

МОЛОДОЙ

$f(X_n, Y_n) \rightarrow f(X, c)$  ISSN 2072-0297

# УЧЁНЫЙ

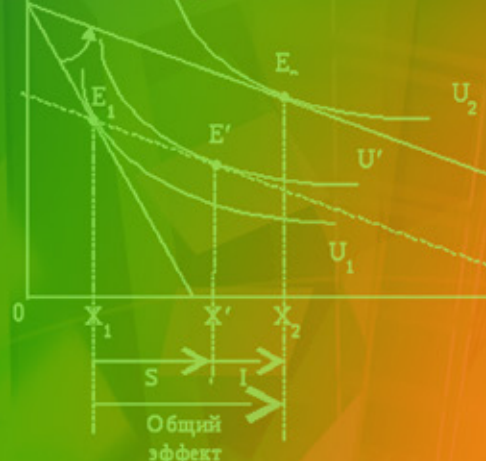
международный научный журнал

$$s_{ij} = \frac{\partial x_j(p, I)}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j(p, I)}{\partial p_j} + x_j(p, I) \cdot \frac{\partial I}{\partial I}$$



Другие товары

$$X_n \xrightarrow{D} X,$$



Эффекты дохода и замещения товара (подход Слуцкого).



$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T R_x(u) du = 0$$

*Dr. Слуцкий*

$$\frac{\partial x_i(p, \bar{u})}{\partial p_j} = \frac{\partial x_i(p, \bar{u})}{\partial p_j} + x_j(p, \bar{u}) \cdot \frac{\partial x_i(p, \bar{u})}{\partial I}$$

**13**  
2016  
Часть I

16+

ISSN 2072-0297

# Молодой учёный

Международный научный журнал

Выходит два раза в месяц

№ 13 (117) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:** Ахметов Ильдар Геннадьевич, кандидат технических наук

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова Мария Николаевна, доктор педагогических наук

Иванова Юлия Валентиновна, доктор философских наук

Каленский Александр Васильевич, доктор физико-математических наук

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук

Лактионов Константин Станиславович, доктор биологических наук

Сараева Надежда Михайловна, доктор психологических наук

Абдрасилов Турганбай Курманбаевич, доктор философии (PhD) по философским наукам

Авдеюк Оксана Алексеевна, кандидат технических наук

Айдаров Оразхан Турсункожаевич, кандидат географических наук

Алиева Тарана Ибрагим кызы, кандидат химических наук

Ахметова Валерия Валерьевна, кандидат медицинских наук

Брезгин Вячеслав Сергеевич, кандидат экономических наук

Данилов Олег Евгеньевич, кандидат педагогических наук

Дёмин Александр Викторович, кандидат биологических наук

Дядюн Кристина Владимировна, кандидат юридических наук

Желнова Кристина Владимировна, кандидат экономических наук

Жуйкова Тамара Павловна, кандидат педагогических наук

Жураев Хуснидин Олтинбоевич, кандидат педагогических наук

Игнатова Мария Александровна, кандидат искусствоведения

Калдыбай Кайнар Калдыбайулы, доктор философии (PhD) по философским наукам

Кенесов Асхат Алмасович, кандидат политических наук

Коварда Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук

Комогорцев Максим Геннадьевич, кандидат технических наук

Котляров Алексей Васильевич, кандидат геолого-минералогических наук

Кузьмина Виолетта Михайловна, кандидат исторических наук, кандидат психологических наук

