозначим  $\frac{l_m \cdot L_{\delta}}{R_R \cdot k_r} = \frac{l_m \cdot L_{\delta}}{\frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} \cdot R_R} = \underbrace{\left[ \frac{(l_m + l_{r\sigma})}{r_r} \right]}_{T_r} \cdot \frac{L_{\delta}}{R_R} \cdot \frac{r_r}{\frac{R_R}{Z_{\delta}}} = T_r \cdot \frac{L_{\delta}}{Z_{\delta}} = T_r \cdot \frac{\Psi_{\delta} / I_{\delta}}{U_{\delta} / I_{\delta}} =$

$$= T_r \cdot \frac{\Psi_{\delta}}{U_{\delta}} = T_r \cdot \frac{U_{\delta}}{\Omega_{\delta} \cdot U_{\delta}} = \frac{T_r}{\Omega_{\delta}},$$

где  $L_{\delta} = \frac{\Psi_{\delta}}{I_{\delta}};$

$$\frac{L_{\delta}}{Z_{\delta}} = \frac{\Psi_{\delta}}{I_{\delta} \cdot Z_{\delta}} = \frac{U_{\delta}}{\Omega_{\delta} \cdot I_{\delta} \cdot Z_{\delta}} = \frac{Z_{\delta}}{\Omega_{\delta} \cdot Z_{\delta}} = \frac{1}{\Omega_{\delta}}.$$

В результате получим уравнение, которое было рассмотрено нами в работе [1] при получении переменной

$\Psi_{Rx}$  на выходе аperiодического звена:

$$\left( 1 + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot \Psi_{Rx} = \frac{l_m \cdot L_{\delta}}{(r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot k_r} \cdot k_r \cdot (r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot I_{Sx} + \frac{l_m \cdot L_{\delta}}{(r_r \cdot Z_{\delta}) \cdot k_r} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry};$$

$$\left( 1 + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot \Psi_{Rx} = l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sx} + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry};$$

$$\left( 1 + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot \Psi_{Rx} = l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sx} + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}.$$

Для получения переменной  $\Psi_{Rx}$  на выходе интегрирующего звена раскроем скобки в левой части:

$$\Psi_{Rx} + \Psi_{Rx} \cdot \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s = l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sx} + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}.$$

Перенесем первое слагаемое в правую часть:

$$\Psi_{Rx} \cdot \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s = -\Psi_{Rx} + l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sx} + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}.$$

Наконец, переменная  $\Psi_{Rx}$  выразится через интегрирующее звено:

$$\Psi_{Rx} = \left( \underbrace{-\Psi_{Rx}}_1 + \underbrace{l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sx}}_2 + \underbrace{\frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Ry}}_3 \right) \cdot \frac{\Omega_{\delta}}{T_r} \cdot \frac{1}{s}. \quad (13)$$

Этому уравнению (13) соответствуют структурная схема и оболочка, представленные на рис. 1 и 2.

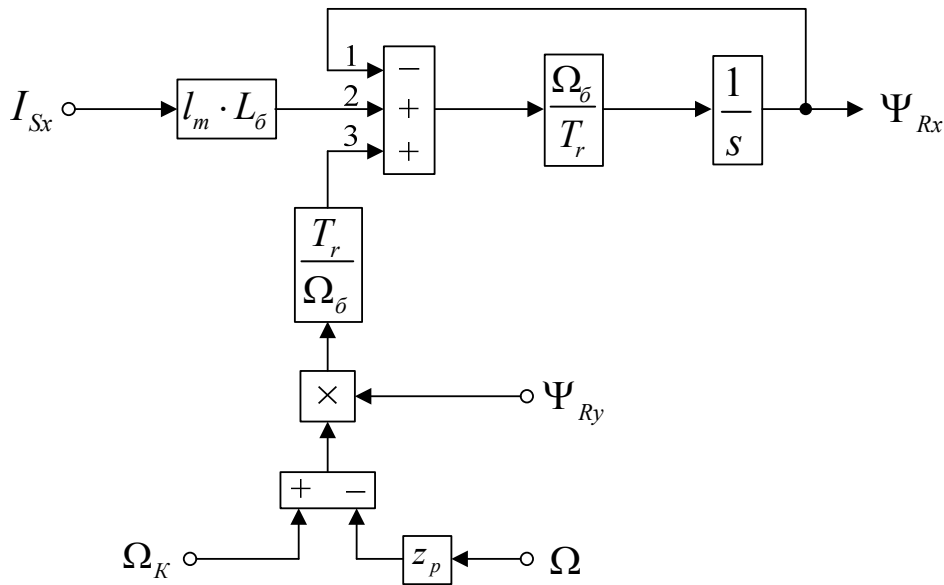


Рис. 1. Структурная схема для определения  $\Psi_{Rx}$

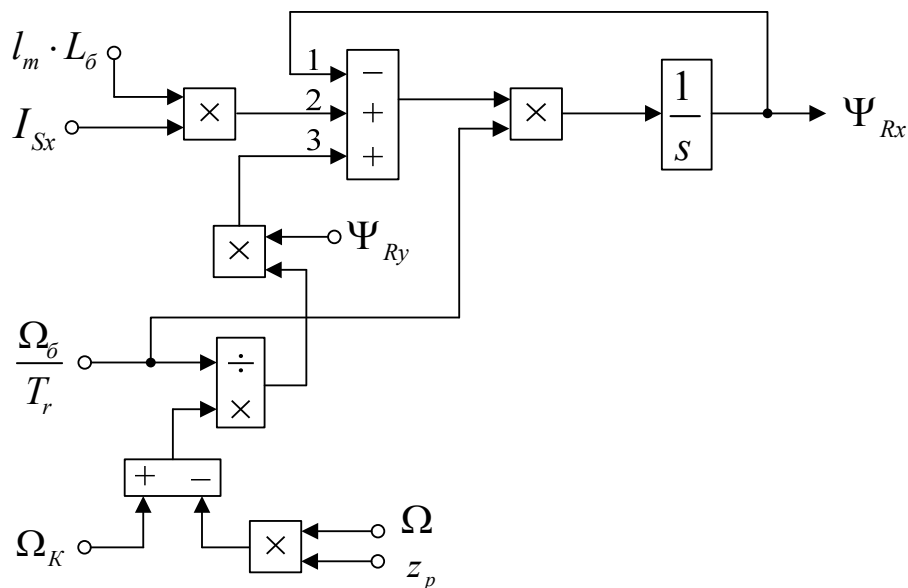


Рис. 2. Оболочка для определения  $\Psi_{Rx}$

Проекция уравнения (11) на ось+j:

$$0 = R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_0} \cdot \Psi_{Ry} - k_r \cdot (r_r \cdot Z_0) \cdot I_{Sy} + s \cdot \Psi_{Ry} + (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx}. \tag{14}$$

$$R_R \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_0} \cdot \Psi_{Ry} + s \cdot \Psi_{Ry} = k_r \cdot (r_r \cdot Z_0) \cdot I_{Sy} - (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx};$$

$$(r_r \cdot Z_0) \cdot \frac{k_r}{l_m \cdot L_0} \cdot \left(1 + \frac{l_m \cdot L_0}{R_R \cdot k_r} \cdot s\right) \cdot \Psi_{Ry} = k_r \cdot (r_r \cdot Z_0) \cdot I_{Sy} - (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx};$$

$$\left(1 + \frac{T_r}{\Omega_0} \cdot s\right) \cdot \Psi_{Ry} = \frac{l_m \cdot L_0}{(r_r \cdot Z_0) \cdot k_r} \cdot k_r \cdot (r_r \cdot Z_0) \cdot I_{Sy} - \frac{l_m}{r_r \cdot k_r} \cdot \frac{L_0}{Z_0} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx};$$

$$\left(1 + \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s\right) \cdot \Psi_{Ry} = l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sy} - \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx}$$

Для получения переменной  $\Psi_{Ry}$  на выходе интегрирующего звена раскроем скобки в левой части перенесем первое слагаемое в правую часть:

$$\Psi_{Ry} \cdot \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot s = -\Psi_{Ry} + l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sy} - \frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx};$$

$$\Psi_{Ry} = \left( \underbrace{-\Psi_{Ry}}_1 + \underbrace{l_m \cdot L_{\delta} \cdot I_{Sy}}_2 - \underbrace{\frac{T_r}{\Omega_{\delta}} \cdot (\Omega_K - \Omega \cdot z_p) \cdot \Psi_{Rx}}_3 \right) \cdot \frac{\Omega_{\delta}}{T_r} \cdot \frac{1}{s} \tag{15}$$

Полученному уравнению (15) соответствуют структурная схема и оболочка, показанные на рис. 3 и 4.

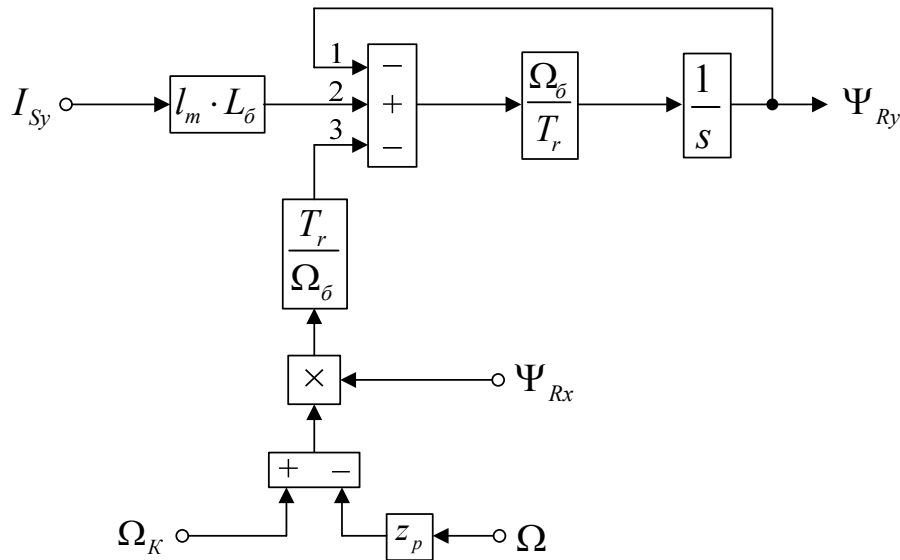


Рис. 3. Структурная схема для определения  $\Psi_{Ry}$

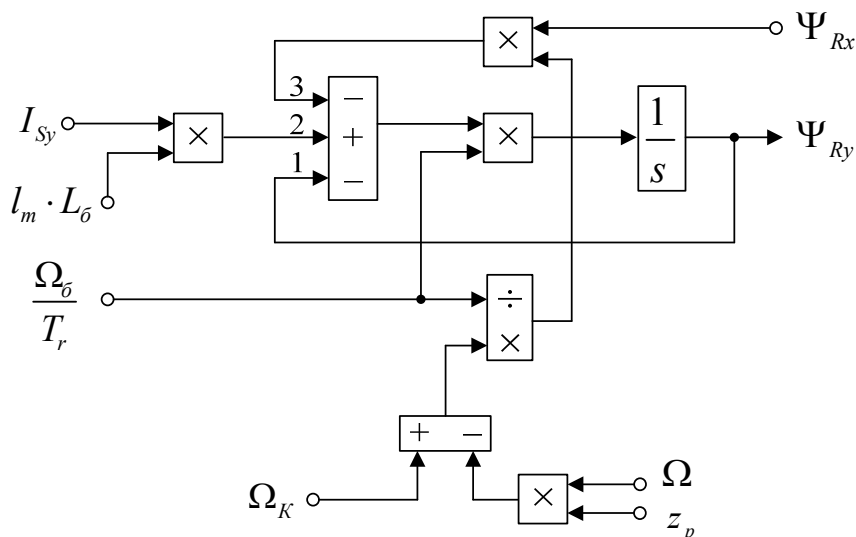


Рис. 4. Оболочка для определения  $\Psi_{Ry}$

Из уравнения (1) исключим  $\overline{\Psi_S}$  :

$$\overline{U_S} = \overline{I_S} \cdot \overline{R_S} + \frac{d\overline{\Psi_S}}{dt} + j\Omega_K \cdot \overline{\Psi_S} \tag{*}$$

$$\overline{\Psi}_S = L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \overline{I}_S + k_r \cdot \overline{\Psi}_R.$$

Подставим  $\overline{\Psi}_S$  в (\*):

$$\overline{U}_S = \overline{I}_S \cdot R_S + L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \frac{d\overline{I}_S}{dt} + k_r \cdot \frac{d\overline{\Psi}_R}{dt} + j\Omega_K \cdot L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \overline{I}_S + j\Omega_K \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R.$$

Подставим в это уравнение  $\frac{d\overline{\Psi}_R}{dt}$  из уравнения (10):

$$\overline{U}_S = \overline{I}_S \cdot R_S + L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \frac{d\overline{I}_S}{dt} + k_r^2 \cdot R_R \cdot \overline{I}_S - R_R \cdot \frac{k_r^2}{L_m} \cdot \overline{\Psi}_R - j\Omega_K \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega \cdot z_p \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega_K \cdot L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \overline{I}_S + j\Omega_K \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R.$$

Переведем уравнение  $\overline{U}_S$  в изображения, для этого выразим  $\frac{d}{dt} = s$ :

$$\overline{U}_S = \left( \overline{I}_S \cdot r_s \cdot Z_{\delta} + L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot s \cdot \overline{I}_S + k_r^2 \cdot r_r \cdot Z_{\delta} \cdot \overline{I}_S \right) - \frac{r_r \cdot Z_{\delta} \cdot k_r^2}{L_m} \cdot \overline{\Psi}_R +$$

$$+ j\Omega \cdot z_p \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega_K \cdot L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \overline{I}_S;$$

$$\overline{U}_S = \left[ \underbrace{\left( r_s + k_r^2 \cdot r_r \right)}_{r_3} \cdot Z_{\delta} \cdot \overline{I}_S + L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot s \cdot \overline{I}_S \right] - \frac{r_r \cdot k_r^2}{L_m} \cdot \frac{Z_{\delta}}{L_{\delta}} \cdot \overline{\Psi}_R +$$

$$+ j\Omega \cdot z_p \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega_K \cdot L_{\delta} \cdot l_{\sigma\alpha} \cdot k_r \cdot \overline{I}_S;$$

$$\overline{U}_S = r_3 \cdot \left( 1 + \frac{L_{\delta}}{Z_{\delta}} \cdot \frac{l_{\sigma\alpha} \cdot k_r}{1/\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot Z_{\delta} \cdot \overline{I}_S - \frac{r_r \cdot k_r^2}{\underbrace{L_m}_{k_r/T_r}} \cdot \Omega_{\delta} \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega \cdot z_p \cdot k_r \cdot \overline{\Psi}_R + j\Omega_K \cdot L_{\delta} \cdot \underbrace{l_{\sigma\alpha} \cdot k_r}_{T_3 \cdot r_3} \cdot \overline{I}_S;$$

$$r_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot \overline{I}_S = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \overline{U}_S + \frac{k_r}{T_r} \cdot \frac{\Omega_{\delta}}{Z_{\delta}} \cdot \overline{\Psi}_R - j\Omega \cdot z_p \cdot \frac{k_r}{Z_{\delta}} \cdot \overline{\Psi}_R - j\Omega_K \cdot \frac{L_{\delta}}{Z_{\delta}} \cdot T_3 \cdot r_3 \cdot \overline{I}_S;$$

$$r_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot \overline{I}_S = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot \overline{U}_S + \frac{k_r}{T_r} \cdot \frac{Z_{\delta}/L_{\delta}}{Z_{\delta}} \cdot \overline{\Psi}_R - j\Omega \cdot z_p \cdot \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \cdot \overline{\Psi}_R - j\Omega_K \cdot \frac{1}{\Omega_{\delta}} \cdot T_3 \cdot r_3 \cdot \overline{I}_S.$$

Выразим векторы  $\overline{I}_S$ ,  $\overline{U}_S$  и  $\overline{\Psi}_R$  через проекции:

$$\overline{I}_S = I_{Sx} + jI_{Sy}; \quad \overline{U}_S = U_{Sx} + jU_{Sy}; \quad \overline{\Psi}_R = \Psi_{Rx} + j\Psi_{Ry}.$$

$$r_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot I_{Sx} + jr_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot I_{Sy} = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sx} + j \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sy} + \frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} + j \frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Ry} - j\Omega \cdot z_p \cdot \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} + \Omega \cdot z_p \cdot \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Ry} - j\Omega_K \cdot \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \cdot I_{Sx} + \Omega_K \cdot \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \cdot I_{Sy}. \tag{16}$$

Проекция уравнения (16) на действительную ось +1:

$$r_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot I_{Sx} = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sx} + \frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} + \left( \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \right) \cdot (\Omega \cdot z_p \cdot \Psi_{Ry}) + \left( \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \right) \cdot (\Omega_K \cdot I_{Sy}). \tag{17}$$

Проекция уравнения (16) на мнимую ось +j:

$$r_3 \cdot \left( 1 + \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s \right) \cdot I_{Sy} = \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sy} + \frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Ry} - \left( \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \right) \cdot (\Omega \cdot z_p \cdot \Psi_{Rx}) - \left( \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \right) \cdot (\Omega_K \cdot I_{Sx}). \tag{18}$$

Из уравнения (17) выразим  $I_{Sx}$ :



$$r_3 \cdot I_{Sx} \cdot \frac{T_3}{\Omega_{\delta}} \cdot s = -r_3 \cdot I_{Sx} + \frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sx} + \frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx} + \left( \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \right) \cdot (\Omega \cdot z_p \cdot \Psi_{Ry}) + \left( \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \right) \cdot (\Omega_K \cdot I_{Sy});$$

$$I_{Sx} = \left( \underbrace{-r_3 \cdot I_{Sx}}_1 + \underbrace{\frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sx}}_3 + \underbrace{\frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Rx}}_2 + \underbrace{\left( \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \right) \cdot (\Omega \cdot z_p \cdot \Psi_{Ry})}_5 + \underbrace{\left( \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \right) \cdot (\Omega_K \cdot I_{Sy})}_4 \right) \cdot \frac{\Omega_{\delta}}{r_3 \cdot T_3} \cdot \frac{1}{s}$$

Структурная схема и оболочка для реализации тока  $I_{Sx}$  в Matlab-Simulink даны на рис. 5 и 6.

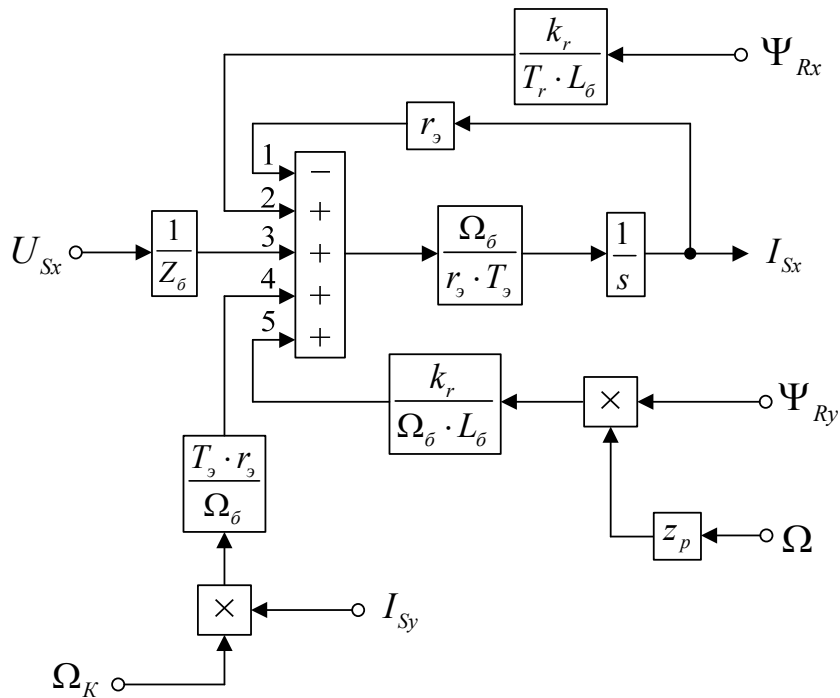


Рис. 5. Структурная схема проекции статорного тока  $I_{Sx}$  на ось+1

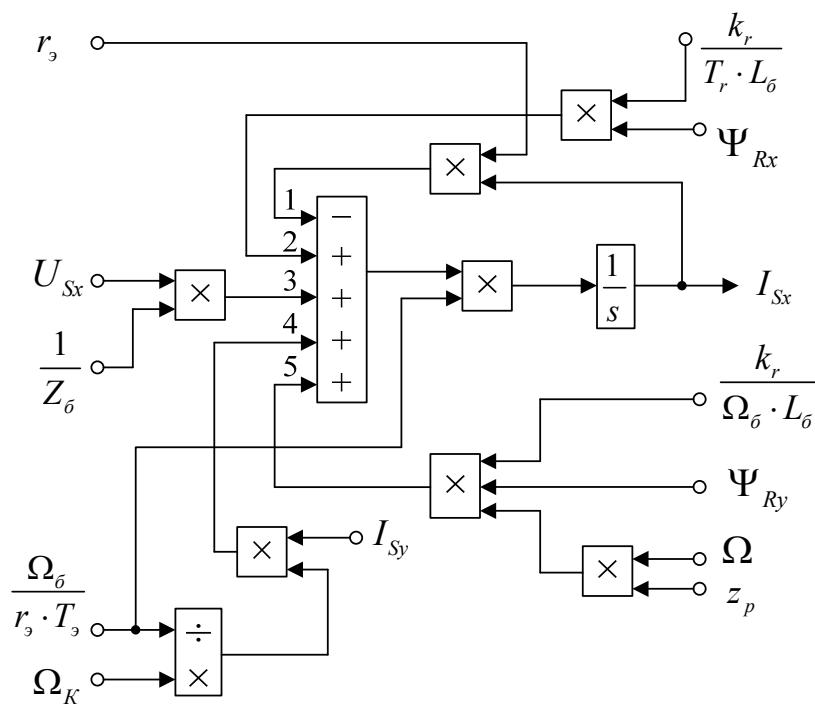


Рис. 6. Оболочка проекции статорного тока  $I_{Sx}$  на ось+1

Аналогично из уравнения (18) выразим  $I_{Sy}$ :

$$I_{Sy} = \left( \underbrace{-r_3 \cdot I_{Sy}}_1 + \underbrace{\frac{1}{Z_{\delta}} \cdot U_{Sy}}_3 + \underbrace{\frac{k_r}{T_r \cdot L_{\delta}} \cdot \Psi_{Ry}}_2 - \underbrace{\left( \frac{k_r}{\Omega_{\delta} \cdot L_{\delta}} \right) \cdot (\Omega \cdot z_p \cdot \Psi_{Rx})}_5 - \underbrace{\left( \frac{T_3 \cdot r_3}{\Omega_{\delta}} \right) \cdot (\Omega_K \cdot I_{Sx})}_4 \right) \cdot \frac{\Omega_{\delta}}{r_3 \cdot T_3} \cdot \frac{1}{s}$$

Структурная схема и оболочка, соответствующие этому уравнению, представлены на рис. 7 и 8.

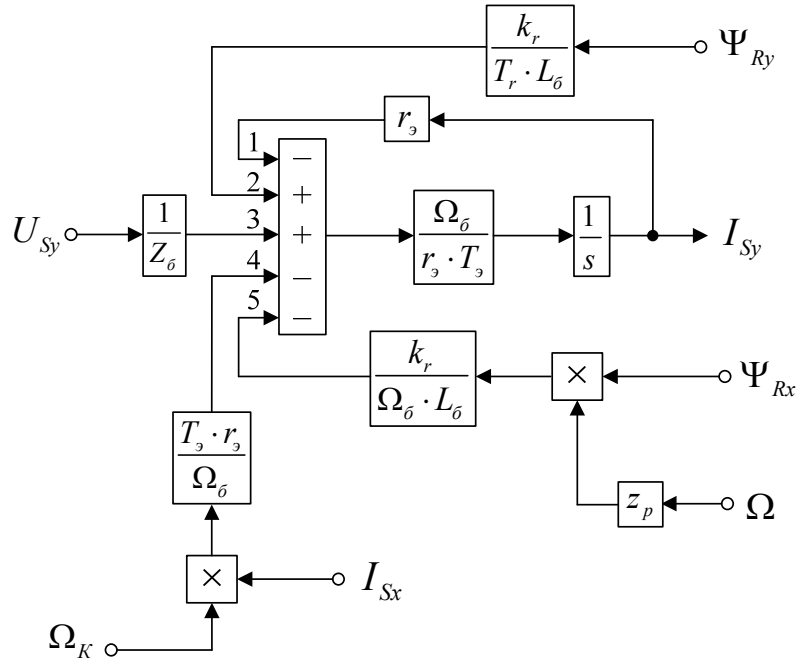


Рис. 7. Структурная схема проекции статорного тока  $I_{Sy}$  на ось+j

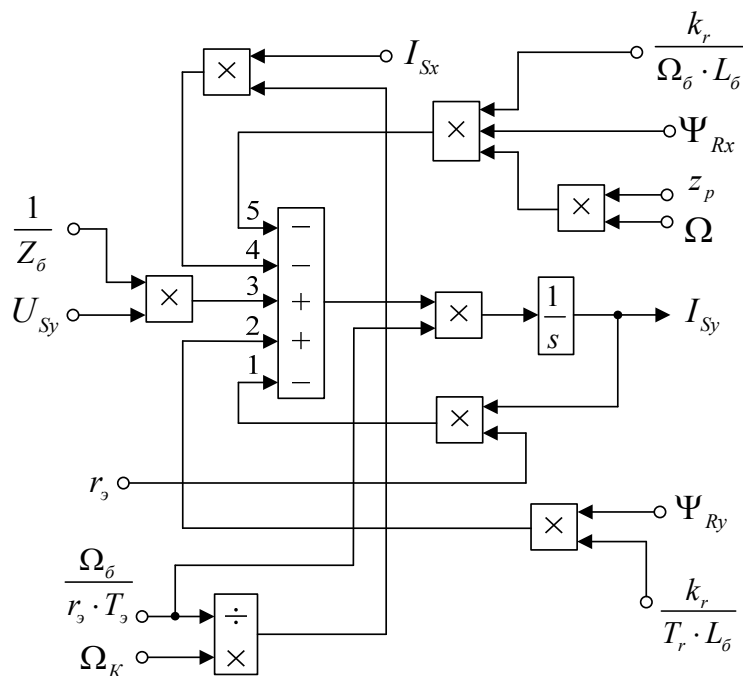


Рис. 8. Оболочка проекции статорного тока  $I_{Sy}$  на ось+j

Структурная схема для реализации уравнения электромагнитного момента дана на рис. 9:

$$M = \frac{3}{2} \cdot z_p \cdot k_r \cdot (\Psi_{Rx} \cdot I_{sy} - \Psi_{Ry} \cdot I_{Sx}).$$

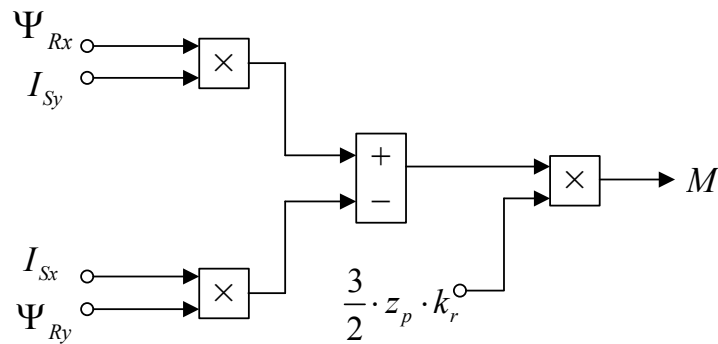


Рис. 9. Математическая модель электромагнитного момента  $M$

Наконец для уравнения (6):

$$M - M_c = J \cdot s \cdot \Omega;$$

$$\Omega = (M - M_c) \cdot \frac{1}{J \cdot s}.$$

Структурная схема дана на рис. 10.

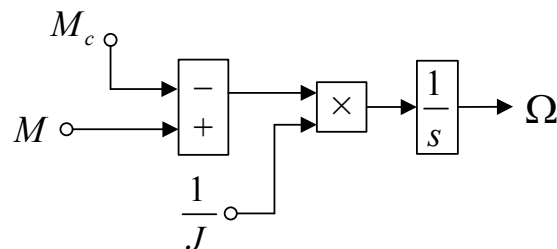


Рис. 10. Математическая модель уравнения движения

В работе [2] в главе 6 «Примеры» дан образец расчета параметров асинхронного двигателя. В наших дальнейших работах направленных на подготовку студентов к исследовательской работе, глава 6 окажет неоценимую помощь. Можно было бы по аналогии рассмотреть паспортные данные любого другого двигателя, но для проверки правильности выводов уравнений сделанных исследовательской группой самостоятельно, необходимо постоянно выходить на многие полученные результаты в работе [3]. Поэтому, этот пример расчета окажется очень полезным.

*Номинальные данные:*

Номинальный режим работы

Номинальная мощность

Номинальное фазное напряжение

Номинальный фазный ток

Номинальная частота

Номинальная синхронная скорость

Номинальная скорость ротора

Номинальный КПД

Номинальный коэффициент мощности

Число пар полюсов

*Параметры T-образной схемы замещения при номинальной частоте:*

Активное сопротивление обмотки статора

Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора

Активное сопротивление обмотки ротора, приведенное к статору

$S1;$

$$P_N = 320 \text{ кВт};$$

$$U_{s,N} = 380 \text{ В};$$

$$I_{s,N} = 324 \text{ А};$$

$$f_N = 50 \text{ Гц};$$

$$\Omega_{0N} = 104,7 \text{ рад/с};$$

$$\Omega_N = 102,83 \text{ рад/с};$$

$$\eta_N = 0,944;$$

$$\cos \varphi_N = 0,92;$$

$$z_p = 3.$$

$$R_s = 0,0178 \text{ Ом};$$

$$X_{s\sigma} = 0,118 \text{ Ом};$$

$$R_r = 0,0194 \text{ Ом};$$

Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора, приведенное статору  $X_{r\sigma} = 0,123 \text{ Ом};$

Главное индуктивное сопротивление  $X_m = 4,552 \text{ Ом};$

Суммарный момент инерции двигателя и механизма  $J_{\Sigma} = 28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$

*Базисные величины системы относительных единиц:*

Напряжение  $U_{\bar{\sigma}} = \sqrt{2}U_{s.N} = \sqrt{2} \cdot 380 = 537,4 \text{ В};$

Ток  $I_{\bar{\sigma}} = \sqrt{2}I_{s.N} = \sqrt{2} \cdot 324 = 458,2 \text{ А};$

Частота  $\Omega_{\bar{\sigma}} = \Omega_{s.N} = 2\pi f_N = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314,16 \text{ рад/с};$

Скорость ротора  $\Omega_{r.\bar{\sigma}} = \frac{\Omega_{\bar{\sigma}}}{z_p} = \frac{314,16}{3} = 104,72 \text{ рад/с};$

Сопротивление  $Z_{\bar{\sigma}} = \frac{U_{\bar{\sigma}}}{I_{\bar{\sigma}}} = \frac{537,4}{458,2} = 1,1728 \text{ Ом};$

Потокоцепление  $\Psi_{\bar{\sigma}} = \frac{U_{\bar{\sigma}}}{\Omega_{\bar{\sigma}}} = \frac{537,4}{314,16} = 1,711 \text{ В} \cdot \text{с};$

Индуктивность  $L_{\bar{\sigma}} = \frac{\Psi_{\bar{\sigma}}}{I_{\bar{\sigma}}} = \frac{1,711}{458,2} = 3,733 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$

Используя номинальные данные двигателя, определяем:

$$M_{\bar{\sigma}} = k_{\Delta} \cdot M_N = k_{\Delta} \cdot \frac{P_N}{\Omega_N},$$

где  $k_{\Delta} > 1$  — коэффициент, учитывающий различие значений электромагнитного момента и момента на валу двигателя в номинальном режиме ( $k_{\Delta} = 1,0084$ ).

$$M_{\bar{\sigma}} = k_{\Delta} \cdot \frac{P_N}{\Omega_N} = 1,0084 \cdot \frac{320 \cdot 10^3}{102,83} = 3138,07 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

В качестве базисной мощности выбираем значение электромагнитной мощности двигателя в номинальном режиме, определяемое по следующей формуле:

$$P_{\bar{\sigma}} = M_{\bar{\sigma}} \cdot \Omega_{p.\bar{\sigma}} = 3138,07 \cdot 104,72 = 328,62 \cdot 10^3 \text{ Вт}.$$

Относительные значения параметров схемы замещения двигателя:

$$r_s = \frac{R_s}{Z_{\bar{\sigma}}} = \frac{0,0178}{1,1728} = 0,0152;$$

$$l_{s\sigma} = \frac{L_{s\sigma}}{L_{\bar{\sigma}}} = \frac{X_{s\sigma}}{(\Omega_{\bar{\sigma}} \cdot L_{\bar{\sigma}})} = \frac{X_{s\sigma}}{Z_{\bar{\sigma}}} = \frac{0,118}{1,1728} = 0,1006;$$

$$r_r = \frac{R_r}{Z_{\bar{\sigma}}} = \frac{0,0194}{1,1728} = 0,0165;$$

$$l_{r\sigma} = \frac{X_{r\sigma}}{Z_{\bar{\sigma}}} = \frac{0,123}{1,1728} = 0,1049;$$

$$l_m = \frac{X_m}{Z_{\bar{\sigma}}} = \frac{4,552}{1,1728} = 3,881.$$

Механическая постоянная времени:

$$T_j = J_{\Sigma} \cdot \frac{\Omega_{r.\bar{\sigma}}}{M_{\bar{\sigma}}} = 28 \cdot \frac{104,72}{3138,07} = 0,934 \text{ с}.$$

Номинальное значение скольжения:

$$\beta_N = \frac{\Omega_{0N} - \Omega_N}{\Omega_{0N}} = \frac{104,72 - 102,83}{104,72} = 0,018.$$

Относительное значение номинальной скорости ротора:

$$\omega_N = (1 - \beta_N) = (1 - 0,018) = 0,982.$$

Нормирующий энергетический коэффициент:

$$\zeta_N = \frac{S_{s.N}}{P_{э.м.N}} = \frac{3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N}}{P_6} = \frac{3 \cdot 380 \cdot 324}{328620} = 1,124;$$

$$S_{s.N} = 3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N} = 369360 \text{ ВА};$$

$$k_s = \frac{l_m}{l_m + l_{s\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1006} = 0,9749;$$

$$k_r = \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1049} = 0,9737;$$

$$l_{\sigma_3} = l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} \cdot l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1} = 0,1006 + 0,1049 + \frac{0,1006 \cdot 0,1049}{3,881} = 0,2082.$$

При расчете режимов работы, для того чтобы  $i_{sh} = 1$ ,  $m_N = 1$ ,  $u_{sN} = 1$ ,  $\omega_{sN} = 1$  и  $\beta_N = 0,018$  необходимо откорректировать  $r_r$ :

$$r_{rk} = \rho_N \cdot \beta_N = 0,9962 \cdot 0,018 = 0,0179,$$

где  $\rho_N = 0,9962$  – корректирующий коэффициент [2, с. 296].

$$kk = \frac{r_{rk}}{r_r} = 1,0849 \text{ - коэффициент, показывающий отношение } r_{rk} \text{ к } r_r.$$

$$\alpha_r = k_r \cdot \frac{r_r}{l_m} = 0,9737 \cdot \frac{0,0179}{3,881} = 0,00451;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{r\sigma} + l_{s\sigma} = 0,9737 \cdot 0,1049 + 0,1006 = 0,20274;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{\sigma_3} = 0,9737 \cdot 0,2082 = 0,20274;$$

$$r_3 = r_s + k_r^2 \cdot r_r = 0,0152 + 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,032171;$$

$$T_3 = \frac{l_3}{r_3} = \frac{0,20274}{0,032171} = 6,302;$$

$$k_r^2 \cdot r_r = 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,017;$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{0,032171} = 31,084;$$

$$T_r = \frac{l_m + l_{r\sigma}}{r_r} = \frac{3,881 + 0,1049}{0,0179} = 222,676;$$

$$\frac{T_r}{k_r^2 \cdot r_r} = \frac{222,676}{0,9737^2 \cdot 0,0179} = 13098,587;$$

$$\frac{T_3}{\Omega_6} = \frac{6,302}{314,16} = 0,02006;$$

$$\frac{T_r}{\Omega_6} = \frac{222,676}{314,16} = 0,7088;$$

$$\zeta_N \cdot T_r = 1,124 \cdot 222,676 = 250,29;$$

$$\frac{\Omega_{\sigma}}{r_r \cdot T_r} = \frac{314,16}{0,032171 \cdot 6,302} = 1549,558;$$

$$\frac{k_r}{T_r} = \frac{0,9737}{222,676} = 0,00437;$$

$$\frac{1}{r_r \cdot k_r^2} = \frac{1}{0,0179 \cdot 0,9737^2} = 58,824;$$

$$\frac{r_r \cdot k_r^2 \cdot \Omega_{\sigma}}{T_r} = \frac{0,0179 \cdot 0,9737^2 \cdot 314,16}{222,676} = 0,024.$$

Основным отличием данной модели от модели двигателя, приведенного в работе [1], является то, что переменные  $I_S$  и  $\Psi_R$  формируются на выходе интегрирующих звеньев. Это позволяет вынести расчет коэффициентов модели в отдельную подсистему (Raschet koeficientov). В результате этого выноса остается оболочка из сумматоров, блоков перемножения и интеграторов (Obolochka dvigatela). Общая структура двигателя дана на рис. 11.

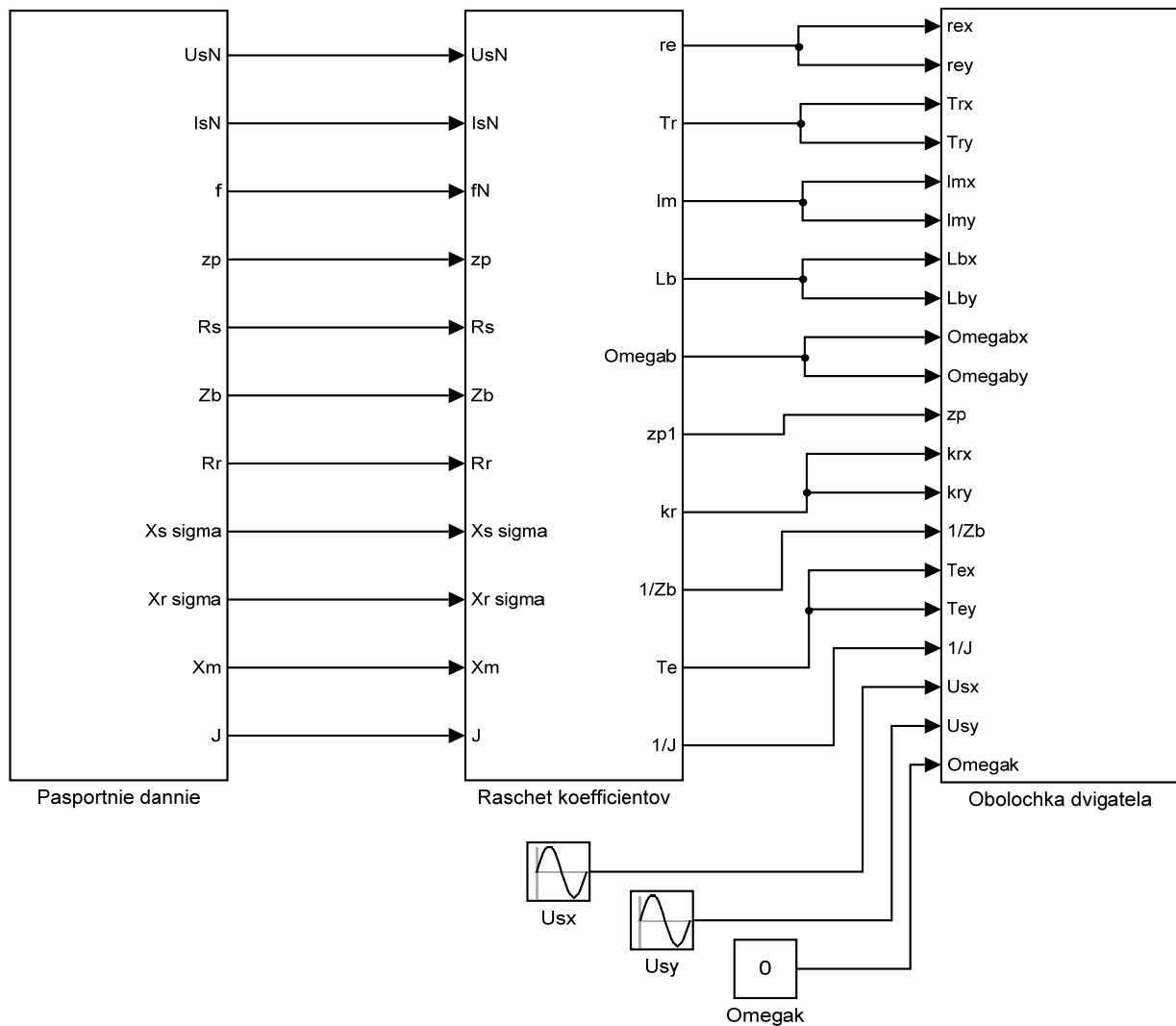


Рис. 11. Модель асинхронного двигателя

Оболочка двигателя дана на рис. 12.

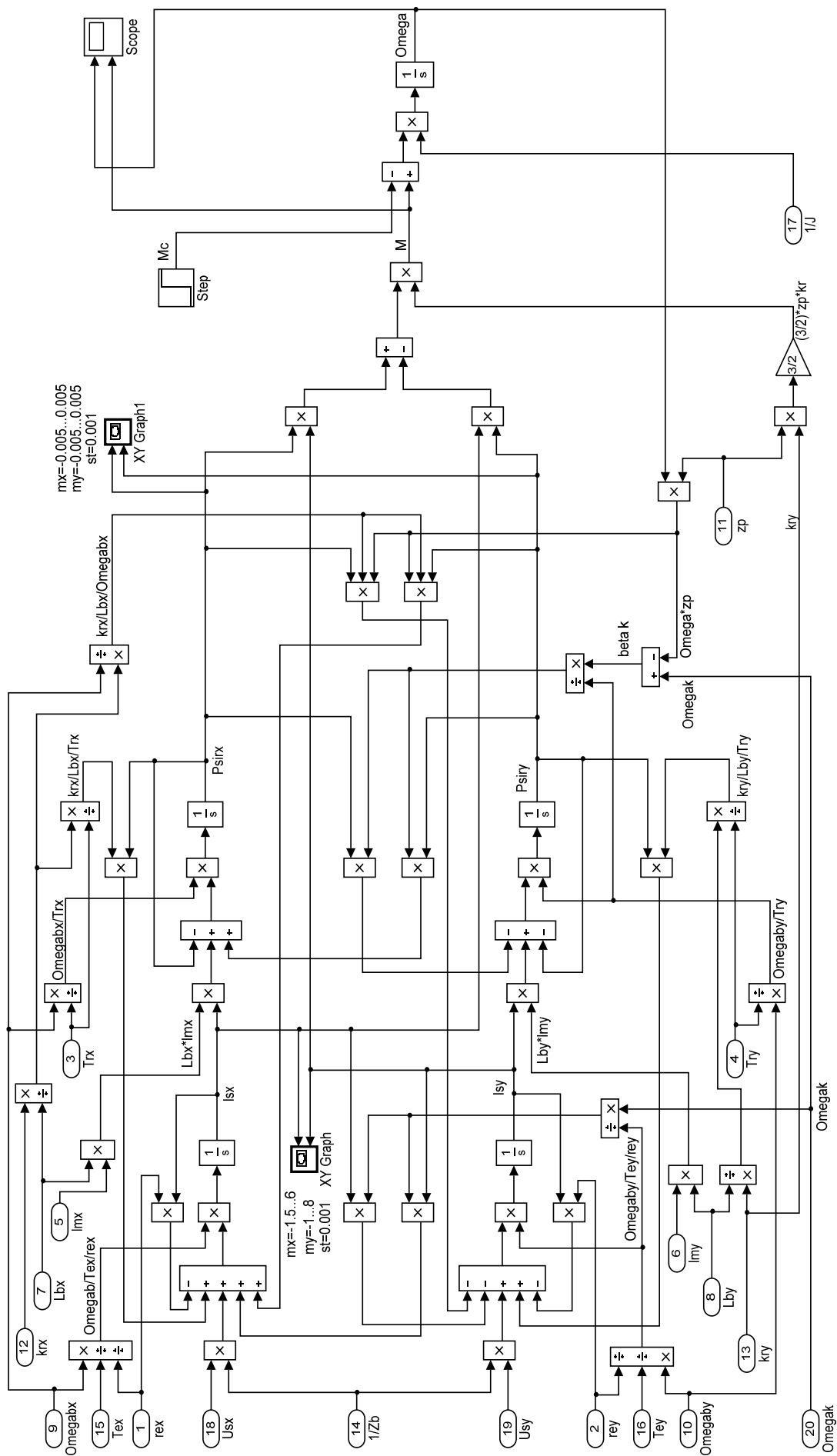


Рис. 12. Оболочка математической модели асинхронного двигателя с переменными  $\Psi_R$  —  $I_S$  в системе абсолютных единиц

Ввод паспортных данных двигателя показан на рис. 13.