Кучерявенко Светлана Алексеевна, кандидат экономических наук

Лескова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук

Макеева Ирина Александровна, кандидат педагогических наук

Матвиенко Евгений Владимирович, кандидат биологических наук

Матроскина Татьяна Викторовна, кандидат экономических наук

Матусевич Марина Степановна, кандидат педагогических наук

Мусаева Ума Алиевна, кандидат технических наук

Насимов Мурат Орленбаевич, кандидат политических наук

Паридинова Ботагоз Жаппаровна, магистр философии

Прончев Геннадий Борисович, кандидат физико-математических наук

Семахин Андрей Михайлович, кандидат технических наук

Сенцов Аркадий Эдуардович, кандидат политических наук

Сенюшкин Николай Сергеевич, кандидат технических наук

Титова Елена Ивановна, кандидат педагогических наук

Ткаченко Ирина Георгиевна, кандидат филологических наук

Фозилов Садриддин Файзуллаевич, кандидат химических наук

Яхина Асия Сергеевна, кандидат технических наук

Ячинова Светлана Николаевна, кандидат педагогических наук

На обложке изображен Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880–1948) — выдающийся российский и советский математик, статистик и экономист.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-38059 от 11 ноября 2009 г.**

Журнал входит в систему РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) на платформе elibrary.ru.

Журнал включен в международный каталог периодических изданий «Ulrich's Periodicals Directory».

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

#### **Международный редакционный совет:**

Айрян Заруи Геворковна, *кандидат филологических наук, доцент (Армения)*

Арошидзе Паата Леонидович, *доктор экономических наук, ассоциированный профессор (Грузия)*

Атаев Загир Вагитович, *кандидат географических наук, профессор (Россия)*

Ахмеденов Кажмурат Максutowич, *кандидат географических наук, ассоциированный профессор (Казахстан)*

Бидова Бэла Бертовна, *доктор юридических наук, доцент (Россия)*

Борисов Вячеслав Викторович, *доктор педагогических наук, профессор (Украина)*

Велковска Гена Цветкова, *доктор экономических наук, доцент (Болгария)*

Гайич Тамара, *доктор экономических наук (Сербия)*

Данатаров Агахан, *кандидат технических наук (Туркменистан)*

Данилов Александр Максимович, *доктор технических наук, профессор (Россия)*

Демидов Алексей Александрович, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Досманбетова Зейнегуль Рамазановна, *доктор философии (PhD) по филологическим наукам (Казахстан)*

Ешиев Абдыракман Молдоалиевич, *доктор медицинских наук, доцент, зав. отделением (Кыргызстан)*

Жолдошев Сапарбай Тезекбаевич, *доктор медицинских наук, профессор (Кыргызстан)*

Игисинов Нурбек Сагинбекович, *доктор медицинских наук, профессор (Казахстан)*

Кадыров Кутлуг-Бек Бекмурадович, *кандидат педагогических наук, заместитель директора (Узбекистан)*

Кайгородов Иван Борисович, *кандидат физико-математических наук (Бразилия)*

Каленский Александр Васильевич, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Козырева Ольга Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Россия)*

Колпак Евгений Петрович, *доктор физико-математических наук, профессор (Россия)*

Куташов Вячеслав Анатольевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Лю Цзюань, *доктор филологических наук, профессор (Китай)*

Малес Людмила Владимировна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Нагервадзе Марина Алиевна, *доктор биологических наук, профессор (Грузия)*

Нурмамедли Фазиль Алигусейн оглы, *кандидат геолого-минералогических наук (Азербайджан)*

Прокопьев Николай Яковлевич, *доктор медицинских наук, профессор (Россия)*

Прокофьева Марина Анатольевна, *кандидат педагогических наук, доцент (Казахстан)*

Рахматуллин Рафаэль Юсупович, *доктор философских наук, профессор (Россия)*

Ребезов Максим Борисович, *доктор сельскохозяйственных наук, профессор (Россия)*

Сорока Юлия Георгиевна, *доктор социологических наук, доцент (Украина)*

Узаков Гулом Норбоевич, *доктор технических наук, доцент (Узбекистан)*

Хоналиев Назарали Хоналиевич, *доктор экономических наук, старший научный сотрудник (Таджикистан)*

Хоссейни Амир, *доктор филологических наук (Иран)*

Шарипов Аскар Калиевич, *доктор экономических наук, доцент (Казахстан)*

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Галина Анатольевна

**Ответственные редакторы:** Осянина Екатерина Игоревна, Вейса Людмила Николаевна

**Художник:** Шишков Евгений Анатольевич

**Верстка:** Бурьянов Павел Яковлевич, Голубцов Максим Владимирович, Майер Ольга Вячеславовна

Почтовый адрес редакции: 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.