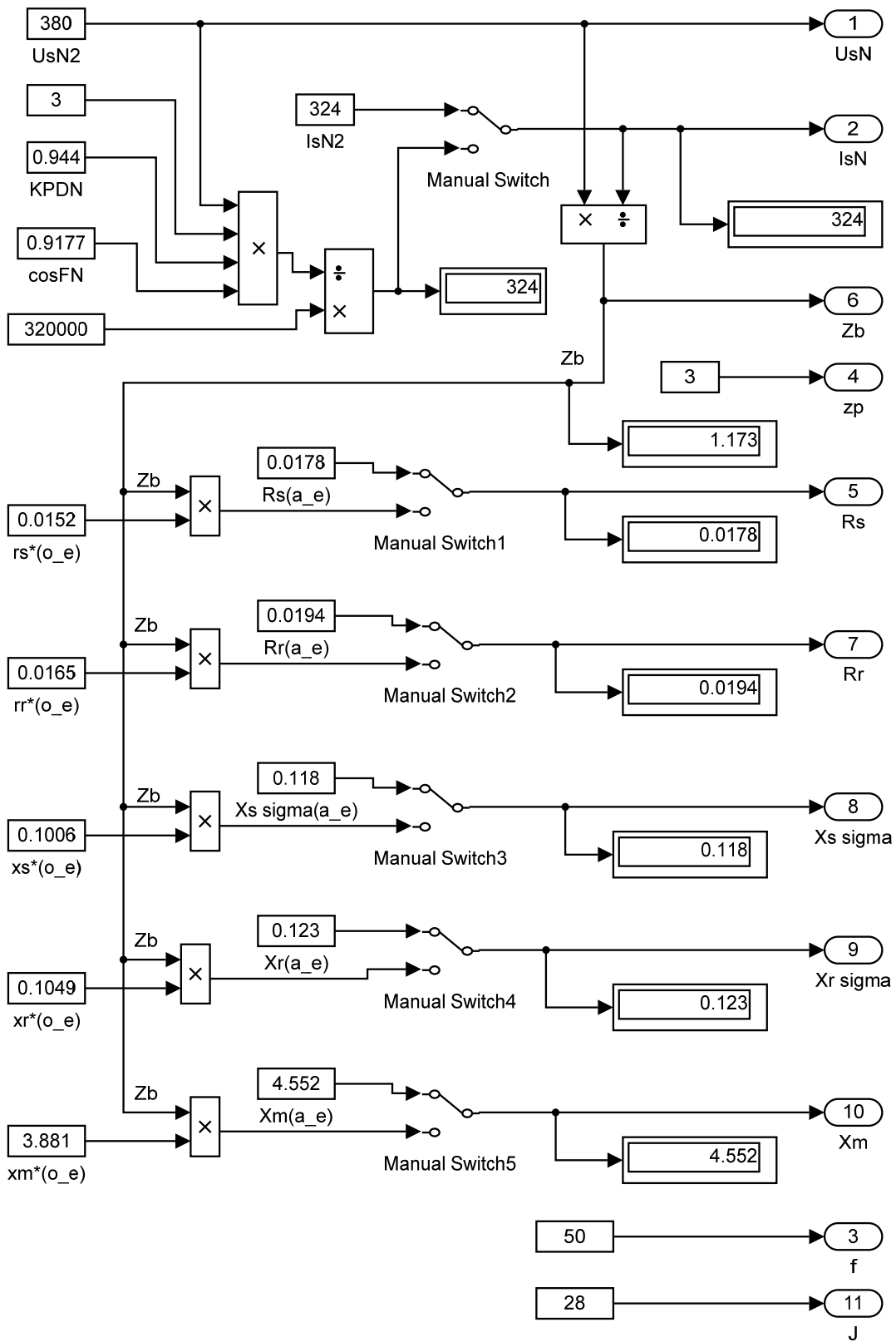


Рис. 13. Паспортные данные

Расчет коэффициентов осуществляется в подсистеме Raschet koeficientov, приведенной на рис. 14.



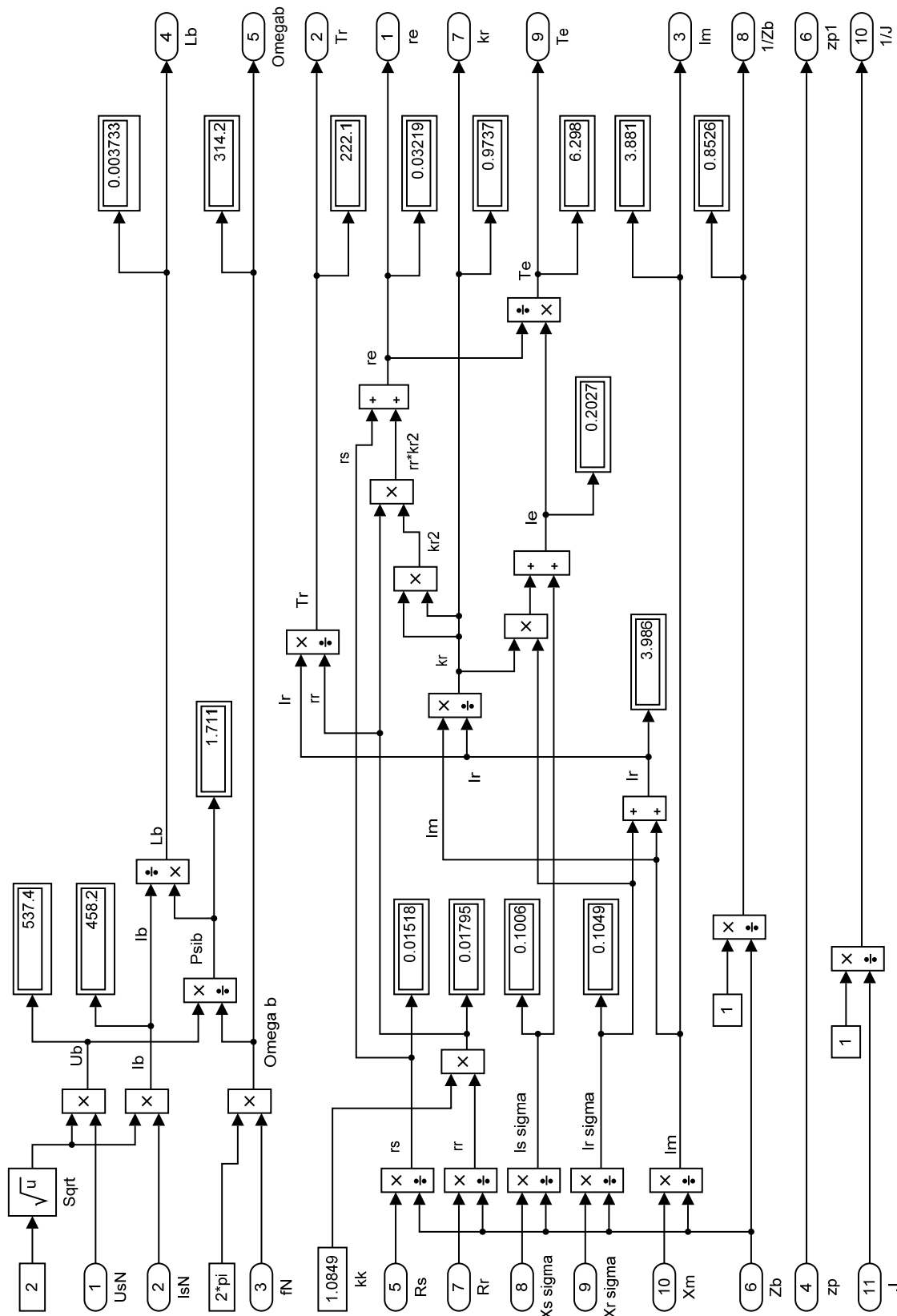


Рис. 14. Расчет коэффициентов

Результаты моделирования представлены на рис. 15.

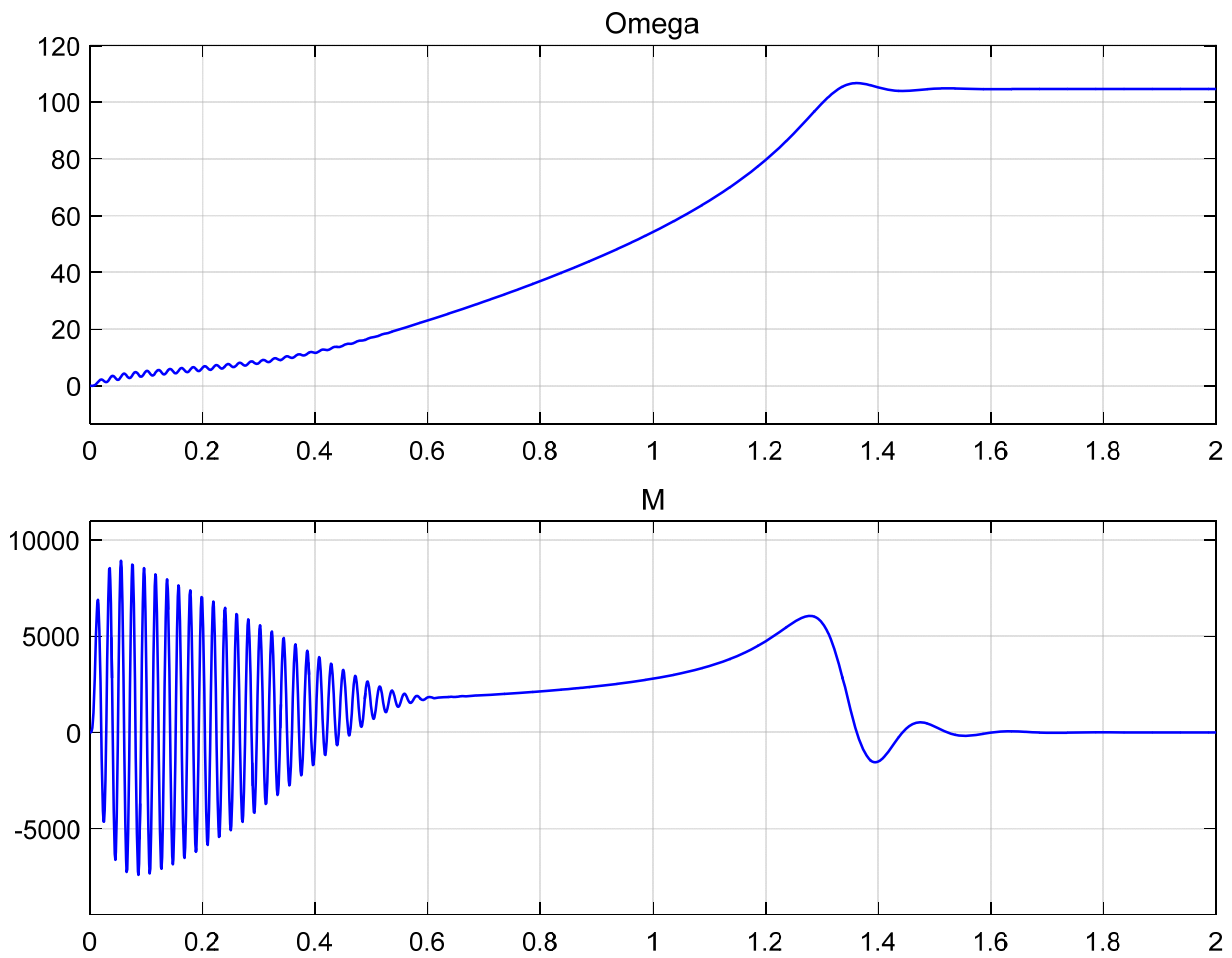


Рис. 15. Графики скорости и момента

Литература:

1. Емельянов, А.А., Бесклеткин В.В., Авдеев А.С., Габзалилов Э.Ф., Прокопьев К.В., Ситенков А.А. Математическая модель асинхронного двигателя с переменными R — IS в системе абсолютных единиц // Молодой ученый. — 2016. — №10.
2. Шрейнер, Р.Т. Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления: учеб. пособие / Р.Т. Шрейнер, А.В. Костылев, В.К. Кривовяз, С.И. Шилин. Под ред. проф. д. т. н. Р.Т. Шрейнера. — Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2008. — 361 с.
3. Шрейнер, Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. — Екатеринбург УРО РАН, 2000. — 654 с.

## Генерация крупномасштабных вихревых структур во вращающейся самогравитирующей среде с мелкомасштабной неспиральной силой

Копп Михаил Иосифович, кандидат физико-математических наук

*В настоящей работе найдена новая крупномасштабная неустойчивость во вращающейся стратифицированной самогравитирующей среде с мелкомасштабной турбулентностью. Турбулентность возбуждается внешней мелкомасштабной силой с нулевой спиральностью и малым числом Рейнольдса. Теория построена на основе метода многомасштабных асимптотических разложений. В пятом порядке теории возмущений получены основные уравнения, описывающие неустойчивость типа гидродинамического  $\alpha$ -эффекта во вращающейся турбулентной среде.*

**Ключевые слова:** сила Кориолиса, многомасштабные асимптотические разложения, стратифицированная самогравитирующая среда, неспиральная мелкомасштабная турбулентность,  $\alpha$ -эффект

*In this paper we found a new large-scale instability in the rotating self-gravitating stratified medium with small-scale turbulence. Turbulence excited small-scale external force with zero helicity and low Reynolds number. The theory is based on the method of multi-scale asymptotic expansions. In the fifth-order perturbation theory the basic equations describing instability like hydrodynamic  $\alpha$ -effect in the rotating turbulent medium are received.*

**Keywords:** coriolis force, multiscale asymptotic expansions, self-gravitating stratified media, nonspiral small-scale turbulence,  $\alpha$ -effect

Исследование проблемы генерации крупномасштабных вихревых структур (КВС) имеет важное значение для целого ряда геофизических и астрофизических задач. В частности, к геофизическим задачам относятся исследования по генерации КВС типа тропических циклонов (тайфунов), торнадо, смерчей и т. д. Эти КВС играют большую роль в глобальной циркуляции атмосферы, что очень важно для прогноза погоды и климата на нашей планете [1–5]. К астрофизическим задачам относятся проблемы генерации КВС в галактических дисках, в атмосферах планет Солнечной системы и т. п. [6–8] Центральное место в этом направлении занимает теория вихревого динамо [5]. Первоначально идея вихревого динамо была высказана в работе [9], после того как был открыт  $\alpha$ -эффект в магнитной гидродинамике [10–16]. На основе сходства уравнений индукции магнитного поля и вихря в гидродинамике, в работе [9] была выдвинута гипотеза, что спиральная турбулентность способна генерировать крупные вихри подобно крупномасштабному магнитному полю в магнитной гидродинамике [10]. Физическая сущность этого явления заключается в инверсном каскаде передачи энергии от мелких вихрей к более крупным. Эта гипотеза была на время забыта после появления работы [17], в которой показано, что в несжимаемой жидкости со спиральной турбулентностью крупные вихри затухают на турбулентной вязкости. Результаты, полученные в [17], носят название теоремы-антидинамо, запрещающей генерацию КВС спиральной турбулентностью в несжимаемой жидкости. Несмотря на запрет теоремы-антидинамо, первый пример вихревого динамо был найден в работе [18]. Там было показано, что спиральная турбулентность в сжимаемой жидкости может усиливать крупномасштабные вихревые возмущения. Этот эффект получил название гидродинамического  $\alpha$ -эффекта. Его появление обусловлено нарушением симметрии в тензоре напряжений Рейнольдса из-за сжимаемости среды. В дальнейшем были найдены другие факторы нарушения симметрии уравнений, такие как неоднородный поток [19], градиент температуры в поле тяжести [20], частицы примеси и пузырьки воздуха в среде [19]. Известно также большое количество работ по генерации КВС с учетом эффектов вращения [21–28].

На начальном этапе развития теории динамо, замкнутые уравнения для средних (крупномасштабных) полей были получены в основном при помощи метода электродинамики среднего поля (или теории корреляционного сглаживания второго порядка) [10] и функциональной техники [29, 30]. Оба эти метода в применении к задачам теории динамо имеют главный недостаток, заключающийся в трудности определения из всей иерархии возмущений главного порядка, при котором возникает неустойчивость. В связи с этим, в работе [31] была рассмотрена крупномасштабная неустойчивость в несжимаемой жидкости методом асимптотических многомасштабных разложений. В качестве малого параметра для асимптотического метода многомасштабных разложений используется число Рейнольдса  $R = \frac{v_0 \tau_0}{\lambda_0} \ll 1$  для мелкомасштабных пульсаций скорости  $v_0$ , вызванных мелкомасштабной силой. Модель внешней мелкомасштабной силы была выбрана с нарушением четности (при нулевой спиральности). Эффект генерации крупномасштабных возмущений такой силой получил название анизотропного кинетического альфа-эффекта или АКА-эффекта [31]. Отметим, что нарушение четности является наиболее общим понятием, чем спиральность, хотя именно спиральность  $\overline{vrotv} \neq 0$

является самым распространенным механизмом нарушения четности гидродинамических течений. В дальнейшем, применяя метод многомасштабных асимптотических разложений, были разработаны линейные и нелинейные теории вихревого динамо для сжимаемых сред [32, 33], конвективных сред со спиральной внешней силой [34, 35]. Во всех упомянутых выше работах спиральная турбулентность считалась заданной, либо вопрос о ее происхождении (генерации) рассматривался отдельно [36]. Генерацию спиральной турбулентности в природных условиях обычно связывают с влиянием силы Кориолиса (или силы Лоренца) на турбулентное движение среды [10, 36], которое изначально было однородным изотропным и зеркально-симметричным (неспиральным). Отсюда естественно возникает вопрос о возможности генерации крупномасштабных полей (вихревых и магнитных) во вращающихся средах под действием мелкомасштабной силы с нулевой спиральностью  $\vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0$ . Такой пример генерации КВС во вращающейся несжимаемой жидкости был найден в работе [27]. Там же было показано, что в результате развития крупномасштабной неустойчивости в наклонно вращающейся жидкости возникают нелинейные крупномасштабные спиральные вихревые структуры типа вихрей Бельтрами или локализованные кинки с внутренней спиральной структурой.

В настоящей работе исследуется генерация КВС в стратифицированной вращающейся среде с учетом ее самогравитации и сжимаемости под действием мелкомасштабной неспиральной силы. В отличие от работы [27], выбрана декартовая система координат для вращающейся среды, в которой вектор угловой скорости вращения  $\vec{\Omega}$  направлен вдоль вертикальной оси  $OZ$ . Такая постановка проблемы связана с возможным астрофизическим приложением задачи. Полученный в работе инкремент крупномасштабной неустойчивости соответствует гидродинамическо  $\alpha$ -эффекту, который возникает в результате совместного действия неспиральной силы, вращения и стратификации среды. На основе метода многомасштабных асимптотических разложений построена линейная теория крупномасштабной неустойчивости. В результате развития этой неустойчивости типа  $\alpha$ -эффекта генерируются КВС. Полученные в настоящей работе результаты могут найти применение к ряду астрофизических задач.

### Основные уравнения и постановка задачи

Рассмотрим уравнения движения вязкой сжимаемой вращающейся среды с учетом самогравитации, которые, как известно, описываются следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho_{00}} + \frac{\rho}{\rho_{00}^2} \nabla P_{00} - \nabla \Phi + 2[\vec{V} \times \vec{\Omega}] + \nu \Delta \vec{V} + \eta \nabla \text{div} \vec{V} + \vec{F}_0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{V}) + \vec{V} \nabla \rho_{00} + \rho_{00} \text{div} \vec{V} = 0 \quad (2)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (3)$$

Здесь  $\vec{V}$ ,  $\rho$ ,  $P$ ,  $\Phi$  — возмущения скорости, плотности, давления и гравитационного потенциала среды относительно равновесного состояния:

$$\nabla P_{00} = -\rho_{00} \nabla \Phi_{00} - \rho_{00} [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]] \quad (4)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор элемента среды. Коэффициенты  $\nu$  и  $\eta = \nu \left( \frac{1}{3} + \frac{\zeta}{\mu} \right) = k\nu$  соответствуют первой и второй кинематической вязкости для сжимаемой среды,  $\zeta$ ,  $\mu$  — коэффициенты динамической вязкости,  $G$  — гравитационная постоянная. С целью упрощения вычислений выберем декартовую геометрию задачи, для которой вектор угловой скорости  $\vec{\Omega} = \vec{e} \Omega$  считаем постоянным и направленным вдоль оси  $OZ$  вертикально вверх ( $\vec{e}$  — единичный вектор по вертикали). Уравнения (1)-(3) дополним уравнением состояния среды, которое для простоты выберем в виде:

$$P = \rho c_s^2 \quad (5)$$

Здесь  $c_s$  — скорость звука. Уравнение равновесия (4), используя (5), перепишем в следующем виде:

$$c_s^2 \frac{\nabla \rho_{00}}{\rho_{00}} = c_s^2 \vec{k}_\rho = -\nabla \Phi_{00} - [\vec{\Omega} \times [\vec{\Omega} \times \vec{r}]] \quad (6)$$

Здесь  $\vec{k}_\rho = \vec{e} k_\rho$ ,  $k_\rho = L_\rho^{-1}$ , где  $L_\rho = \left( \frac{d \ln \rho_{00}}{dz} \right)^{-1}$  — характерный масштаб неоднородности или стратификации среды, которая возникает естественным образом в поле гравитации. Выбор обозначений для равновесного состояния (индекс с двумя нулями) связан с избеганием путаницы при использовании обозначений асимптотических разложений далее. В уравнение (1) включена внешняя сила  $\vec{F}_0$ , моделирующая источник возбуждения в среде мелкомасштаб-

ных и высокочастотных флуктуаций поля скорости  $\vec{v}_0$  с малым числом Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ . В отличие от предыдущих исследований [21-26, 28], здесь мы рассмотрим неспиральную внешнюю силу  $\vec{F}_0$  со следующими свойствами:

$$\text{div} \vec{F}_0 = 0, \vec{F}_0 \text{rot} \vec{F}_0 = 0, \text{rot} \vec{F}_0 \neq 0 \quad (7)$$

$$\vec{F}_0 = f_0 \vec{F}_0 \left( \frac{x}{\lambda_0}; \frac{t}{t_0} \right) \quad (8)$$

где  $\lambda_0$  – характерный масштаб,  $t_0$  – характерное время,  $f_0$  – характерная амплитуда. Очевидно, что топологические свойства поля скорости  $\vec{v}_0$  для невращающейся среды ( $\Omega = 0$ ) будут определяться условиями (7). Далее будет показано, что при учете вращения среды ( $\Omega \neq 0$ ) поле скорости  $\vec{v}_0$  уже не обладает тривиальной топологией, т. е. средняя спиральность отлична от нуля  $\overline{\vec{v} \text{rot} \vec{v}} \neq 0$ . Для удобства перейдем в уравнениях (1)-(8) к безразмерным переменным:

$$\vec{x} \rightarrow \frac{\vec{x}}{\lambda_0}, \quad t \rightarrow \frac{t}{t_0}, \quad \vec{v}_0 \rightarrow \frac{\vec{v}_0}{v_0}, \quad \vec{F}_0 \rightarrow \frac{\vec{F}_0}{f_0}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$$t_0 = \frac{\lambda_0^2}{\nu}, \quad f_0 = \frac{v_0 \nu}{\lambda_0^2}, \quad \rho \rightarrow \frac{\rho}{\lambda_0 A}, \quad c_s \rightarrow \frac{c_s}{c_0}, \quad A = k_\rho \rho_{00}, \quad \Phi_0 = \frac{v_0 \lambda_0}{t_0}$$

Будем считать, что внешняя сила  $\vec{F}_0$  возбуждает такие пульсации скорости  $\vec{v}_0$ , которые будут много меньше характерной скорости звука  $c_0$ , иначе говоря число Маха  $M = \frac{v_0}{c_0} \ll 1$ . Далее проводя замену плотности  $\rho$  на  $\rho \rightarrow \frac{\rho}{R}$  и приняв допущение  $R \approx M \ll 1$  получим искомую систему уравнений:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + R(\vec{V} \nabla) \vec{v} = -n c_s^2 \nabla \rho + \vec{e} n^2 c_s^2 \rho - \nabla \Phi + D[\vec{V} \times \vec{e}] + \Delta \vec{v} + k \nabla \text{div} \vec{v} + \vec{F}_0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + R \nabla(\rho \vec{V}) + (\vec{V} \vec{e}) + \frac{1}{n} \text{div} \vec{v} = 0 \quad (10)$$

$$\Delta \Phi = g \rho \quad (11)$$

где  $n = k_\rho \lambda_0$  – параметр стратификации на масштабе  $\lambda_0$ ,  $g = n(\omega_c t_0)^2$ ,  $\omega_c = \sqrt{4\pi G \rho_{00}}$  – частота Джинса [6, 7]. Характер эволюции полей, описываемых системой уравнений (9)-(11), в значительной степени будет определяться следующими безразмерными параметрами:  $D = \frac{2n \lambda_0^2}{\nu}$  – безразмерный параметр вращения на масштабе  $\lambda_0$ ,

связанный с числом Тейлора  $Ta = D^2$ , и являющийся характеристикой степени влияния сил Кориолиса над вязкими силами. Малым параметром асимптотического разложения считаем число Рейнольдса  $R = \frac{v_0 t_0}{\lambda_0} \ll 1$ , а параметр  $D$

произвольным, не влияющими на схему разложения. Мелкомасштабная сила и внешний источник вызывают мелкомасштабные и высокочастотные флуктуации полей на фоне равновесного состояния. Средние значения таких флуктуаций нулевые, но из-за нелинейного взаимодействия в некоторых порядках теории возмущения возникают члены, которые при усреднении не обращаются в нуль. Такие члены называются секулярными и они будут условием разрешимости многомасштабного асимптотического разложения. Нахождение уравнений разрешимости, т. е. уравнений для крупномасштабных возмущений, и является основной задачей. Метод многомасштабных асимптотических разложений позволяет получить уравнения для крупномасштабных возмущений, исключая секулярные вклады в асимптотических уравнениях. Методика построения асимптотических уравнений хорошо развита в работах [5, 31, 34, 35], поэтому, избегая громоздких технических преобразований уравнений, изложим данную методику последовательно. Для этого представим пространственные и временные производные в уравнениях (9)-(11) в виде асимптотического разложения:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow \partial_\tau + R^4 \partial_T, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \partial_i + R^2 \nabla_i \quad (12)$$

где  $\partial_i$  и  $\partial_\tau$  – обозначают производные по быстрым переменным  $\mathbf{x}_0 = (\vec{x}_0, t_0)$ , а  $\nabla_i$  и  $\partial_T$  – производные по медленным переменным  $\mathbf{X} = (\vec{X}, T)$ . Переменные  $\mathbf{x}_0$  и  $\mathbf{X}$  соответственно можно назвать мелкомасштабные и крупномасштабные переменные. Для переменных  $\vec{V}, \rho, \Phi$  представим разложение в виде ряда по малому параметру  $R$ :

$$\vec{V}(\vec{x}, t) = \vec{v}_0(x_0) + R(\vec{W}(X) + \vec{v}_1) + R^2\vec{v}_2 + R^3\vec{v}_3 + R^4\vec{v}_4 + R^5\vec{v}_5 +$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{R}\rho_{-1}(X) + \rho_0(x_0) + R(\Pi(X) + \rho_1) + R^2\rho_2 + R^3\rho_3 + R^4\rho_4 +$$

$$+ R^5\rho_5 \quad \Phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{R}\Phi_{-1}(X) + \Phi_0(x_0) + R(\Psi(X) + \Phi_1) + R^2\Phi_2 + R^3\Phi_3 + R^4\Phi_4 + R^5\Phi_5 \quad (13)$$

Подставляя разложения (12), (13) в систему уравнений (9)-(11) и собирая вместе члены с одинаковыми порядками по  $R$  до степени  $R^5$  включительно, получим уравнения многомасштабного асимптотического разложения. Алгебраическая структура уравнений многомасштабного асимптотического разложения имеет довольно громоздкий вид. Поэтому приведем основную систему секулярных уравнений для описания эволюции крупномасштабных возмущений, которая получается в пятом порядке по  $R$  теории возмущений:

$$\partial_T W_i + W_k \nabla_k W_i + \nabla_k (\overline{v_0^k v_2^i} + \overline{v_2^k v_0^i}) - \overline{v_0^i \nabla_k v_2^k} - \Delta W_i = -nc_s^2 \nabla_i \overline{\rho_3} - \nabla_i \overline{\Phi_3} \quad (14)$$

$$\nabla_i (\overline{\rho_0 v_2^i} + \overline{\rho_2 v_0^i}) = 0 \quad (15)$$

$$\Delta \Psi = 0 \quad (16)$$

В уравнениях (14)-(16) чертой сверху обозначено усреднение по быстрым переменным. Эти уравнения дополняются секулярными уравнениями, полученными в других порядках по  $R$ :

$$W_z = 0, \nabla_k W_k = 0, \Delta \Phi_{-1} = 0, \nabla_i H_i = 0, \Pi = 0, \Psi = \Psi(X) = const \quad (17)$$

$$D W_2 = -\frac{d\Phi_{-1}}{dx}, -D W_1 = \frac{d\Phi_{-1}}{dy}, W_1 = W_x, W_2 = W_y \quad (18)$$

Условие  $W_z = 0$  показывает, что в вертикальном направлении крупномасштабных движений нет, что вполне соответствует модели плоских спиральных галактик [6, 7]. Уравнение  $\nabla_k W_k = \frac{\partial W_1}{\partial x} + \frac{\partial W_2}{\partial y}$  указывает на несжимаемость двумерных крупномасштабных движений. Из уравнения (18) следует, что для крупномасштабных двумерных движений устанавливается баланс сил Кориолиса и гравитации, что аналогично геострофическому приближению (см. например [1-3]). Двумерность поля скорости  $\vec{W}$  позволяет рассматривать уравнения (14)-(16) в рамках квазидвумерной задачи, когда крупномасштабные производные по  $Z$  предпочтительнее, т. е.  $\nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial z} \gg \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ , а крупномасштабные возмущения  $W_1, W_2, H_1, H_2, \Psi$  зависят только от  $Z$  – координаты:

$$W_{1,2} = W_{1,2}(Z), \quad \Psi = \Psi(Z) \quad (19)$$

Для исследования устойчивости малых крупномасштабных возмущений в уравнениях (14)-(16) можно пренебречь нелинейными членами. В итоге упрощенная система уравнений, описывающая эволюцию крупномасштабных возмущений, принимает вид:

$$\partial_T W_1 - \nabla_z^2 W_1 + \nabla_z (\overline{v_0^x v_2^x} + \overline{v_2^x v_0^x}) - \overline{v_0^x \nabla_z v_2^x} = 0 \quad (20)$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_z^2 W_2 + \nabla_z (\overline{v_0^y v_2^y} + \overline{v_2^y v_0^y}) - \overline{v_0^y \nabla_z v_2^y} = 0 \quad (21)$$

$$\nabla_z (\overline{v_0^x v_2^x} + \overline{v_2^x v_0^x}) - \overline{v_0^x \nabla_k v_2^k} = -nc_s^2 \nabla_z \overline{\rho_3} - \nabla_z \overline{\Phi_3} \quad (22)$$

$$\nabla_z (\overline{\rho_0 v_2^x} + \overline{\rho_2 v_0^x}) = 0 \quad (23)$$

$$\nabla_z^2 \Psi = 0 \quad (24)$$

Поскольку нас интересует проблема генерации крупномасштабных вихревых движений во вращающейся среде с мелкомасштабными и высокочастотными флуктуациями, то нам необходимо получить уравнения (20)-(21) в замкнутом виде. Для этой цели нужно вычислить корреляторы:

$$-\nabla_z (\overline{v_0^x v_2^x} + \overline{v_2^x v_0^x}) + \overline{v_0^x \nabla_z v_2^x} = -\nabla_z T^{31} + R^{13} \quad (25)$$

$$-\nabla_z (\overline{v_0^y v_2^y} + \overline{v_2^y v_0^y}) + \overline{v_0^y \nabla_z v_2^y} = -\nabla_z T^{32} + R^{23} \quad (26)$$

Их вычисление легко осуществить используя решения полученных уравнений для мелкомасштабных полей в нулевом и во втором порядках по  $\mathbf{R}$ .

**Замкнутые уравнения для крупномасштабных полей**

Для вычислений мелкомасштабных полей нулевого порядка  $\vec{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$  необходимо детерминированным образом задать вид внешней неспиральной силы  $\vec{F}_0$ . В целях упрощения расчетов, выберем неспиральную внешнюю силу  $\vec{F}_0$ , удовлетворяющую условиям (7), в следующем виде:

$$\vec{F}_0 = f_0(\vec{i}\cos\phi_2 + \vec{j}\cos\phi_1) \tag{27}$$

где  $f_0$  – амплитуда внешней силы,  $\phi_1 = \vec{\kappa}_1\vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\phi_2 = \vec{\kappa}_2\vec{x} - \omega_0 t$ ,  $\kappa_1 = \kappa_0(1,0,0)$ ,  $\kappa_2 = \kappa_0(0,1,0)$ .

Далее, для простоты расчетов будет принято:

$\kappa_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 1$  [5, 34, 35]. Вид внешней силы  $\vec{F}_0$  (27) можно записать в комплексной форме:

$$\vec{F}_0 = \vec{i}\frac{f_0}{2}e^{i\phi_2} + \vec{j}\frac{f_0}{2}e^{i\phi_1} + k.c. \tag{28}$$

которая и будет использоваться в дальнейших вычислениях. Используя определение (28), получим следующие выражения для компонент поля скорости  $\vec{v}_0 = (u_0, v_0, w_0)$ :

$$u_0 = \frac{f_0}{2} \frac{a}{\Delta^*} e^{i\phi_1} + \frac{f_0}{2} \frac{b}{\Delta^*} e^{i\phi_2} + k.c. = u_{01} + u_{02} + u_{03} + u_{04} \tag{29}$$

$$v_0 = \frac{f_0}{2} \frac{b}{\Delta^*} e^{i\phi_1} + \frac{f_0}{2} \frac{(-a)}{\Delta^*} e^{i\phi_2} + k.c. = v_{01} + v_{02} + v_{03} + v_{04} \tag{30}$$

$$w_0 = \frac{f_0}{2} \frac{c}{\Delta^*} e^{i\phi_1} + \frac{f_0}{2} \frac{(-c)}{\Delta^*} e^{i\phi_2} + k.c. = w_{01} + w_{02} + w_{03} + w_{04} \tag{31}$$

Здесь  $u_{02} = (u_{01})^*$ ,  $u_{04} = (u_{03})^*$ ,  $v_{02} = (v_{01})^*$ ,  $v_{04} = (v_{03})^*$ ,  $w_{02} = (w_{01})^*$ ,  $w_{04} = (w_{03})^*$

и введены обозначения:

$$a = D(1 + i(n^2 c_s^2 - 1)) = D(1 + im), b = 2 + k + m + p + i(m + mk + p) = b_0 + ib_1,$$

$$c = Dnc_s^2, \quad p + 1 = \tilde{\Omega}c_s^2, \quad \tilde{\Omega} = 1 - \frac{(\omega_G t_0)^2}{c_s^2},$$

$$\Delta^* = \delta_0 + i\delta_1, \delta_0 = 2(1 + p + m) + k(1 + m) + D^2, \delta_1 = m(k + D^2) - 2 - k \tag{32}$$

Интересно отметить, что найденное в настоящем разделе мелкомасштабное поле скорости  $\vec{v}_0$  имеет нетривиальную топологию, обусловленную вращением среды. Важной топологической характеристикой поля скорости является спиральность  $Hel$ :

$$Hel = \int \vec{v}_0 \text{rot} \vec{v}_0 dx_0 = \overline{\vec{v}_0 \text{rot} \vec{v}_0} \tag{33}$$

которая определяется как мера «заузленности» силовых линий поля  $\vec{v}_0$  [2]. Подставляя значения (29)-(31) в формулу (33) находим:

$$Hel = i \frac{f_0^2}{|\Delta|^2} c(b - b^*) = -f_0^2 \frac{2Dn c_s^2 (m + mk + p)}{\delta_0^2 + \delta_1^2} \tag{34}$$

Отсюда видно, что спиральность мелкомасштабного поля скорости во вращающейся самогравитирующей среде появляется при наличии стратификации  $n \neq 0$ . Кроме того, генерация спиральности вращением среды предполагает появление гидродинамического  $\alpha$ -эффекта в самогравитирующей среде, ответственного за генерацию крупномасштабных вихрей. Структура полей  $\vec{v}_2$  (второго порядка по  $\mathbf{R}$ ) состоит также из четырех слагаемых:

$$u_2 = u_{21} + u_{22} + u_{23} + u_{24}$$

$$v_2 = v_{21} + v_{22} + v_{23} + v_{24} \tag{35}$$

$$w_2 = w_{21} + w_{22} + w_{23} + w_{24}$$

Приведем явный вид слагаемых в формулах (35):

$$u_{21} = (\mu W_1) e^{i\phi_1}, u_{22} = (u_{21})^*;$$

$$u_{23} = (\lambda W_2) e^{i\phi_2}, u_{24} = (u_{23})^* \tag{36}$$

$$v_{21} = (\lambda W_1) e^{i\phi_1}, v_{22} = (v_{21})^*;$$

$$v_{23} = (-\mu W_2) e^{i\phi_2}, v_{24} = (v_{23})^* \tag{37}$$

$$w_{21} = (\sigma W_1) e^{i\phi_1}, w_{22} = (w_{21})^*;$$

$$w_{23} = (-\sigma W_2) e^{i\phi_2}, w_{24} = (w_{23})^* \tag{38}$$

где введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{1}{\Delta^*} (\alpha\psi - l\phi - q\xi), l = (1 - i)(1 + im), q = (1 - i)n(p + 1) \tag{39}$$

$$\lambda = \frac{1}{\Delta^*} (b\psi + \alpha\phi + s\xi), s = Dn(p + 1) \tag{40}$$

$$\sigma = \frac{1}{\Delta^*} \left( c\psi - \frac{q}{\tilde{\Omega}} \phi + d\xi \right), d = (1 + k + ip)(1 - i) + D^2$$

В результате подстановки выше приведенных соотношений (29)-(31) и (35) в систему уравнений (20)-(21) получим замкнутую систему уравнений, которая описывает эволюцию крупномасштабных полей скорости  $\vec{W}$ :

$$\partial_T W_1 - \nabla_Z^2 W_1 + \alpha_1 \nabla_Z W_1 - \alpha_2 \nabla_Z W_2 = 0 \tag{41}$$

$$\partial_T W_2 - \nabla_Z^2 W_2 + \alpha_2 \nabla_Z W_1 + \alpha_1 \nabla_Z W_2 = 0 \tag{42}$$

Система уравнений (41)-(42) описывает динамику крупномасштабных возмущений малой амплитуды, что справедливо в рамках линейной теории. Коэффициент  $\alpha_1$  отвечает за конвективный перенос крупномасштабных возмущений, а посредством коэффициента  $\alpha_2$  устанавливается положительная обратная связь в результате которой возможна генерация вихревых структур. Выражения для коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  (при  $c_s = 1$  и  $k = 1$ ) имеют вид:

$$\alpha_1 = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dn(\Xi_1 + \tilde{\Omega}\Xi_2)}{[(1+D^2)^2(1+\frac{s(n^2-1)+2\tilde{\Omega}}{1+D^2})^2 + ((n^2-1)(1+D^2)-3)^2]} \tag{43}$$

$$\alpha_2 = \frac{f_0^2}{2} \frac{Dn(\Xi_3 - D^2\Xi_4 + D^2n^2\tilde{\Omega}\Xi_5)}{[(1+D^2)^2(1+\frac{s(n^2-1)+2\tilde{\Omega}}{1+D^2})^2 + ((n^2-1)(1+D^2)-3)^2]} \tag{44}$$

Здесь введены следующие обозначения для  $\Xi_1, \Xi_2, \Xi_3, \Xi_4, \Xi_5$ :

$$\Xi_1 = \left( D(D^2 + 1) + 3D(n^2 - 1) + 2D\tilde{\Omega} + (n^2 - 1)((n^2 - 1)(D^2 + 1) - 3) \right) (3n^2 - 5) + (D(n^2 - 1)(3(n^2 - 1) + 2\tilde{\Omega}) + 3D)(1 + 2n^2) \tag{45}$$

$$\Xi_2 = D(n^2 - 2)(D^2 + 1 + 3(n^2 - 1) + 2\tilde{\Omega}) - D((D^2 + 1)(n^2 - 1) - 3) - D(n^2 - 1)((n^2 - 1)(D^2 + 1) - 3) + Dn^2(D^2 + 1 + 3(n^2 - 1) + 2\tilde{\Omega}) + 3(n^2 - 1)(D^2 + 1) - 9 \tag{46}$$

$$\Xi_3 = (3 + 2\tilde{\Omega}(4 - n^2) + n^2(14 - 3n^2) - 11)(3 - (n^2 - 1)(D^2 + 1)) - (6 + 2D^2(n^2 - 1) - 4n^2 - 2\tilde{\Omega}) - (4n^2 + 2\tilde{\Omega} - 6)(n^2 + \tilde{\Omega})(1 + \frac{3(n^2-1)+2\tilde{\Omega}}{D^2+1}) \tag{47}$$



$$\begin{aligned} \Xi_4 = & (\tilde{\Omega} + 1)n^2(2 - n^2)(3 - (n^2 - 1)(D^2 + 1)) + \\ & +(6 + 2D^2(n^2 - 1) - 2n^2 + 4\tilde{\Omega} - 4n^4 - 2\tilde{\Omega}^2 - 6n^2\tilde{\Omega})(1 + \frac{3(n^2 - 1) + 2\tilde{\Omega}}{D^2 + 1}) \end{aligned} \quad (48)$$

$$\Xi_5 = 2(D^2 + 1)(1 + (n^2 - 1)^2) + 2\tilde{\Omega} - (n^4 - 1) + 3(n^2 + 1) \quad (49)$$

В «резонансном» случае ( $\omega_G t_0 \approx 1$ ), и для стратификации среды, когда  $n \approx 1$  или  $\lambda_0 \approx L_p$  коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  имеют самый простой вид:

$$\begin{aligned} \alpha_1 = & \frac{Hel}{4} \frac{7 - 2D^2}{(D^2 + 1)^2 + 9} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D^2(7 - 2D^2)}{[(D^2 + 1)^2 + 9]^2} \\ \alpha_2 = & \frac{Hsl}{2} \frac{5 - 7D^2}{(D^2 + 1)^2 + 9} = \frac{f_0^2}{2} \frac{D(5 - 7D^2)}{[(D^2 + 1)^2 + 9]^2} \end{aligned} \quad (50)$$

Таким образом, из полученных выше результатов можно сделать вывод, что в самогравитирующей среде возможен гидродинамический  $\alpha$ -эффект в результате действия неспиральной силы, вращения и стратификации среды.

**Крупномасштабная неустойчивость и генерация вихревых структур.**

Рассмотрим начальную стадию эволюции возмущений  $W_1$  и  $W_2$ . Для исследования крупномасштабной неустойчивости, описываемой уравнениями (41)-(42), выберем возмущения в виде плоских волн с волновым вектором  $\vec{K} \parallel OZ$ :

$$(W_1, W_2) = (A_{W_1}, A_{W_2}) \exp(iKZ - i\omega T) \quad (51)$$

Подставив (51) в уравнения (41)-(42) получим дисперсионное уравнение:

$$(-i\omega + K^2 + i\alpha_1 K)^2 - \alpha_2^2 K^2 = 0 \quad (52)$$

Представив  $\omega = \omega_0 + i\gamma$  из уравнения (52) находим:

$$\omega_0 = \alpha_1 K \quad (53)$$

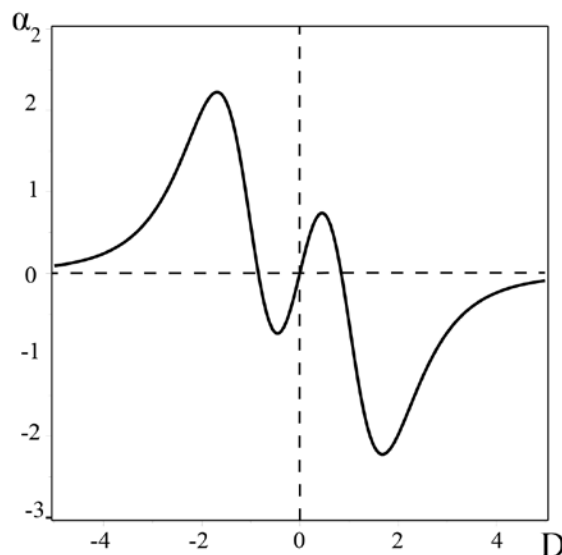


Рис. 1. График зависимости ГД  $\alpha$ -эффекта от вращения среды (параметра  $D$ ) при  $f_0 = 10$  и  $c_s = 1$

$$\gamma = \pm \alpha_2 K - K^2 \quad (54)$$

Реальная часть  $\omega_0 = Re\omega$  указывает на колебания крупномасштабных возмущений, а мнимая часть  $\gamma = Im\omega$  - на усиление (или затухание) крупномасштабных возмущений, которые возникают во вращающейся среде. Для нашей задачи представляет наибольший интерес анализ инкремента неустойчивости  $\gamma$ , и как следствие, исследование физических свойств коэффициента  $\alpha_2$  от параметров среды:  $\alpha_2 = \alpha_2(n, D, \Omega, \omega_G t_0)$ . В результате прове-

денных исследований было установлено, что на коэффициент усиления  $\alpha_2$  эффект вращения оказывает максимальное влияние, если безразмерные параметры стратификации и самогравитации соответственно равны:  $n \approx 1$  и  $\tilde{n} \approx 0$  или  $k_p \lambda_0 \approx \omega_G t_0 \approx 1$ . Для этого случая график зависимости коэффициента  $\alpha_2$  от параметра вращения  $D$  изображен на Рис. 1. Как видно из Рис. 1, при увеличении значения параметра  $D$  от 0 до  $\frac{\sqrt{35}}{7}$  мы наблюдаем рост значений  $\alpha_2$  до максимального значения  $\alpha_{2max} \approx 0.74$  для  $D_{max} \approx 0.45$ . В интервале  $D = (0.45, \frac{\sqrt{35}}{7})$  происходит спад величины  $\alpha_2$  в область отрицательных чисел, и проходя нулевую отметку  $\alpha_2 = 0$  при  $D = \frac{\sqrt{35}}{7}$ , достигает своего минимального уровня  $\alpha_{2min} \approx -2.22$  с параметром вращения  $D_{min} \approx 1.68$ . Далее при увеличении эффекта вращения ( $D \rightarrow \infty$ ) мы наблюдаем стремление  $\alpha_2 \rightarrow 0$ , или подавление ГД  $\alpha$ - эффекта. Подобное явление было описано в работе [37]. Антисимметричная зависимость  $\alpha_2$  от параметра вращения  $D$  позволяет перенести сделанные выше выводы для области отрицательных значений проекции  $D$  в обратном порядке. Инкремент неустойчивости ( $\gamma > 0$ ) (см. Рис. 2) имеет вид известного из линейной теории динамо [9-16,18-20]  $\alpha$ - эффекта. Максимальное значение инкремент неустойчивости  $\gamma_{max} = \frac{\alpha_2^2}{4}$  достигает при  $K_{max} = \frac{\alpha_2}{2}$ .

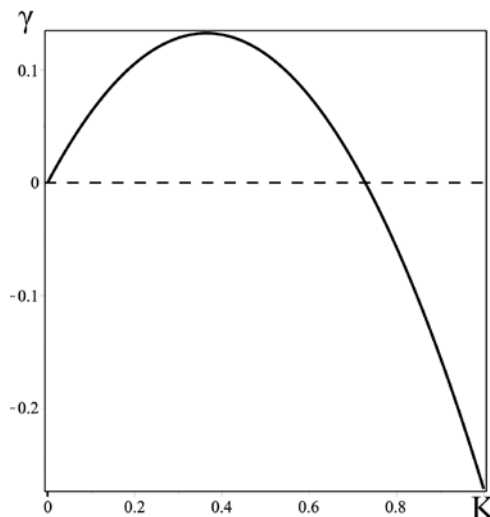


Рис. 2. График зависимости инкремента неустойчивости  $\gamma$  от волновых чисел  $K$

Заключение.

Применяя асимптотический метод многих масштабов получен новый тип крупномасштабной неустойчивости во вращающейся стратифицированной среде с самогравитацией при наличии мелкомасштабных осцилляций с нулевой спиральностью. Определены условия максимального роста вихревых возмущений в результате генерации средней спиральности  $Hel = \overline{\vec{v}_0 rot \vec{v}_0}$  вращением среды. Наибольший вклад эффекта вращения в величину средней спиральности достигается при наличии связи характеристик среды с характерными масштабами осцилляций:  $(\omega_G t_0) \approx c_s \approx (k_p \lambda_0)^{-1}$ . В заключении приведем количественные оценки характерных масштабов и времен крупномасштабной неустойчивости гидродинамического  $\alpha$ -эффекта на примере галактической среды. Максимальное значение для инкремента неустойчивости вихревых возмущений:  $\gamma_{max} \sim \alpha_2^2$ , а соответствующий характерный масштаб неустойчивой моды:  $L_{max} \sim 1/\alpha_2$  и характерный временной масштаб ее нарастания:  $T_{max} \sim 1/\gamma_{max}$ . Очевидно, что для нахождения этих масштабов нужно оценить коэффициент  $\alpha_2$ . Из теории динамо [10-16] известно определение гидродинамической спиральности  $\alpha_v \cong \frac{t_0}{3} \overline{\vec{v}_0 rot \vec{v}_0}$ , которую выразим через безразмерную амплитуду источника:

$$\alpha_v \approx \frac{t_0 v_0^2}{3\lambda_0} f_0^2$$

здесь  $f_0$  – безразмерная амплитуда силы, входящая в формулу (50). При выводе этой формулы мы полагали установление баланса между источником и диссипацией в стационарном случае. Далее из формулы (50) коэффициент усиления  $\alpha_2$  при малых числах параметра вращения  $D \ll 1$  (для центральной части нашей Галактики  $D \cong 0.18 \div 0.5$ ) принимает вид:

$$\alpha_2 \approx \frac{D}{40} f_0^2 \approx \frac{3 \alpha_v D}{40 v_0 R}$$

Для оценок часто полагают  $\alpha_v \approx v_0$  (см. например [6, 15]), и в итоге характерные пространственный и временной масштабы соответственно равны:

$$L_{max} \approx \frac{20 v_0}{3 \Omega_0}, T_{max} \approx \left(\frac{20}{3}\right)^2 \frac{v_0}{\Omega_0^2 \lambda_0}$$

Используя экспериментальные данные для нашей Галактики:  $\Omega_0 \approx 10^{-16} \text{ с}^{-1}$  (центральная часть Галактики),  $v_0 \approx 10 \text{ км/с}$ ,  $\lambda_0 \approx 100 \text{ пс}$  ( $1 \text{ пс} = 3 \cdot 10^{16} \text{ м}$ ),  $\nu \approx 10^{26} \text{ см}^2/\text{с}$  [6, 15] легко найти численные оценки  $L_{max}$  и  $T_{max}$ :  $L_{max} \sim 20 \text{ кпк}$ ,  $T_{max} \sim 5 \cdot 10^{11} \text{ лет}$ . Это вполне приемлемые оценки характерных масштабов для галактической генерации крупномасштабной вихревой структуры спирального типа.

#### Литература:

1. Петвиашвили, В. И., Похотелов О. А. Уединенные вихри в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат. 1989. 200 с.
2. Абурджания, Г. Д. Самоорганизация нелинейных вихревых структур и вихревой турбулентности в диспергирующих средах. М.: КомКнига. 2006. 328 с.
3. Онищенко, О. Г., Похотелов О. А., Астафьева Н. М. Генерация крупномасштабных вихрей и зональных ветров в атмосферах планет // УФН. 2008. Т. 178. Вып. 6. с. 605–615.
4. Шмерлин, Б. Я., Калашник М. В. Конвективная неустойчивость Рэлея в присутствии фазовых переходов влаги. Формирование крупномасштабных вихрей и облачных структур. // УФН. 2013. Т. 183. Вып. 5. с. 497–510.
5. Тур, А. В., Яновский В. В. Гидродинамические вихревые структуры. Харьков: Институт монокристаллов. 2012. 290 с.
6. Рольфс, К. Лекции по теории волн плотности. М.: Мир. 1980. 208 с.
7. Фридман, А. М., Хоперсков А. В. Физика галактических дисков. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2011. 632 с.
8. Незлин, М. В., Снежкин Е. Н. Вихри Россби и спиральные структуры: Астрофизика и физика плазмы в опытах на мелкой воде. М.: Наука. 1990. 240 с.
9. Моффат, Г. Некоторые направления развития турбулентности. Современная гидродинамика. Успехи и проблемы. М.: Мир. 1984. с. 48–76.
10. Штеенбек, М., Краузе Ф. Возникновение магнитных полей звезд и планет в результате турбулентного движения их веществ. // Магнитная гидродинамика. 1967. № 3. с. 19–44.
11. Моффат, Г. Возбуждение магнитного поля в проводящей среде. М.: Мир. 1980. 343 с.
12. Зельдович, Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. Магнитные поля в астрофизике. Ижевск: Инст. комп. иссл. РХД. 2006. 384 с.
13. Паркер, Ю. Беседы об электрических и магнитных полях в космосе. Ижевск: Инст. комп. иссл. РХД. 2010. 208 с.
14. Краузе, Ф., Рэдлер К.-Х. Магнитная гидродинамика средних полей и теория динамо. М.: Мир. 1984. 314 с.
15. Рузмайкин, А. А., Соколов Д. Д., Шукуров А. М. Магнитные поля галактик. М.: Наука. 1988. 279 с.
16. Соколов, Д. Д., Степанов Р. А., Фрик П. Г. Динамо на пути от астрофизических моделей к лабораторному эксперименту. // УФН. 2014. Т. 184. с. 318–335.
17. Krause, F., Rudiger G. On the Reynolds stresses in mean-field hydrodynamics. I. Incompressible homogeneous isotropic turbulence. // Astron. Nachr. 1974. V. 295. P. 93–99.
18. Моисеев, С. С., Сагдеев Р. З., Тур А. В., Хоменко Г. А., Яновский В. В. Теория возникновения крупномасштабных структур в гидродинамической турбулентности. // ЖЭТФ. 1983. Т. 85. с. 1979–1987.
19. Петросян, А. С. Дополнительные главы теории турбулентности. Спиральная турбулентность. Москва: ИКИ РАН. 2013. 60 с.

20. Moiseev, S. S., Rutkevitch P.B., Tur A. V., Yanovsky V.V. Vortex dynamos in a helical turbulent convection. // Sov. Phys. JETP. 1988. T. 67. с. 294–303.
21. Smith, L.M. and Waleffe F. Transfer of Energy to Two-Dimensional Large Scales in Forced, Rotating Three-Dimensional Turbulence. // Physics of Fluids. 1999. V. 11. №. 6. — P. 1608.
22. Smith, L. M. and Waleffe F. Generation of Slow Large Scales in Forced Rotating Stratified Turbulence. // Journal of Fluid Mechanics. 2002. V. 451. P. 145–168.
23. Berezin, Y.A. and Zhukov V.P. An Influence of Rotation on Convective Stability of Large Scale Disturbances in Turbulent Fluid. // Izv. AN SSSR. Mech. Zhidk. Gaza. 1989. V. 4. P. 3
24. Kitchatinov, L. L., Rudiger G. and Khomenko G. Large-scale vortices in rotating stratified disks. // Astron. Astrophys. 1994. V. 287. P. 320.
25. Rutkevich, P.B. Equation for vortex Instability Caused by Convective Turbulence and Coriolis Force. // JETP. 1993. V. 77. P. 933–938.
26. Kopp, M., Tur A., Yanovsky V. The Large Scale Instability in Rotating Fluid with Small Scale Force // Open Journal of Fluid Dynamics. 2015. V. 5. P. 128–138.
27. Kopp, M., Tur A., Yanovsky V. Nonlinear Vortex Structures in Obliquely Rotating Fluid. // Open Journal of Fluid Dynamics. 2015. V. 5. P. 311–321.
28. Копп, М. И. Крупномасштабное магнитовращательное динамо. I. Линейная теория без внешнего магнитного поля // Альманах современной науки и образования. 2016. № 4 (106). с. 59–73.
29. Новиков, Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. Вып. 5 (11). с. 1919–1926.
30. Кляцкин, В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М., Наука. 1980. 337 с.
31. Frishe, U., She Z. S., Sulem P.L. Large Scale Flow Driven by the Anisotropic Kinetic Alpha Effect. // Physica D. 1987. V. 28. P. 382.
32. Дружинин, О. А., Хоменко Г. А. Нелинейная теория гидродинамического альфа-эффекта в сжимаемой среде и обратный каскад энергии. В тр. Межд. конф.: Нелинейные и турбулентные процессы в физике. Киев: Наук. думка. 1989. Т. 2. с. 83–86.
33. Rutkevitch, P.B., Sagdeev R. Z., Tur A. V., Yanovsky V.V. Nonlinear dynamic theory of the  $\alpha$ -effect in compressible fluid. Proceeding of the IV Intern. Workshop on Nonlinear and Turb. Pros. in Physics. Kiev. 1989. V. 2. P. 172–175.
34. Tur, A. V., Yanovsky V.V. Large-scale instability in hydrodynamics with stable temperature stratification driven by small-scale helical force. — ArXiv: 1204.5024 v. 1 [physics. Flu-dyn.](2012).
35. Tur, A. V., Yanovsky V.V. Non Linear Vortex Structure in Stratified Driven by Small-scale Helical Forse. // Open Journal of Fluid Dynamics. 2013. V. 3. P. 64–74.
36. Чхетиани, О. Г. Самоорганизация и турбулентность в отражательно-несимметричных плазменно-гидродинамических средах. Дисс. на соиск. уч. степени докт. физ.-мат. наук. Москва. 1999. 262 с.
37. Rudiger, G. On the  $\alpha$ -Effect for Slow and Fast Rotation. // Astron. Nachr. 1978. V. 299. №.4. P. 217–222.

## Разработка лабораторного стенда для количественного термозондового анализа полупроводниковых материалов

Лепескин Юрий Павлович, магистрант;

Пермяков Никита Вадимович, ассистент

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина)

Термозондовый метод традиционно применяется для определения типа проводимости полупроводниковых материалов, как правило, узкозонных.

Из конструктивных особенностей выполнения термозонда с микронным разрешением следует отметить работы Акимова [1], а также разработки Кокошкина [2] по реализации движущего зонда термопары. В 1970–1980-е

годы в ЛЭТИ интенсивно развивается количественный термозондовый метод для оценки отклонения от стехиометрии в фазах переменного состава [3, 4]. Физической основой такого анализа являются электрическая активность собственных дефектов. Иными словами, легированные материалы с разным отклонением от стехиометрии имеют разную концентрацию носителей заряда и отличаются ко-

<sup>1</sup> Работа выполнялась в рамках проекта RFMEFI58414X0005, финансируемого Минобрнауки РФ.

эффицентом термо-ЭДС. Эти вопросы остаются актуальными в настоящее время [5, 6].

Методические особенности разработки количественного термозондового метода включают снятие температурной зависимости термо-ЭДС с регистрацией на планшетном координатном потенциометре с последующей графической дифференциацией зависимости [7]. Кроме того, для количественного анализа была использована методика формирования стандартного образца, представляющего собой шайбу с шестью смонтированными образцами с разным отклонением от стехиометрии и значением коэффициента термо-ЭДС от  $-300$  мкВ/К до  $+200$  мкВ/К, измеренные стандартными методами. Эти эталоны использовались для коррекции термозондовых измерений, значение которых могли незначительно меняться из-за положения клювика термопары относительно контактного острия или из-за режимов керамической микроречи, охватывающей острие.

Из физико-химических задач, решенных с помощью количественного термозондового метода следует отметить исследование неоднородностей на основе теллурида свинца, происходивших в процессе длительной работы термоэлемента [8], изучения особенностей формирования тонких пленок при изменении парциальных давлений легколетучих компонентов [9], исследования диффузионных процессов и процессов кристаллизации узкозонных полупроводников [9, 10], а также возникновение новых фаз в виде микровключений [11, 12].

Количественный термозондовый метод был положен в основу контроля шихты при приготовлении специальных мишеней для получения твердых растворов халькогенидов свинца-халькогенидов олова, для оценки их составов [13], а также для определения состава, соответствующего конгруэнтному плавлению [14, 15].

В настоящее время большое внимание уделяется вопросам развития мемристоров [16–18]. Основным достоинством «резисторной памяти» является энергонезависимость, устойчивость к радиационному излучению, а также возможность создания нейронных сетей [19, 20].

Среди материалов, применяемых для мемристоров, используются так называемые фазы переменного состава [21], в которых изменение электрофизических свойств от высокоомного до низкоомного происходит путем изменения концентрации электрически активных собственных компонентов и вакансий. К таким материалам относятся оксиды титана, ванадия, меди, тантала, олова и др., а также твердые растворы на их основе.

Существует несколько способов формирования элемента резисторной памяти. Наиболее часто используется способ формирования проводящего канала. В канале имеется высокая концентрация носителей заряда, созданная приложением локального электрического поля. Далее, изменяя полярность происходит разрыв проводимости в канале (положение выключено). Далее для переключения во включенное состояние требуется приложить электрическое поле в направлении, замыкающем канал. Для

исследования проводящего канала, тестирования концентрации носителей заряда в локальных областях и анализа переходных процессов от состояния «выключено» — до «включено» актуальна разработка зондовой установки, обеспечивающей решение вышеперечисленных задач.

Целью настоящей работы являлось создание компактной лабораторной установки с блоками, изготовленными с помощью технологий 3D печати [22]. Сущность методик получения информации основана на использовании вышеперечисленных методических разработок по нестационарному термозондовому методу.

Таким образом электрофизические свойства полупроводниковых твердых растворов, в частности на основе халькогенидов свинца — халькогенидов олова, в значительной степени определяются отклонением от стехиометрии. Термозондовый метод является чувствительным к этим отклонениям. Поэтому этот метод может быть применен для оценки электрофизических свойств полупроводников в локальной области ( $\sim 50$  мкм).

Перспективность применения метода термозонда для халькогенидов свинца-олова обусловлена и тем, что они обладают высоким значением коэффициента термо-ЭДС и являются низкоомными, т. е. не возникает затруднений при контакте острия зонда с полупроводником. В области собственной концентрации носителей заряда чувствительность метода для электрически активных атомов составляет  $\sim 10^{15}$  ат./см<sup>-3</sup>.

При анализе твердых растворов халькогенидов свинца-олова термозондовый метод эффективно дополняет рентгеноспектральный микроанализ (РСМА). РСМА позволяет определять значение состава «x» в локальных областях, а термозондовый метод дает информацию о составе «у», или концентрации электрически активной примеси [23].

В то же время следует заметить, что твердые растворы халькогенидов свинца-олова — узкозонные материалы, и для образцов р-типа с низкой концентрацией дырок с изменением температуры может происходить смена знака коэффициента термо-ЭДС. Другими словами, одному и тому же значению коэффициента термо-ЭДС могут соответствовать разные значения концентрации носителей заряда для образца с фиксированным  $x$ . Эта неоднозначность характеристики снимается с помощью нестационарного термозондового метода. В разработанном стенде расчет коэффициента термо-ЭДС проводится компьютерным путем (в базовой методике осуществлялось графическое дифференцирование температурной зависимости термо-ЭДС).

Из электрофизических параметров наибольший интерес представляет определение значения концентрации носителей заряда. При использовании результатов термозондового метода для количественных оценок, как правило, проводят построение калибровочных зависимостей термозондового коэффициента термо-ЭДС от концентрации носителей заряда р- или п-типа для фиксированного значения состава «x».

Возможность экспериментальной оценки коэффициента термо-ЭДС, нахождения из этих данных интеграла Ферми предопределяет перспективность создания программного обеспечения для нахождения значений других кинетических коэффициентов посредством промежуточного расчета положения уровня Ферми с учетом параметров зонной структуры.

В простейшем приближении связывающими уравнениями являются:

Концентрация электронов:

$$n = N_c F_{\frac{1}{2}}(\mu^+) = \frac{2(2\pi m_{nd} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} F_{\frac{1}{2}}(\mu^+) \quad (1)$$

$$\mu = kT \ln \left( \frac{h^3 n}{2(2\pi m_{pd} kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (2)$$

где  $m_{nd}$  — эффективная масса плотности состояний электронов;  $\mu^+ = \frac{\mu}{kT}$  — приведенный уровень Ферми;  $h$  — постоянная Планка;  $k$  — постоянная Больцмана.

Концентрация дырок:

$$p = N_v F_{\frac{1}{2}}(\mu^-) = \frac{2(2\pi m_{pd} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} F_{\frac{1}{2}}(\mu^-) \quad (3)$$

$$\mu = -E_g - kT \ln \left( \frac{h^3 p}{2(2\pi m_{pd} kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (4)$$

где  $m_{pd}$  — эффективная масса плотности состояний дырок.

Интеграл Ферми:

$$F_r(\mu^+) = \int_0^\infty \frac{x^r dx}{1 + \exp(x - \mu^+)} \quad (5)$$

где  $r$  — фактор рассеяния.

Коэффициент термо-ЭДС для электронов и дырок:

$$\alpha_{n,p} = \mp \frac{k}{e} \left( \frac{r+2}{r+1} \frac{F_{r+1}(\mu^\pm)}{F_r(\mu^\pm)} - \mu^\pm \right) \quad (6)$$

где  $e$  — заряд электрона.

В случае смешанной проводимости:

$$\alpha = \frac{\alpha_p U_p p - \alpha_n U_n n}{U_p p + U_n n} \quad (7)$$

где  $U_p$  и  $U_n$  — подвижности дырок и электронов.

При учете непараболичности зон в приближении Кейна система базовых уравнений усложняется, интегралы Ферми становятся двухпараметрическими при сохранении принципов расчета [24].

### Разработка стенда для измерения термо-ЭДС

Нами была разработана установка термозондового анализа. Преимущество установки, разработанной в ходе данной работы, заключается в автоматизации измерений в ЭВМ с помощью микроконтроллера и программного обеспечения в среде LabVIEW.

На рисунке 1 изображена блок-схема установки. В качестве термозонда была использована игла. Термозонд закреплен к нагревательному блоку, в котором расположены нагреватель и терморезистор (Epcos B57560G номиналом 100 кОм). Использован мультиметр Tektronix DMM4020.

С помощью микроконтроллера Arduino задается температура нагревателя, который питается отдельным блоком питания постоянного напряжения 12В. Терморезистор необходим для измерения и поддержания заданной температуры нагревателя. Сопротивление терморезистора измеряется микроконтроллером с помощью схемы делителя напряжения, реализованной на печатной плате. Значение этого сопротивления переводится ми-

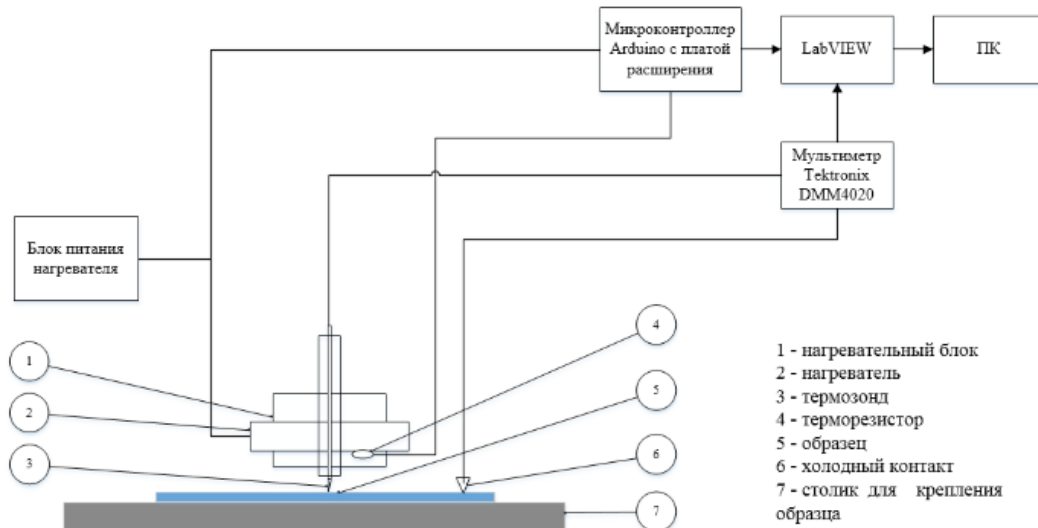


Рис. 1. Блок-схема установки

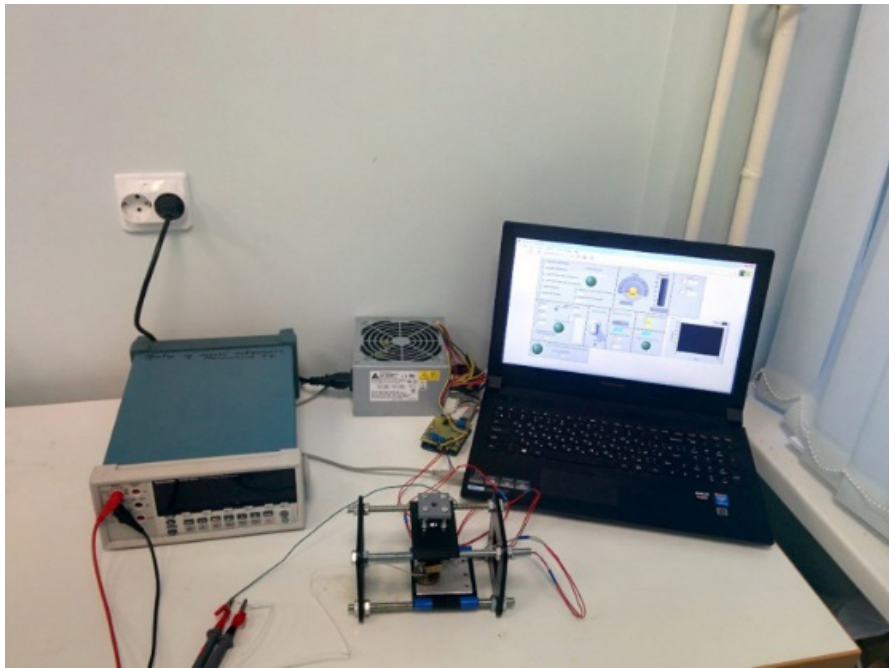


Рис. 2. Внешний вид установки

кроконтроллером с помощью заданной программы в значение температуры.

После нагрева острия термозонда производится измерение напряжения на образце между горячим и холодными контактами. Значение напряжения передается на микроконтроллер. В данной схеме необходим про-

граммный пакет LabVIEW, который осуществляет связь микроконтроллера с компьютером. На рисунке 2 представлен внешний вид лабораторной установки.

Кроме управления измерением созданный виртуальный прибор в LabVIEW также позволяет строить зависимость коэффициента термо-ЭДС от концентрации но-

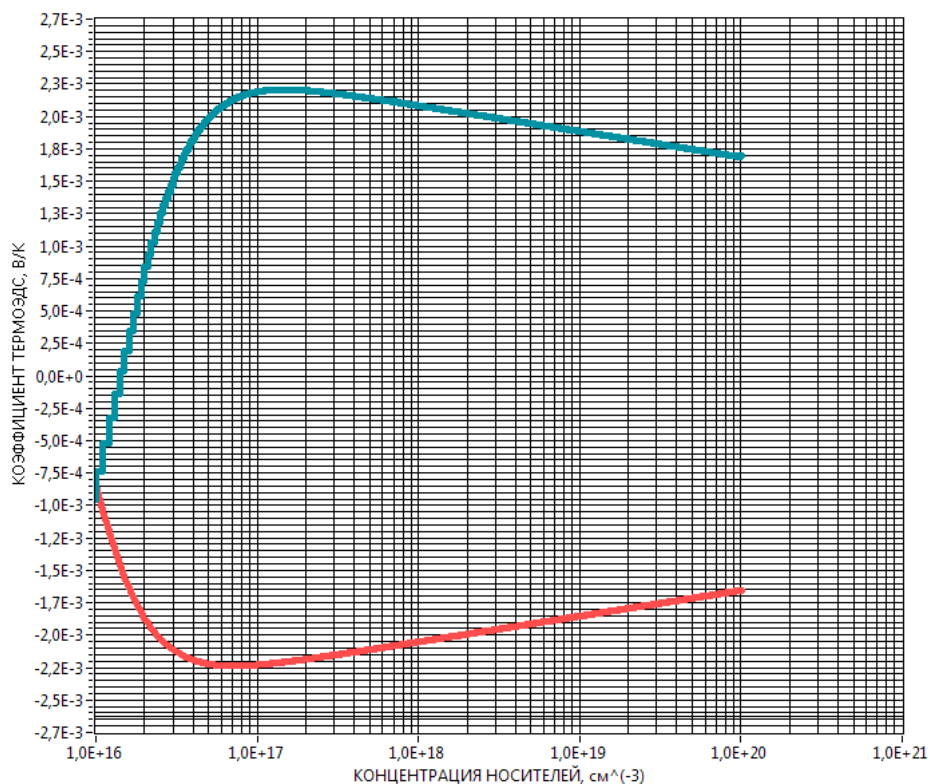


Рис. 3. Зависимость коэффициента термо-ЭДС от концентрации носителей заряда

сителей заряда. Алгоритм расчета по различным моделям зонной структуры  $A^4V^6$  основан на известных зависимостях (1–7) или более сложных связях [24], связывающих положение уровня Ферми со значениями параметров полупроводниковых материалов. На рисунке 3 изображен график зависимости коэффициента термо-ЭДС от концентрации носителей заряда, построенный с помощью виртуального прибора.

В результате исследований был разработан лабораторный стенд термозондового анализа. Был изготовлен термозонд. Создана плата расширения для микроконтроллера Arduino, которая считывает температуру терморезистора, управляет нагревателем. Написано программное обеспечение в среде LabVIEW, которое позволяет автоматизировать измерения, рассчитывать зависимости термо-ЭДС от концентрации носителей, сохранять результаты в текстовый файл и строить графики.

#### Литература:

1. Акимов, Г. В. Метод микротермоЭДС // Докл. АН СССР — 1946. — Т. 51. — № 3. — С. 205–208.
2. Кокошкин, В. А. Исследование однородности высоколегированных полупроводников с помощью нагретого зонда-термопары // Заводская лаборатория. — 1965. — т. 31. — № 4. — с. 461–462.
3. Мошников, В. А. О возможности применения термозондового метода для фазового анализа и исследования однородности твердых растворов  $Pb_{1-x}Sn_xTe$  // Известия ЛЭТИ. — 1977. — № 211. — с. 129–131.
4. Дедегкаев, Т. Т. и др. Проверка зонда-термопары в рабочих условиях // Заводская лаборатория. — 1978. — т. 44. — № 10. — с. 1229–1230.
5. Мошников, В. А., Александрова О. А. Физическая химия дефектов нестехиометрических полупроводников: 1. Модели дефектности кристаллов в современном материаловедении // В сборнике: Труды VII Всероссийской школы-семинара студентов, аспирантов и молодых ученых «Диагностика наноматериалов и наноструктур». РГРУ. — 2014. — с. 70–98.
6. Мошников, В. А., Александрова О. А. Физическая химия дефектов нестехиометрических полупроводников: 2. Локальный метод анализа отклонения от стехиометрии. Анализ диффузионных процессов собственных дефектов в процессе эпитаксии // В сборнике: Труды VII Всероссийской школы-семинара студентов, аспирантов и молодых ученых «Диагностика наноматериалов и наноструктур». РГРУ. — 2014. — с. 99–133.
7. Мошников, В. А. Локальные энергетические воздействия в исследовании и получении полупроводниковых твердых растворов // Известия СПбГЭТУ. — СПб, 1996. — № 496. — с. 11–33.
8. Дедегкаев, Т. Т. и др. Исследование неоднородностей в твердых растворах на основе теллурида свинца // Известия ЛЭТИ. — 1979. — № 250. — с. 103–110.
9. Дедегкаев, Т. Т. и др. Влияния давления пара теллура на состав пленок  $Pb_{1-x}Sn_xTe$  // Неорганические материалы. — 1985. — Т. 21. — № 6. — с. 1054–1056.
10. Бакин, А. С. и др. Исследование диффузии индия в твердом растворе  $Pb_{1-x}Sn_xTe$  // Известия ЛЭТИ. — 1982. — № 302. — с. 77–80.
11. Мошников, В. А. и др. Исследование процессов кристаллизации твердых растворов  $(Pb_{1-x}Sn_x)_{1-y}Te_y$  // Известия ЛЭТИ. — 1981. — № 281. — с. 116–121.
12. Assenov, R., Moshnikov V. A., Yaskov D. A. On the behavior of iodine in  $PbTe$  and  $SnTe$  // Physica Status Solidi. A: Applications and Materials Science. — 1985. — Т. 88. — № 281. — с. 116–121.
13. Пат. RU 2155830. Способ изготовления шихты для получения твердых растворов халькогенидов свинца и олова парофазными методами / Бестаев М. В., Мошников В. А. и др. Оpubл. 09.07.1997.
14. Измайлов, Н. В. и др. Определение состава селенида свинца, соответствующего максимальной температуре плавления // Неорганические материалы. — 1989. — Т. 25. — № 3. — с. 515–517.
15. Измайлов, Н. В. и др. Изучение однородности твердых растворов  $(Pb_{0.9}Sn_{0.1})_{1-y}Se_y$  // Журнал физической химии. — 1988. — Т. 62. — № 5. — с. 1370–1373.
16. Chua, L. Resistance switching memories are memristors / L. Chua // Applied Physics A. — 2011. — Vol. 102. — №. 4. — P. 765–783.
17. Memristors: Nanoscale Resistive Switching in Amorphous Perovskite Oxide ( $a-SrTiO_3$ ) Memristors / H. Nili et al. // Advanced Functional Materials. — 2014. — Vol. 24. — №. 43. — P. 6733–6733.
18. Gale, E.  $TiO_2$ -based memristors and ReRAM: materials, mechanisms and models (a review) / E. Gale // Semiconductor Science and Technology. — 2014. — Vol. 29. — №. 10. — P. 104–110.
19. Training and operation of an integrated neuromorphic network based on metal-oxide memristors / M. Prezioso et al. // Nature. — 2015. — Vol. 521. — №. 7550. — P. 61–64.
20. Permiakov, N., Ivanov A., Moshnikov V. The laboratory facility and testing methods memristor structures // В сборнике: 2015 International Conference «Stability and Control Processes» in Memory of V. I. Zubov (SCP). — 2015. — P. 187–189.



21. Ормонт, Б. Ф. Соединения переменного состава [Текст] // Б. Ф. Ормонт. — Л.: Химия. Ленингр. отд-ние, 1969. — 48 с.
22. Матюшкин, Л. Б., Пермяков Н. В. Применение технологии 3d-печати в обеспечении профессионально ориентированной подготовки кадров в интересах наноиндустрии // Биотехносфера. — 2013. — № 3 (27). — с. 38–47.
23. Александрова, О. А., Максимов А. И., Мошников В. А., Чеснокова Д. Б. Халькогениды и оксиды элементов IV группы. Получение, исследование, применение / Под ред. Мошникова В. А. // СПб.: Изд-во «Технолит», 2008. 240 с.
24. Горелик, А. И., Межва М., Мошников В. А. Количественный термозондовый анализ твердых растворов теллурида свинца-теллурида олова // Известия СПбГЭТУ. — 1994. — № 471. — с. 26–33.

## Управление спектральным составом выходного сигнала при модуляции электронного потока анодным напряжением

Парпула Ольга Андреевна, магистр, аспирант;  
 Поляков Игорь Вячеславович, кандидат физико-математических наук, доцент;  
 Ермолаев Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук  
 Волгоградский государственный технический университет

*В работе приведены исследования влияния переменного анодного напряжения на электронный поток магнетронного генератора. Эксперименты показали, что при модуляции потока анодным напряжением сложной формы можно получить комбинационные составляющие в спектре генерации магнетрона.*

**Ключевые слова:** магнетрон, спектр генерации, комбинационные составляющие, математическая модель, колебания  $\pi$ -вида

В настоящее время все больше внимания уделяется возможности генерации сигналов сложного спектрального состава и управлению спектром генерации. Такие проблемы возникают при конструировании приборов антирадарной защиты, в которых используются системы из нескольких магнетронов работающих на разных частотах [1]. Антирадарная система создает на экранах РЛС сигнал с комбинационными составляющими, имитирующими ложные цели (фантомные цели). Для расширения спектра сигнала используется сочетание нескольких магнетронов, что сильно увеличивает массу прибора в целом, так как магнетронные блоки генератора достаточно тяжелы. Наличие нескольких магнетронов связано с тем, что ширина полосы пропускания магнетрона достаточно мала, составляя несколько процентов от частоты несущей. Поэтому увеличение полосы пропускания очень сильно усложняет конструкцию и стоимость прибора.

Использование классических магнетронов для генерации сигналов с комбинационными составляющими в спектре более продуктивной оказывается идея, аналогичная рассматриваемой в работе [2].

Суть подхода состоит в том, чтобы заставить электронный поток колебаться с нужной частотой, что приведет к появлению в спектре генерируемого высокочастотного сигнала дополнительных гармонических составляющих. Для модуляции электронного потока в этом случае можно использовать переменную составляющую анодного напряжения.

Конструктивная реализация такого подхода потребует лишь незначительной переделки источника питания. Изменения конструкций магнетрона в этом случае не требуется и возможно использование серийных моделей.

Для исследования возможности генерации комбинационных составляющих в спектре магнетрона при модуляции электронного потока изменяющимся анодным напряжением используется самосогласованная многочастотная трехмерная модель магнетронного генератора [3,4] реализованная методом «крупных частиц». Система уравнений состоит из уравнений движения заряженных частиц в скрещенных полях:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = |\eta| E_r + \frac{v_\varphi^2}{r} - \omega v_\varphi; \quad \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = |\eta| E_\varphi - 2 \frac{v_r v_\varphi}{r} + \omega v_r; \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = |\eta| E_z.$$

где  $r, \varphi, z$  — координаты частиц в цилиндрической системе;  $v_r, v_\varphi, v_z$  — составляющие скорости частиц;  $E_r, E_\varphi, E_z$  — компоненты вектора суммарной напряженности высокочастотного, кулоновского и статического полей;  $\omega$  — частота циклотронных колебаний.

Входящая в правую часть уравнений движения напряженность электрического поля представляется в виде суперпозиции напряженностей высокочастотного поля  $\mathbf{E}$ , постоянного поля  $\mathbf{E}_0$ , приложенного между анодом и катодом, и поля пространственного заряда  $\mathbf{E}'$  [5]:

$$\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'.$$

Для нахождения распределения поля пространственного заряда, решается уравнение Пуассона, записанное в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \rho(r, \varphi, z),$$

а затем, из соотношения

$$\mathbf{E}' = -\text{grad}U(\mathbf{r}, t)$$

вычисляется напряженность поля  $\mathbf{E}'$  в точке нахождения частицы.

Высокочастотное поле  $\tilde{\mathbf{E}}$  резонансной системы представляют в виде разложения по структурным функциям электродинамической структуры магнетрона с коэффициентами, зависящими от времени.

$$\tilde{\mathbf{E}} = \Sigma A_n(t) \mathbf{e}_n(x, y, z).$$

Амплитудную часть находим, решая систему уравнений возбуждения:

$$\frac{dA_n}{dt} = -\frac{1}{N_n 2\pi} \int_{t-T_n}^t \int_V \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \mathbf{e}_n dV \cos(\omega_n \tau + \psi_n) d\tau - \frac{\omega_n}{2Q_n} A_n;$$

$$\frac{d\psi_n}{dt} = -\frac{1}{A_n N_n 2\pi} \int_{t-T_n}^t \int_V \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \mathbf{e}_n dV \sin(\omega_n \tau + \psi_n) d\tau;$$

где  $N_n$  — эквивалентная емкость замедляющей системы или норма;  $T_n$  — период колебаний с номером  $n$ ;  $\mathbf{j}$  — возбуждающий ток,  $\mathbf{e}_n$  — структурная функция поля данного вида колебаний.

$$e_r = -\frac{N\theta}{\pi k r} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma \left( \frac{\sin \gamma \theta}{\gamma \theta} \right) \frac{Z_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \sin(\gamma \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{w} z\right),$$

$$e_\varphi = \frac{N\theta}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\sin \gamma \theta}{\gamma \theta} \right) \frac{Z_\gamma(kr)}{Z'_\gamma(kr_a)} \cos(\gamma \varphi) \sin\left(\frac{\pi}{w} z\right),$$

здесь  $Z_\gamma$  и  $Z'_\gamma$  — комбинация функций Бесселя и Неймана:

$$Z_\gamma(kr) = J_\gamma(kr) - \frac{J_\gamma(kr_k)}{N_\gamma(kr_k)} N_\gamma(kr), \quad Z'_\gamma(kr) = J'_\gamma(kr) - \frac{J'_\gamma(kr_k)}{N'_\gamma(kr_k)} N'_\gamma(kr),$$

$N$  — количество резонаторов в замедляющей системе;  $\gamma = n + mN$  — постоянная распространения;  $k$  — волновое число;  $\theta$  — половинный размер щели резонатора.

Система дополняется уравнениями, описывающими термоэлектронную эмиссию и уравнениями, описывающими вторичную эмиссию.

Входными параметрами модели взяты геометрия пространства взаимодействия и электродинамический режим широко распространённого классического магнетрона М-155.

Рассматривая электронный поток в магнетронном генераторе как систему с квадратичной нелинейностью, на вход которой подан синусоидальный сигнал, генерируемый резонаторной системой магнетрона. В теории нелинейных колебаний показано [5], что на выходе такой системы спектр сигнала имеет дополнительно постоянную составляющую и вторую гармонику входного сигнала.

На рисунке 1 показан спектр выходного сигнала при постоянном анодном напряжении. Частота основной гармоники 2,45 ГГц. По оси абсцисс на графике отложена частота гармоники, выраженная в ГГц. По оси ординат откладываются амплитудные значения Фурье-гармоник мощности, выраженные в абсолютных единицах.

Согласно результатам экспериментов, проведенных на данной модели, постоянная составляющая сигнала присутствует в спектре, но поскольку она не играет ни какой роли в исследуемых процессах, то отфильтровывается на этапе Фурье — анализа.

Для получения комбинационных составляющих в спектре генерации магнетрона электронный поток модулируется анодным напряжением, сложной формы:

$$U = U_0 + U_m \cos(2\pi f_a t + B \cos(\frac{2\pi t}{T}))$$



Рис. 1. Спектр сигнала при постоянном анодном напряжении (Частота сигнала  $\pi$ -вида  $f_\pi=2,45$  ГГц)

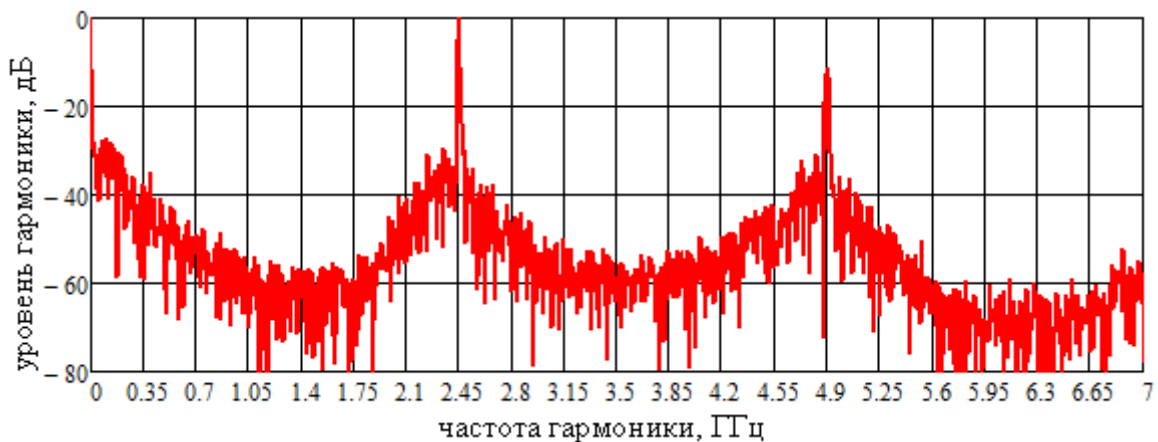
В ходе численного эксперимента исследовалась зависимость спектра выходного сигнала от коэффициента  $B$ . На рисунках 2–4 представлены спектры выходного сигнала, с частотой колебаний  $\pi$ -вида  $f_\pi=2,45$  ГГц, при различных значениях коэффициента  $B$ .



Рис. 2. Спектр выходного сигнала ( $B=4$ )



Рис. 3. Спектр выходного сигнала ( $B=8$ )

Рис. 4. Спектр выходного сигнала ( $V=12$ )

Анализ полученных данных показывает, что при  $V=4$  наблюдается появление в спектре выходного сигнала комбинационных составляющих, возле первой гармоники (2,45 ГГц) с частотами 2,04 ГГц, 2,24 ГГц, 2,65 ГГц и 2,86 ГГц; возле нулевой гармоники 0,20 ГГц и 0,41 ГГц; возле второй гармоники 4,49 ГГц, 4,70 ГГц, 5,10 ГГц и 5,31 ГГц (рисунок 2). При увеличении коэффициента  $V$  (рисунки 3, 4) гармоники комбинационных составляющих значительно снижаются, падая до уровня шума,

Эксперименты, проведенные с использованием математической модели, показывают, что наличие высокочастотной составляющей анодного напряжения может приводить к модуляции электронного потока и возбуждению комбинационных гармоник насыщающих спектр генерируемого сигнала.

Уровни мощности возникающих в этом случае комбинационных гармоник зависят от переменной составляющей анодного напряжения. Полученные результаты могут быть использованы при конструировании широкого круга приборов, используемых для антирадарной защиты.

#### Литература:

1. Бакулев, П. А. Радионавигационные системы / П. А. Бакулев, А. А. Сосновский. — М.: Радиотехника, 2011. — 272 с.
2. Поляков, И. В. Исследование процесса возбуждения комбинационных составляющих при низкочастотной модуляции электронного потока в скрещенных полях / И. В. Поляков, А. Г. Шеин // Вопросы физической метрологии. Вестник Поволжского отделения Метрологической Академии России. — 1999. — № 1. — с. 113–128.
3. Ермолаев, А. В. Численная модель многочастотного взаимодействия в магнетронном генераторе [Текст] / А. В. Ермолаев // Вопросы физической метрологии: Вестник Поволжского отделения Метрологической академии России. — 1999. — Вып. 1. — с. 94–102.
4. Ермолаев, А. В. Математическое моделирование процесса конкуренции видов колебаний при возбуждении комбинационных составляющих в спектре генерации магнетрона / А. В. Ермолаев, И. В. Поляков, О. А. Оленникова // Актуальные проблемы управления вычислительной техники и информатики в технических системах: Межвуз. сб. науч. ст. / ВолгГТУ. — Волгоград, 2013 — Вып. 8. — с. 10–14.
5. Кузнецов, А. П. Нелинейные колебания / А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Н. М. Рыскин. — М.: Физматлит, 2002. — 310 с.

## Оптические просветления кожи и крови: перспективы и применения в медицине

Хожиев Шерали Тешаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Институт ионно-плазменных и лазерных технологий АН республики Узбекистан

Хожиев Шерзод Тешаевич, ассистент  
Ташкентская медицинская академия (Узбекистан)

*Полученные результаты оптических исследований в дальнейшем будут использованы для диагностирования различных заболеваний кожи, крови и в офтальмологии, а также возможны области совместного применения спектроскопии кожи для оценки индексов эритемы и пигментации, определения степени оксигенации и концентрации гемоглобина, а также исследования эффективности солнцезащитных препаратов. Управление оптическими параметрами кожи является перспективным методом увеличения эффективности диагностики кожных заболеваний.*

**Ключевые слова:** оптика, просветление, спектральный диапазон, биомедицина, диагноз, биоткань

## Optical enlightenments of skin and blood: prospects and applications in medicine

Hojiev Sherali. Teshaeovich  
Institute of Ion-plasma and laser technologies of Academy of Sciences of RUz (Uzbekistan)

Hojiev Sherzod Teshaeovich  
Tashkent medical academy (Uzbekistan)

*In this paper using of optical clearing methods in medicine are presented. Describes an optical clearing method based on reversible reduction of tissue scattering due to refractive index matching of scatterers and ground matter. It was of great interest for research and application in medicine. It is a grate promising technique for future developments in the fields of tissue imaging, spectroscopy, phototherapy, and laser surgery.*

**Keywords:** optics, enlightenment, spectral range, biomedicine, diagnosis, biofabric.

Одним из направлений современной биомедицинской оптики является развитие методов зондирования биотканей излучением видимого и ближнего инфракрасного (ИК) диапазонов, позволяющих осуществить визуализацию их структуры [1]. Подобный интерес связан с возможностью разработки и развития биологически безопасной многофункциональной диагностики биотканей. В настоящее время большинство существующих методов используют для оптического зондирования биотканей так называемое окно прозрачности в диапазоне длин волн от 650 до 1200 нм [2]. Свет видимого и ближнего инфракрасного диапазона длин волн является безопасным при малых уровнях плотности излучения, человеческий организм хорошо адаптирован к этому виду излучения. Свет этого диапазона длин волн хорошо проникает в биологическую ткань и, взаимодействуя с различными структурными и динамическими компонентами тканей, несет информацию о структурных и динамических изменениях, происходящих в тканях при различных заболеваниях. Такие хорошо известные в физике явления, как поглощение, дифракция, интерференция, флуоресценция, а также упругое, квазиупругое и молекулярное рассеяние, наблюдаются в биологических средах и являются источниками информации о патологических процессах. Конечно, не все так просто, биологические ткани относятся в оптике к так называемым

мутным средам, то есть средам со сложными запутанными траекториями зондирующих фотонов. Поэтому получение изображения неоднородностей в тканях, например опухоли, затруднено. Тем не менее, эти трудности преодолимы. История использования света для мониторинга состояния биотканей и клеток с целью диагностики заболеваний представлена в работе [3, 4]. Брайт (Bright) в 1831 г. показал, что солнечный свет или свет свечи может проходить через голову пациента больного гидроцефалией [3]. Позже, в 1843 г., возможность просвечивания биотканей была отмечена Курлингом (Curling), а в 1929 г. Катлером (Cutler) просвечивание было использовано для наблюдения патологических изменений молочной железы [4]. Хассельбалч (Hasselbalch) в 1911 г. провел исследования пропускания ультрафиолетового излучения кожей. Милликен (Millikan) был первым, кто предложил использовать метод двух волновой оптической спектроскопии для учета рассеяния света, и он был успешен в проведении метаболических анализов у человека. Этот список можно дальше продолжить, и он будет расти очень долго.

### Материалы и методы исследования

В настоящей работе приведены экспериментальные работы полученные методом оптической спектроскопии.

Исследования проводились на двулучевом спектрофотометре, работающим в ЦНИЛ Ташкентской медицинской академии. Спектрофотометр СФ-46 предназначается для измерения спектрального коэффициента пропускания жидких и твердых веществ. Спектральный диапазон прибора составляет от 190 до 1500 нм. Прибор также оснащен специальным оборудованием, которое обеспечивает следующие режимы работы: измерение спектральных коэффициентов пропускания (Т); определение оптической плотности (D); определение концентраций (С); определение скорости изменения оптической плотности ( $\frac{\Delta D \Delta D}{\Delta t \Delta t}$ ).

### Результаты и обсуждение

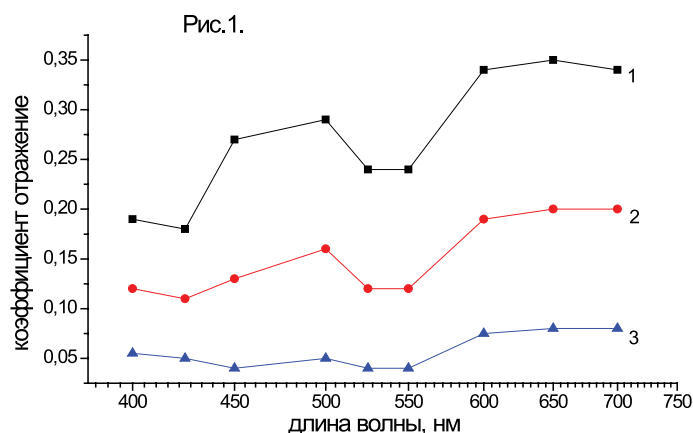
На основе полученных данных были построены зависимости коэффициента отражения от длины волны, при различных временах просветления кожи с растворами глюкозы. Спектры отражения человеческой кожи в интервалах времени: 1 — без инъекции, 2 — после 23-мин инъекции, 3 — после 60 мин инъекции, все это проводилось в 40% растворе глюкозы. Как видно из рисунка (рис. 1) коэффициент отражения уменьшается с ростом времени инъекции. Это говорит о том, что с ростом времени кожа становится более прозрачной для света и соответственно растет коэффициент пропускания.

Поглощение света на большие глубины образцов дает возможность получать больше информации о структуре, состоянии и происходящих в ней изменениях в результате внешних воздействий. С медицинской точки зрения можно идентифицировать и охарактеризовать патологические изменения в биологических тканях на клеточном и субклеточном уровнях, а также получать структурную и функциональную информацию о ткани. На рис. 2. приведен график зависимости коэффициента отражения при трех длинах волн (420, 500 и 700 нм) человеческой кожи, измеренной при инъекции 40% растворе глюкозы от времени инъекции. Как видно из графика с ростом времени инъекции коэффициент отражение сначала резко падает,

а потом стабилизируется только при 500 нм, он имеет скачок при 120 мин. С ростом длины волны коэффициент отражения уменьшается, особенно, в инфракрасной области спектра. Это говорит о том, что ИК облучения имеет способность хорошо проникать в более глубокие слои ткани человека.

Нами также были проведены измерения спектральных зависимостей коэффициента пропускания, оптической плотности и изменения оптической плотности в спектральном диапазоне от 190 до 1100 нм, для различных образцов [5]. Образцы состоялись из кожи лабораторного животного (крысы), человеческой крови и ретина глаза кролика. Они были исследованы после содержания в растворах (кроме крови) глюкозы, а также глицерина — для того, чтобы сделать образцы прозрачными для света. Определенного уменьшения коэффициента рассеяния можно добиться при согласовании показателей преломления рассеивающих центров и базового вещества путем введения внутрь ткани подходящих химических агентов. Заметный эффект просветления кожи крысы наблюдался в течение нескольких минут после внутридермальной инъекции глицерина.

Знание оптических характеристик биотканей является одним из ключевых моментов при разработке математических моделей, адекватно описывающих распространение света в биотканях, что является принципиально важным для развития новых оптических методов, используемых в различных областях биологии и медицины, для фотодинамической и фототермической деструкции клеток и тканей, а также для разработки новых подходов в фотодинамической терапии, оптической томографии, оптической биопсии и т. д. [6]. Однако, несмотря на значительное число работ, посвященных определению оптических параметров биотканей, оптические свойства многих биотканей в широком диапазоне длин волн остаются в настоящее время не изученными, хотя именно анализ поглощения и рассеяния биотканями излучения видимого и ближнего ИК спектральных диапазонов имеет принципиальное зна-



Спектры отражения человеческой кожи в интервалах времени: 1-без инъекции, 2- 23- мин., и 3- 60- мин. после инъекции, в 40% растворе глюкозы.

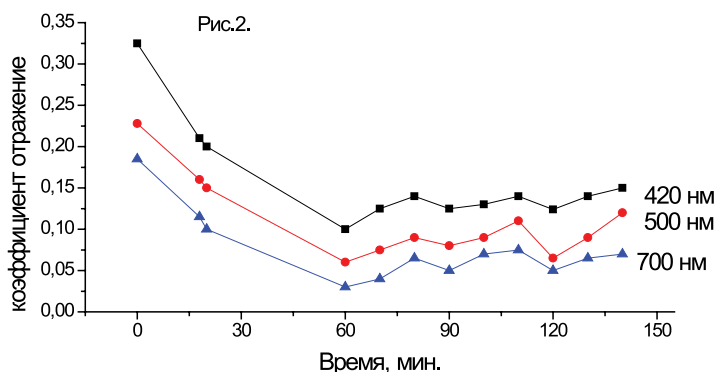


Рис.2.  
Зависимость коэффициента отражения при трех длин волн (420, 500, и 700 нм) человеческой кожи измеренной при инъекции 40 % растворе глюкозы.

чение для развития методов оптической диагностики, фотодинамической и фототермической терапии различных заболеваний.

### Вывод

Оптические просветления трансплантируемой ткани может иметь важное биомедицинское применение, связанное с исследованием структурной системы и функции, имеющих отношение к диаметрам артериоллы и вены, плотностям капилляров, разветвлениям углов и т. д. Эти параметры важны в физиологии и терапии некоторых заболеваний (сосудистых заболеваний, рак и др.). С другой стороны, оптические просветления воздействуют двояким

образом во время течения и остановки кровотока, может помочь в микрососудах во время лечения их, когда необходима сосудистая фототермальная терапия. Полученные результаты оптических исследований в дальнейшем будут использованы для диагностирования различных заболеваний кожи, крови и в офтальмологии, а также возможны области совместного применения спектроскопии кожи для оценки индексов эритемы и пигментации, определения степени оксигенации и концентрации гемоглобина [5], а также исследования эффективности солнцезащитных препаратов. Управление оптическими параметрами кожи является перспективным методом увеличения эффективности диагностики кожных заболеваний.

### Литература:

1. Башкатов, А. Н., Жестков Д. М., Генина Э. А., Тучин В. В. Иммерсионное просветление крови человека в видимом и ближнем ИК спектральных диапазонах. — Оптика и спектроскопия, 2005. — Том 98. — № 4. — С 695–703.
2. Зимняков, Д. А., Тучин В. В. // Квант. электрон. — 2002. — Т. 32. — № 10. — с. 849.
3. Тучин, В. В. Оптическая биомедицинская диагностика. — Известия Саратовского университета. — Сер. Физика. — 2005. — Т. 5.
4. Хожиев, Ш. Т., Коваленков С. Ф., Хусанов З. М., Сагатов Т. А., Сайфуллаева Т. А., Элмуродова У. Х. // Оптическое просветление: перспективы и применение в медицине // Международная конференция «Актуальные проблемы физической электроники». — Ташкент, 28 ноябрь 2012 г.
5. Chance, B. Optical method // Arm. Rev. Biophys. Biophys. Chem. — 1991. — V. 20. — P. 1–28.
6. Wolf, M. at all. // How to evaluate slow oxygenation changes to estimate absolute cerebral haemoglobin concentration by near infrared spectrometry in neonates. Adv. Exp. Med. Biol. — 411, 495–501 (1997).

## Определение механических воздействий гидротехнических сооружений с помощью радиационных процессов в оптических волокнах

Эргашев Шокир Шарипович, старший преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Определение и постоянный контроль механических воздействий типа давление, механических напряжений, различные деформации являются важным фактором при строении гидротехнических сооружений. Точность и диапазон определения физических параметров механических и электромагнитных датчиков существенно расширился после появления мощных источников света, как лазеров.

Изучение процессов взаимодействия когерентных излучений с прозрачной средой, особенно с оптическим волокном резко расширило область практического применения световодов. В настоящее время оптические волокна применяются не только в телекоммуникационной технике, а нашли широкое применение в отраслях науки как, изучение радиационных процессов, протекающие внутри вещества, контроль процессов, возникающие в атмосфере под действием космических лучей и т. д. В том числе, разработка высокоточных датчиков температуры и давления.

Волоконно-оптический датчик (ВОД) — датчик физических величин, в конструкции которого в качестве чувствительного элемента и передающее оптическое излучение среды, используется волоконный световод. Чувствительный элемент ВОД преобразует определенное физическое воздействие в изменение свойств прошедшего, отраженного или рассеянного излучения. По принципу действия ВОД можно разделить на группы в соответствии с тем, какой параметр оптической волны измеряется для получения информации о физическом воздействии: интенсивность, фаза, состояние поляризации, спектральный или модовый состав излучения [1].

По принципу работы и конструктивным особенностям датчики можно разделить на четыре группы:

1. Оптопары с открытым каналом, где размещается или контролируемая среда, или промежуточный элемент.
2. Волоконно-оптические датчики, в которых чувствительным элементом является само волокно, оптические свойства которого изменяются под действием внешних факторов.
3. Интегрально-оптические датчики, использующие в качестве чувствительного элемента планарный световод, изготовленный методами интегральной оптики; принцип действия такого датчики основан на нарушении полного внутреннего отражения для лучей, распространяющихся вдоль световода, и «вытекание» их через границу раздела за счет приближения к ней среды или изменения ее показателя преломления.
4. Датчики с волоконно-оптическими связями, в которых чувствительный элемент располагается в месте разрыва оптического волокна и воздействует на его светопередачу.

Современные ВОД позволяют измерять деформацию, давление, температуру, расстояние, положение в пространстве, скорость линейного перемещения и скорость вращения, ускорение, параметры колебаний и звуковых волн, уровень жидкостей, показатель преломления, электрическое и магнитное поле, дозу радиационного излучения, а также ряд других физических величин.

Использование ВОД основывается на таких явлениях, как электрооптический, магнитооптический, упругооптический, термооптический эффекты, люминесценция, комбинационное рассеяние, рассеяние Рэлея и Мандельштама-Бриллюэна, межмодовое взаимодействие и других.

Преимуществами ВОД являются: защищенность от воздействия электромагнитных полей, высокая чувствительность, надежность, воспроизводимость и широкий динамический диапазон измерений, малые габариты и вес, высокая коррозионная и радиационная стойкость, электроизоляционная прочность, пожаробезопасность, возможность спектрального и пространственного мультиплексирования чувствительных элементов, расположенных в одном или в нескольких световодах, значительное расстояние до места проведения измерений, малое время отклика [3–4].

Определение температуры вещества основано на резисторных и терморезисторных датчиков, которым влияние внешних электромагнитных полей существенно снижает точность и скорости получения информации. Таким образом, применение оптических датчиков приобретают особую важность, так как у них устраняются вышеуказанные недостатки. Такие датчики имеют высокую точность, стабильность на внешнее поле, легкость, минимальное энергопотребность и максимальное скорость обмена информации.

Первый патент на волоконнооптических сенсоров получен в 1960 году. Но как датчики, они широко использованы только в середине 80-их годов. Температурные оптические контактные датчики созданы на основе волноводов, записанные Брэгговские дифракционные решетки (БР) коэффициента преломления лучей. Эта решетка имеет точное пространственное распределение и период —  $\Lambda$ . Пространственная решетка Брэгга установлен только на основание, а внешняя оболочка остается неизменным. Такая структура имеет уникальное спектральное свойство, такое как низкочастотные коэффициент отражение излучения и очень узкую относительную спектральную ширину ( $10^{-6}$ ).



В основе использования волоконных брэгговских решеток (ВБР) лежит зависимость резонансной длины волны БР от температуры световода и от приложенных к нему механических растягивающих или сжимающих напряжений.

Предложено большое число способов измерения смещения  $\lambda$  БР. Наиболее прямым из них является измерение спектра пропускания-отражения решетки с помощью широкополосного источника излучения и спектроанализатора либо с помощью узкополосного перестраиваемого лазера и фотоприемника. Такой способ является нечувствительным к оптическим потерям, которые могут возникать в оптическом тракте при проведении измерений, и обеспечивает высокую точность измерений  $\lambda$  БР. Вместе с тем такая схема регистрации использует достаточно дорогостоящее оборудование и имеет ограниченное быстродействие.

Указанные схемы позволяют измерить физическую величину в месте нахождения ВБР, вместе с тем часто возникают задачи измерения пространственного распределения этой величины. Для этого разработаны схемы, позволяющие мультиплексировать чувствительные элементы, в том числе расположенные в одном световоде. К числу таких схем следует отнести:

- спектральное мультиплексирование каналов, при котором чувствительные элементы разнесены на различные длины волн;
- использование оптических переключателей, подключающих тот или иной чувствительный элемент к системе измерения;
- пространственно-временное мультиплексирование, при котором отклик от каждой из решеток регистрируется в различные моменты времени;
- комбинированные схемы, включающие в себя несколько принципов мультиплексирования каналов, перечисленных выше.

Перечисленные схемы измерения  $\lambda$  БР, как правило, обеспечивают точность измерения температуры  $\sim 0.1^\circ\text{C}$  и относительного удлинения  $\sim 10^{-6}$ .

Резонансная длина волны БР зависит от температуры и вложенный в ней внешней механической напряжений. На это и основывается работа волноводных датчиков. Сдвиг резонансных волн измеряется с помощью анализа спектров поглощения и пропускания широкополосных источников излучения или узкополосных лазеров.

Величина нелинейного коэффициента преломления для кварцевых световодов принимает разные значения в зависимости от длины волны света, состава, концентрации и поперечного распределения легирующих примесей, длительности импульса. Для длины волны  $\lambda = 1550$  нм значения коэффициента преломления находятся в пределах  $(2,2-4) \times 10^{-20}$  м<sup>2</sup>/Вт. Эта величина в кварце, по сравнению с другими нелинейными средами, по крайней мере, на 2 порядка меньше.

То же относится к коэффициентам ВКР (вынужденного комбинационного рассеяния) и ВРМБ (вынужденного рассеяния Манделъштама-Бриллюэна) усиления. Тем не менее, в кварцевых световодах нелинейные эффекты могут наблюдаться при относительно низких мощностях. Это возможно благодаря двум важным характеристикам световода, а именно: малого размера моды (несколько мкм для одномодового световода) и чрезвычайно низким потерям ( $\leq 1$  дБ/км), что обеспечивает большие длины взаимодействий.

Часто для записи ВБР используют интерферометры с пространственным разделением пучка, которые имеют меньшее количество оптических элементов и, следовательно, большую временную стабильность. Такой интерферометр может быть создан, например, с использованием диэлектрического зеркала, которое делит фронт пучка на две равные части (интерферометр Ллойда, рис. 1б). Перестройка угла  $\alpha$  в данном случае осуществляется путем поворота зеркала вместе с закрепленным на нем световодом, что значительно проще в сравнении с тем, как это делается в интерферометре, изображенном на рис. 1а. Отметим, что цилиндрическая линза, используемая в обеих схемах, представленных на рис. 1б, служит для фокусировки излучения на волоконный световод (в ряде случаев на его сердцевину), что, как правило, необходимо для увеличения плотности УФ — излучения при записи брэгговских решеток.

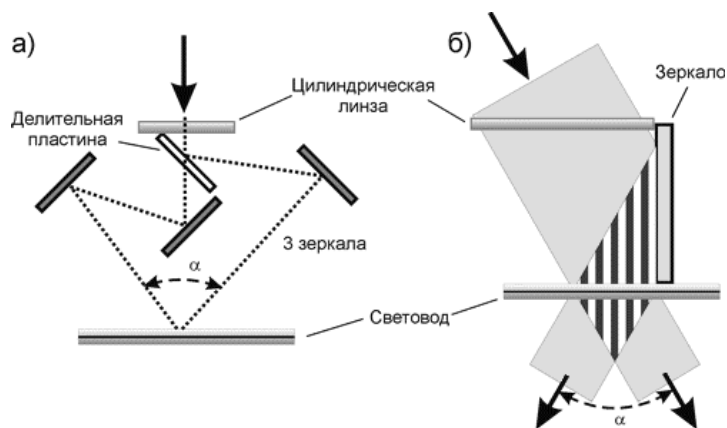


Рис. 1. Схемы записи брэгговских решеток в интерферометрах с амплитудным (а) и пространственным (б) разделением пучка УФ-излучения

Указанные типы интерферометров обладают гибкостью в выборе параметров (период, длина) записываемых решеток, однако требуют высокую пространственную и временную когерентность записывающего излучения [5].

Механический внешний фактор, как, давление, температурный перепад, деформация изменяют характеристику излучения, проходящее через образец, которые в своей очередь проявляются на характеристиках обратного сигнала. Проанализировав спектры интенсивности проходящего и отраженного из БР излучения, можно определить с большой точности механических параметров.

При попадание света на молекулярной решетки с термическим вибрациям возникает взаимодействие фотонов и электронов. Рассеяние такого рода в световоде с БР можно увидеть в Рамановском спектре. Резлейское рассеяние аналогично с лазерным излучением. Стоксовый компоненты Рамановского спектра появляются при поглощении (когда длина волны лазерного излучения больше чем длина волны стоксового компонента) или излучения (когда длина волны лазерного излучения меньше чем длина волны стоксового компонента). Антискотские излучения оптического волокна зависят от температуры, но стоксовы смещения практически не зависят от температуры. Изучая отношение интенсивности этих компонентов можно определить температуру образца.

Вынужденное рассеяние Брюэллена имеет наименьшую пороговую мощность. Порог SBS может изменяться в зависимости от типа волокна и даже среди отдельных волокон. Как правило, он имеет порядок 5–10 мВт для узкополосных источников света с внешней модуляцией. Для лазеров с непосредственной модуляцией эта мощность может быть порядка 20–30 мВт.

Физическая причина явления вынужденного рассеяния Брюэллена состоит в том, что интенсивная волна света, распространяющегося в прямом направлении, и первоначально слабая волна рассеянного назад света, а также тепловая упругая волна нелинейно взаимодействуют друг с другом (за счет явления электрострикции). В результате такого взаимодействия в волокне возникают волны показателя преломления, движущиеся со скоростью звука.

Линии Брилюэна по отношению к линии Стокса интенсивнее, но имеет слабое спектральное смещение. Это смещение происходит из-за акустического колебания кристаллической решетки и даёт информации о механическом напряжении.

Лазерное или рентгеновское излучение при прохождении по световоду возбуждает индуцированное излучение. Под действием радиационного излучения на основе световода (диоксид кремния  $\text{SiO}_2$ ) в энергетически запрещённых зонах появляется дополнительные энергетические зоны, благодаря которым происходит поглощения или люминесценция света. Изменения интенсивности света отрицательно влияет на качества и точность получаемой информации.

Анализ рентгеновских спектров в оптической волокне проводится по методике разделение образца на элементарной ячейки. Если, интенсивность индуцированное излучение на каждой элементарной ячейке равно  $I_0$  ( ), коэффициент  $i$ -ячейке определяется из условия [1]:

$$K_o(\lambda) + K_{\text{решет}}(\lambda) = \frac{1}{L - il} \cdot \ln \left[ \frac{I_o(\lambda)}{I_i(\lambda)} \right]$$

Для образца с длиной  $l$ , реальное значение интенсивность индуцированное излучения равно:

$$I(\lambda) = N \times I_R(\lambda) \times \exp \left[ \left( K_o(\lambda) + K_{\text{решет}}(\lambda) \right) \times L \right] \times \frac{\exp \left[ (-l) \cdot \left( K_o(\lambda) + K_{\text{решет}}(\lambda) \right) \right] - 1}{1 - \exp \left[ \left( K_o(\lambda) + K_{\text{решет}}(\lambda) \right) \cdot l \cdot N \right]}$$

Изучение зависимость длина образца на интенсивности Черенковского излучения даёт возможность, оценить интенсивности поглощения и рассеяния первичного сигнала. Если, при входе световода интенсивность Черенковского излучения  $I_0(\lambda)$ , при входе  $I_1(\lambda)$ , то коэффициент оптической потери  $A(\lambda)$  можно определить из уравнение [2]:

$$A(\lambda) = \frac{10}{L} \cdot \log \frac{I_o(\lambda)}{I_1(\lambda)}$$

В заключение, можно сказать, что изучение радиационные процессы в оптических волокнах резко расширяет прикладной возможности этих неорганических соединений, и создаются новые — новые приборы регистрирующих сверхтонких физических процессов в космосе, земле и под водой.

Литература:

1. E. Udda. Fiber Optic Sensors, Wiley Interscience, 2006, 520 p.
2. M. Kh. Ashurov, M. I. Baydjanov, et. al. Jap. J. Appl. Phys.:18, 2008.
3. Jose Miguel Lopez-Higuera «HANDBOOK OF OPTICAL FIBRE SENSING TECHNOLOGY», John Wiley & Sons Ltd, 2002. 245 p.
4. «Волоконно-оптические датчики», под ред Э. Удда, Техносфера, 2008. с. 57–83

5. А. Н. Пихтин «Оптическая и квантовая электроника», Москва, Высшая школа, 2001. с. 107–151.
6. В. Г. Воронин, О. Е. Наний Основы нелинейной волоконной оптики. Москва «Университетская книга». 2011 г. стр. 65–74.

## ХИМИЯ

### Селективные полупроводниковые сенсоры для определения содержания фтористого водорода

Муминова Наргиза Исатуллаевна, кандидат химических наук, старший преподаватель;

Рахимова Малохат Анваровна, преподаватель;

Сидикова Хулкар Гуломовна, преподаватель;

Рашидова Комила Хамидовна, преподаватель

Джизакский государственный педагогический институт имени А. Кадыри (Узбекистан)

*Разработана технология изготовления толстопленочного полупроводникового сенсора с проволочным чувствительным элементом, обеспечивающим контроль за содержанием фтористого водорода в широком диапазоне его концентраций и параметров окружающей среды. Предложены технологическая схема, совокупность операций и последовательность их исполнения с целью создания серийного толстопленочного полупроводникового сенсора фтористого водорода.*

Постоянно ухудшающаяся экологическая ситуация во многих регионах мира требует создания систем контроля и защиты окружающей среды, а также своевременного предупреждения о превышении допустимых норм содержания в воздухе токсичных и горючих газов. В связи с этим разработка и создание методов, регистрирующих содержание фтористого водорода в промышленности и быту, является важной аналитической и экологической задачей. Для контроля концентраций ядовитых, огнеопасных и взрывоопасных газов используют различные типы газовых сенсоров и газоанализаторов [1].

Основными требованиями, предъявляемыми к газовым сенсорам фтористого водорода, являются: достаточная чувствительность, селективность, быстрдействие, малая потребляемая мощность, дешевизна и простота изготовления, стабильность при эксплуатации и возможность серийного изготовления. Сенсоры используются для измерения концентрации фтористого водорода в атмосфере рабочих зон цехов различных промышленных предприятий, а также в технологических потоках отходящих газовых смесей. Полученные данные при определении фтористого водорода будут применяться при контроле экологической обстановки и оптимизации различных технологических процессов [1,2].

Область применения сенсоров фтористого водорода: мониторинг окружающей среды, электролизные цеха алюминиевого производства, склады химических производств, химико-металлургические цеха, предприятия электронной, целлюлозно-бумажной, легкой, пищевой промышленности, холодильные установки и др. [2].

Одними из наиболее удовлетворяющих вышеперечисленных требований мониторинга содержания фтористого водорода являются полупроводниковые сенсоры, представляющие собой инертную подложку, размером  $\sim 2 \times 0,5 \times 0,3$  мм. На одной стороне, которой сформирован газочувствительный слой (оксид или соль металла), а противоположной — металлический (платиновый пленочный) нагреватель. Толщина газочувствительного слоя составляет 10–1000 нм и нагревателе — 200 нм. К газочувствительному слою и нагревателю привариваются электрические выводы из платиновой или золотой проволоки, толщиной 30 мкм.

Основой полупроводникового сенсора является газочувствительный слой оксида металла. Использование полупроводниковых оксидов в качестве газочувствительного материала позволяет обеспечить чувствительность к широкому спектру горючих и химически активных газов, находящихся в воздушной среде и газовых смесях [1,3].

В полупроводниковых газовых сенсорах используется эффект изменения электропроводности полупроводникового материала, полученный при адсорбции на его поверхности молекул детектируемых газов. Адсорбция газов на поверхности газочувствительного материала зависит от температуры и реализуется в диапазоне 100–500 С, причем для каждого по природе газа существует довольно небольшой диапазон температур, в котором чувствительность материала к конкретному газу максимальна.

Известные малогабаритные полупроводниковые сенсоры делятся на металлооксидные и структурные. По тех-

нологии изготовления металлооксидные сенсоры делятся на тонкопленочные и толстопленочные.

При проведении эксперимента в качестве диэлектрической подложки использовались пластины из оксида алюминия (сапфир, корунд), кремния и слюда, толщиной 0,1–0,3 мм. На заключительном этапе непосредственно перед нанесением газочувствительного слоя изготовленная пластина проходит термохимическую обработку.

В качестве газочувствительного слоя использовали оксиды металлов Sn, Fe, Cu, Zn, Co, Ni и др. Формирование газочувствительного слоя из оксида металла осуществлялось вакуумно-термическим распылением и золь-гель методом. Распыление производилось на технологическом оборудовании ВУП-5, на котором также осуществлялось легирование оксидных пленок с различными добавками.

При формировании газочувствительного слоя из  $\text{LaF}_3$  в качестве мишени использовался поликристаллический трифторид лантана с чистотой, не менее 99,0%. Выбор мишеней ( $\text{LaF}_3$ ) обусловлен характером поставленной задачи и технологическими причинами. Распыление производилось в атмосфере аргона. В процессе отработки режимов распыления исследовалось влияние толщины пленки и температуры подложки. Показано, что повышение температуры подложки при напылении способствует кристаллическому совершенству пленок, а наибольшая газочувствительность соответствует диапазону температур 250–500 °С.

В процессе исследований было также установлено, что повышение толщины пленки приводит к росту газочувствительности сенсора и достигает наибольшего значения при толщине 600–800 нм. На заключительном этапе сформированный газочувствительный слой подвергался отжигу, являющемуся ответственной операцией, приводящей к структурному превращению пленки из поликри-

сталлического состояния в монокристаллическое. Общее сопротивление газочувствительного слоя на воздухе, зависит от толщины пленки.

Нагреватель полупроводникового сенсора представлял собой полоску платины, шириной чипа, то есть около 0,5 мм. Платиновый пленочный нагреватель формировался на обратной стороне подложки в плазме аргона методом вакуумно-термического напыления металлической мишени. Распыление производилось при температуре подложки, равной 500 °С. Полученные пленки, обладали высоким значением температурного коэффициента сопротивления ( $\text{TKC} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ град}^{-1}$ ).

Контакты формировались к нагревателю и газочувствительному слою методом вакуумно-термического нанесения слоя металла (платина, золото, серебро, никель и др.) при температуре подложки, равной 350 °С. Пленки золота или платины, толщиной 0,5 Мкм наносились на слой  $\text{LaF}_3$ .

Нарезание пластин со сформированным газочувствительным слоем, нагревателем и электрическими контактами осуществлялось механически.

В результате проведенных исследований разработана технология изготовления толстопленочного полупроводникового сенсора с проволочным чувствительным элементом, обеспечивающим контроль за содержанием фтористого водорода в широком диапазоне его концентраций и параметров (температура, давление, влажность и др.) окружающей среды. Предложены технологическая схема, совокупность операций и последовательность их исполнения с целью создания серийного толстопленочного полупроводникового сенсора фтористого водорода, отвечающие требованиям соответствующих ГОСТов 52033–2003, на приборы аналогичных классов.

#### Литература:

1. Кальвода, Р., Зыкова Я., Штулок К. Электроаналитические методы в контроле окружающей среды.-М.: Химия, 1990.—240 с.
2. Абдурахманов, Э. Разработка термодаталитических методов для создания высокоселективных автоматических анализаторов токсичных и взрывоопасных газовых смесей.//Авт. дис. на соис. уч. ст. док. хим. наук. Ташкент. 2004, 42 с.
3. Сагателян, О.А. Музыковский В.А., Дудкин Н.И. Газоанализатор фтористого водорода / Тез. докл. 2. Всесоюз. конф. по электрохимии. Часть 1. — Томск, 1985. — с. 229–230.

## Определение состава химической ловушки «Родамин» на основе физико-химических свойств

Мутных Валерия Игоревна, студент;  
Данилов Денис Николаевич, кандидат химических наук, доцент  
Вятский государственный университет

Приказом Министерства внутренних дел РФ от 11.09.93 № 423, было введено понятие химическая ловушка. Химическая ловушка — это снаряженные специальными химическими веществами приспособления или устройства, замаскированные под различные предметы, с помощью которых такие вещества переносятся на тело и одежду человека. [1]

Химические ловушки являются пассивным средством охраны. При попытке несанкционированно вскрыть объект охраны или взять снаряженный предмет происходит срабатывание устройства и тело, а также одежда нарушителя обильно окрашивается СХВ (специальным

химическим веществом). Одновременно возможны варианты с подачей звукового или дымового сигнала. [2]

Целью данной работы является изучение состава основного красящего компонента спецмази «Родамин». Поскольку существует несколько марок родамина: родамин С, родамин Ж, родамин бЖ, необходимо определить какое красящее вещество является основой мази.

Спектр спецмази «Родамин» в видимой области определяли спектрофотометрически. Измерение оптической плотности проводили при длине волны 340–780 нм с шагом 10 нм на спектрофотометре PD-303. В качестве раствора сравнения использовали дистиллированную воду.

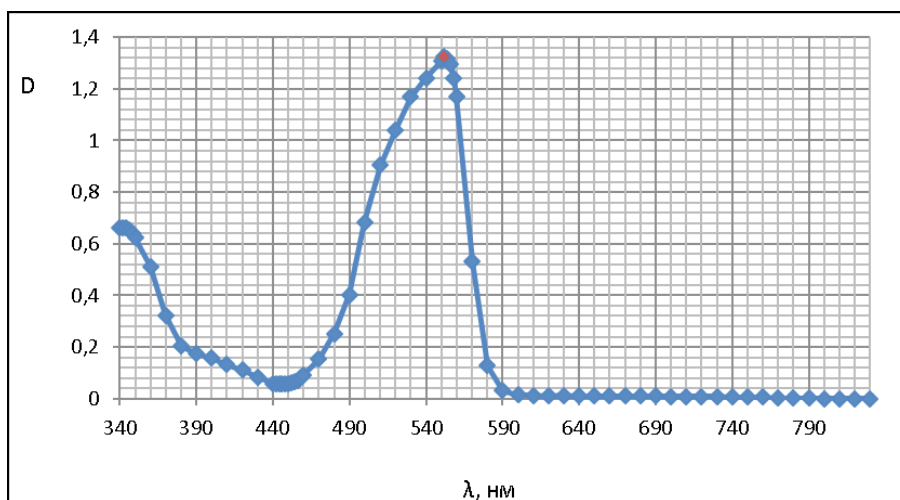


Рис. 1. Спектр Спецмазь «Родамин» в видимой области.  $\lambda_{\max} = 552$  нм

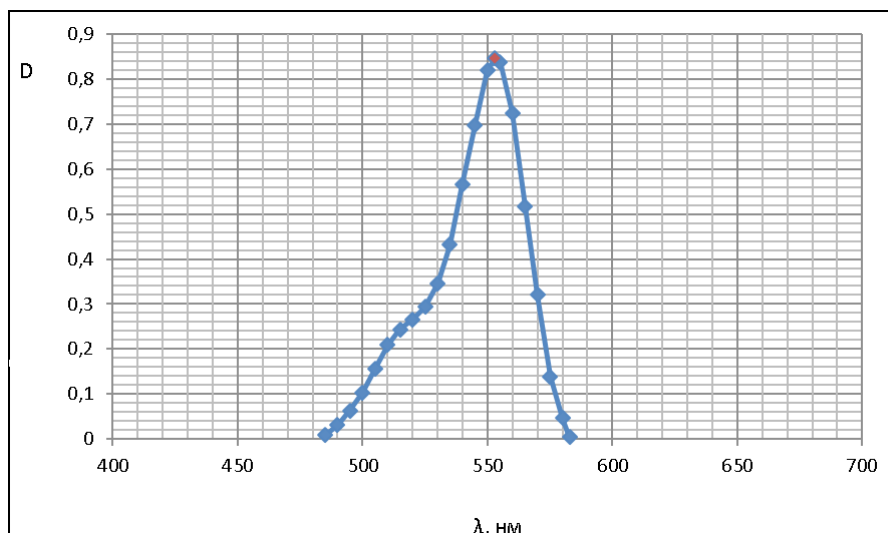


Рис. 2. Спектр родамин С в видимой области.  $\lambda_{\max} = 553$  нм

Результат эксперимента показывает, что максимум поглощения спецмази «Родамин» составляет 552 нм, что соответствует максимуму поглощения органического красителя родамина С равного 553 нм.

Исследование люминесценции спецмази «Родамин» проводили с помощью люминоскопа «Филин», при рабочей длине волны 364 нм. Раствор органического красителя наливают в чашку Петри, затем помещают в камеру

и рассматривают свечение пробы. Полученное свечение фотографируют и обрабатывают.

Результат эксперимента показывает, что люминесценция спецмази «Родамин» ярко оранжево-розовая, а люминесценция органического красителя родамина С оранжево-розовая, это еще раз подтверждает, что в основе спецмази находится органический краситель родамин С.

Литература:

1. Министерство внутренних дел Российской Федерации приказ от 11 сентября 1993 года N 423 «Об утверждении Инструкции о порядке применения химических ловушек в раскрытии краж имущества, находящегося в государственной, муниципальной, частной собственности и собственности общественных объединений (организаций)»
2. С. М. Плешаков. Использование химических ловушек в борьбе с преступностью: текст лекции/ Саранский кооперативный институт РУК. — Саранск, 2008 г. — 28 с.

## Ионогенные полимеры, полученные на основе эпихлоргидрина с бензоксазолинонами, их флокулирующие свойства

Шодиев Гайрат Шодмонович, магистр;  
 Фозилов Садриддин Файзуллаевич, кандидат химических наук, доцент;  
 Аслонов Бахтиёр Бобокулович, старший преподаватель  
 Бухарский инженерно-технологический институт (Узбекистан)

Нарзиева Санам Ориповна, преподаватель  
 Бухарский налоговый колледж (Узбекистан)

Холлиева Муаттар Хамрокуловна, преподаватель  
 Караулбазарский академический лицей № 2 (Узбекистан)

Ахмедова Озода Бахрановна, преподаватель  
 Бухарский инженерно-технологический институт (Узбекистан)

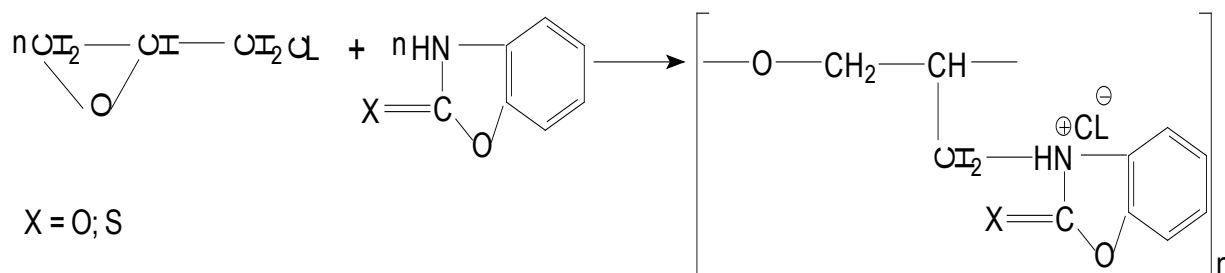
На современном этапе создания новых полимерных материалов особое значение приобретает эколого-экономически выгодная химическая модификация уже известных промышленных полимеров, которая позволяет улучшить свойства и существенно расширить применения последних.

Среди полимеров с реакционно-способными группами особый интерес представляют полимеры и сополимеры на основе эпихлоргидрина (ЭХГ), являющегося полуфункциональным мономером. [1–3]

В настоящее время водорастворимые иононовые полимеры, как катионные полиэлектролиты находят широкое применение в качестве экстрагентов, коагулянтов, отвердителей в различных отраслях промышленности [4].

Мы исследовали синтез катионных водорастворимых полиэлектролитов, содержащие ионогенные группы в боковой цепи макромолекулы, а также их флокулирующее действие на отрицательно заряженные суспензии силикагеля.

Синтез осуществляли путём взаимодействия эпихлоргидрина (ЭХГ) с бензоксазолинонами (БОЗ) по следующей схеме:



Самопроизвольную полимеризацию ЭХГ с БОЗ проводили в массе в водной среде, а также в среде полярных растворителей при температуре 20–40°С. В течении 30–35 минут при различных соотношениях исходных веществ. Исследо-

вано влияние соотношения исходных продуктов, температуры и продолжительность реакции в процессе полимеризации при взаимодействии эпихлоргидрина с бензоксалинами.

Как видно из таб-1, катионит на основе ЭХГ с БОЗами с высокими значениям и приведенной вязкости был получен при эквимолярном соотношении реагирующих веществ. Следует отметить, что с повышением температуры возрастает и скорость, и константа скорости процесса (таб. 2.) кроме этого дальнейшее повышение температуры и концентрации исходных реагентов приводит к получению более структурированных продуктов.

Установлено, что реакция полимеризации ЭХГ с БОЗами достаточно легко протекает и в массе, и в среде органических растворителей а с увеличением диэлектрической проницаемости среды скорость процесса полимеризации возрастает. Это объясняется, по-видимому, тем что диссоциация сильно полярных групп ЭХГ и растущей цепи в полярных средах способствует ускорению процесса самопроизвольной полимеризации.

В ИК спектрах синтезированных ионеных полимеров наблюдается уменьшение интенсивности сигналов валентных колебаний связи  $-\text{CH}_2-\text{Cl}$  в области  $1270 \text{ см}^{-1}$  от протекания процесса полимеризации, кроме этого образуются новые интенсивные полосы поглощения в области  $1080-1170 \text{ см}^{-1}$ , относящиеся к валентным асимметрическим колебаниям простой эфирной  $-\text{O}-\text{CH}_2-$  связи, за счёт раскрытия эпокси групп  $(1250, 925-850)^{-1}$ .

Исследование флокирующей способности водорастворимых полиэлектролитов показало, что наиболее эффективен полиэлектролит полученный на основе продуктов самопроизвольной полимеризации при взаимодействии ЭХГ с бензоксалтионом, который был испытан в процессе флотации вольфрамсодержащих продуктов черновых шеелитовых концентратов в лабораторных условиях. Синтезированные катионные полиэлектролиты избирательно влияют на осаждение трехокси вольфрама из вольфрамсодержащих шламов, одновременно уменьшают потери металла в сливе [5].

Таблица 1. Влияние исходного соотношения ЭХГ бензоксазолинонов на процесс взаимодействия и свойства полиэлектролита

Азотосодержащие гетероциклические соединения	Исходное соотношение БОЗ: ЭХГ.	Т. К.	Время. мин.	0,5% раствора в воде дм/г.	$\Pi_{уд}$ дм/г.	СОЕ по ионному хлору. мг-экв/г
Бензоксалтион	1:1	303	180	1,58	0,541	6,7
	1:2			0,53	0,034	
	2:1			0,74	0,075	
	5:1			0,95	0,093	
Бензоксозолон (II)	1:1	303	240	1,35	0,253	5,8
	1:2			0,42	0,028	
	2:1			0,64	0,057	
	5:1			0,83	0,089	

Таблица 2. Кинетические параметры реакции полимеризации ЭХГ с бензоксазолинонами (исх. соот. 1:1).

№	Т. К.	$1/T \cdot 10^{-3}$	моль/л с $10^5$	$K 10^{-7} \text{ с}^{-1}$	Е акт кДж/моль
1	293	3,41	2,03	1,10	78,94
	303	3,30	8,95	1,53	
	323	3,01	17,32	2,08	
	313	2,91	34,05	4,84	
2	293	3,41	3,87	1,58	80,05
	303	3,30	9,15	1,92	
	323	3,01	20,17	2,54	
	343	2,91	36,94	5,06	

При расходе флокулянта 15 г/т с сочетанием 300 г/т жидкого стекла извлечение вольфрамсодержащего продукта составляет, 90,5%, а твёрдого при флотации в сливе содержатся 0,05% при равных содержаниях трехокси вольфрама сырьё (таб. 3.). Одновременно увеличивается содержание (95%) трехокси вольфрама в шеелитовом концентрате. При отсутствии полимерных флокулянтов потери твёрдых веществ со сливом составляют 0,05%, а извлечение вольфрама 3,4%.



Таблица 3. Зависимость степени извлечения вольфрама и от качества шеелитового концентрата

№	Наименование продуктов обогащения	Выход, %	Содерж.		Извлечения		Условия проведения опытов
			W <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaCO <sub>3</sub>	W <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	CaCO <sub>3</sub>	
1.	Конц. флотации	13,62	1,48	47,85	52,88	59,80	Без флокулянта
	Хв. флотации	16,38	0,019	6,8	7,22	40,20	
	Исх. продукт	100,00	0,281	12,09	100,00	100,00	
2.	Конц. флотации	17,26	1,062	43,45	89,75	41,25	Ж. стекло — 400 г/т 8–16–0
	Хв. флотации	82,74	0,023	10,02	10,25	58,75	
	Исх. продукт	100,00	0,180	15,73	100,00	100,00	
3.	Конц. флотации	24,07	0,760	41,53	94,55	67,85	Ж. стекло 8–16–0 10 г/т
	Хв. флотации	75,93	0,015	6,95	5,45	32,15	
	Исх. продукт	100,00	0,220	16,02	100,00	100,00	
4.	Конц. флотации	21,36	0,813	40,05	95,01	66,74	Ж. стекло 8–16–0 20 г/т
	Хв. флотации	78,64	0,012	7,64	4,69	33,25	
	Исх. продукт	100,00	0,205	15,62	100,00	100,00	
5.	Конц. флотации	20,15	0,847	51,94	93,64	63,85	Ж. стекло 8–16–0 40 г/т.
	Хв. флотации	79,85	0,013	6,48	6,36	36,15	
	Исх. продукт	100,00	0,2106	17,53	100,00	100,00	

Таким образом установлено, что полиэлектролиты полученные на основе ЭХГ с бензоксазолином избирательно влияют на осаждение шламов вольфрамового минерала, что позволяет существенно снизить потери металла в сливах.

Литература:

1. Аскарлов, М. А., Джалилов Т. А. Синтез ионогенных полимеров, Т., Фан, 1978. 158 с.
2. Зайнутдинов, С. С., Аскарлов М. А., Собиров З. С. Полимеризация при взаимодействии эпихлоргидрина с аминоксоединениями. В кн. Ионогенные полимеры. Т., Фан, 1985, 9–19 с.
3. Аскарлов, М. А., Джалилов Т. А., Агназаров А., Зайнутдинов С. С. Аниониты на основе продуктов взаимодействия эпихлоргидрина с винилниридинами. ЖПХ, 1976, Т. 19. с. 684–686.
4. Небери, В. П., Флокуляция минеральных суспензий. М, Недра., 1983., 288 с.

# Молодой ученый

Международный научный журнал  
Выходит два раза в месяц

№ 11 (115) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:**

Ахметов И. Г.

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова М. Н.  
Иванова Ю. В.  
Каленский А. В.  
Куташов В. А.  
Лактионов К. С.  
Сараева Н. М.  
Абдрасилов Т. К.  
Авдеюк О. А.  
Айдаров О. Т.  
Алиева Т. И.  
Ахметова В. В.  
Брезгин В. С.  
Данилов О. Е.  
Дёмин А. В.  
Дядюн К. В.  
Желнова К. В.  
Жуйкова Т. П.  
Жураев Х. О.  
Игнатова М. А.  
Калдыбай К. К.  
Кенесов А. А.  
Коварда В. В.  
Комогорцев М. Г.  
Котляров А. В.  
Кузьмина В. М.  
Кучерявенко С. А.  
Лескова Е. В.  
Макеева И. А.  
Матвиенко Е. В.  
Матроскина Т. В.  
Матусевич М. С.  
Мусаева У. А.  
Насимов М. О.  
Паридинова Б. Ж.  
Прончев Г. Б.  
Семахин А. М.  
Сенцов А. Э.  
Сениюшкин Н. С.  
Титова Е. И.  
Ткаченко И. Г.

Фозилов С. Ф.

Яхина А. С.

Ячинова С. Н.

**Международный редакционный совет:**

Айрян З. Г. (Армения)  
Арошидзе П. Л. (Грузия)  
Атаев З. В. (Россия)  
Ахмеденов К. М. (Казахстан)  
Бидова Б. Б. (Россия)  
Борисов В. В. (Украина)  
Велковска Г. Ц. (Болгария)  
Гайич Т. (Сербия)  
Данатаров А. (Туркменистан)  
Данилов А. М. (Россия)  
Демидов А. А. (Россия)  
Досманбетова З. Р. (Казахстан)  
Ешиев А. М. (Кыргызстан)  
Жолдошев С. Т. (Кыргызстан)  
Игисинов Н. С. (Казахстан)  
Кадыров К. Б. (Узбекистан)  
Кайгородов И. Б. (Бразилия)  
Каленский А. В. (Россия)  
Козырева О. А. (Россия)  
Колпак Е. П. (Россия)  
Куташов В. А. (Россия)  
Лю Цзюань (Китай)  
Малес Л. В. (Украина)  
Нагервадзе М. А. (Грузия)  
Прокопьев Н. Я. (Россия)  
Прокофьева М. А. (Казахстан)  
Рахматуллин Р. Ю. (Россия)  
Ребезов М. Б. (Россия)  
Сорока Ю. Г. (Украина)  
Узаков Г. Н. (Узбекистан)  
Хоналиев Н. Х. (Таджикистан)  
Хоссейни А. (Иран)  
Шарипов А. К. (Казахстан)

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Г. А.

**Ответственные редакторы:** Осянина Е. И., Вейса Л. Н.

**Художник:** Шишков Е. А.

**Верстка:** Бурьянов П. Я., Голубцов М. В., Майер О. В.

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются.

За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы.

Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.

При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Материалы публикуются в авторской редакции.

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

**почтовый:** 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231;

**фактический:** 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: [info@moluch.ru](mailto:info@moluch.ru); <http://www.moluch.ru/>

**Учредитель и издатель:**

ООО «Издательство Молодой ученый»

ISSN 2072-0297

Подписано в печать 26.06.2016. Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, 25