Фактический адрес редакции: 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: info@moluch.ru; http://www.moluch.ru/.

Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый».

Тираж 500 экз. Дата выхода в свет: 1.08.2016. Цена свободная.

Материалы публикуются в авторской редакции. Все права защищены.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

## СОДЕРЖАНИЕ

## МАТЕМАТИКА

<b>Бакаев И. И.</b> Оптимальная весовая кубатурная формула над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ .....1	<b>Комилова Х. М.</b> Математическая модель динамики вязкой жидкости в проницаемой трубе.....36
<b>Бешимова Д. Р.</b> Компактные пространства ..... 3	<b>Кроткин А. Э.</b> Исследование одной нелинейной системы четвертого порядка .....38
<b>Гадаев Р. Р., Джонигоков У. А.</b> О семействе обобщенных моделей Фридрихса... 5	<b>Куланов И. Б.</b> Основные свойства квадратичного числового образа ..... 41
<b>Давыдова М. Ю.</b> Математическое моделирование тепловых полей при индукционно-резистивном обогреве трубопровода .....7	<b>Лапин А. В.</b> Построение эконометрических моделей и анализ факторов экспорта и импорта Санкт-Петербурга.....44
<b>Ермолаев В. И., Ермолаева В. В., Пичугин М. Ю.</b> Математическая модель процесса гибки с растяжением ..... 11	<b>Малафеев О. А., Рылов Д. С.</b> Формализация гражданского процесса при английском и американском судебном правиле в виде байесовской игры .....46
<b>Жалолов О. И.</b> Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$ .....16	<b>Мирзакобилов Р. Н.</b> Описание множества собственных значений одной блочной операторной матрицы размера $2 \times 2$ ..... 50
<b>Ибрагимов А. А.</b> Решение общей марковской игры путем аппроксимации ее игрой с переоценкой.....18	<b>Смирнова Т. А., Колотов М. Е.</b> Новые обобщения определения параболы..... 52
<b>Ибрагимов А. А.</b> Обобщенная марковская игра «Большой матч» .....22	<b>Хаятов Х. У.</b> Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева.....58
<b>Кадырбеков Т. К., Хидоятова М. А.</b> Метод двухмасштабного разложения решения интегро-дифференциального уравнения с малым параметром .....26	<b>Эгамбердиев А. Н.</b> Расположение собственных значений обобщенной модели Фридрихса ..... 60
<b>Колотов М. Е., Смирнова Т. А.</b> Декомпозиция линейной модели квадрокоптера .....29	<b>Элмуродова Х. Б.</b> Условия существования виртуального уровня обобщенной модели Фридрихса ..... 62
<b>Комарова Н. Э.</b> Математическое моделирование банкротства предприятия.....33	

## ФИЗИКА

- Емельянов А. А., Бесклеткин В. В., Авдеев А. С., Габзалилов Э. Ф., Прокопьев К. В., Ситенков А. А., Пестеров Д. И., Юнусов Т. Ш.**  
Математическое моделирование САР скорости системы «АИН ШИМ – АД» с идеализированными транзисторными ключами.....65
- Ибрагимов С. С.**  
Результаты лабораторной модели сушки фруктов.....79
- Мирзаев М. С.**  
Двухскатная теплица с эффективным использованием солнечного излучения ..... 80
- Мирзаев М. С.**  
Способ выбора материала и определение геометрических размеров аккумулятора энергии солнечного излучения .....82
- Рахматов И. И., Саидова Р. М.**  
Термодинамика геотермального теплоснабжения .....84
- Саидов К. С.**  
Теплообменные процессы капиллярно смачиваемых солнечных водоопреснителей ....86
- Файзиев Б. М.**  
Моделирование процессов фильтрации суспензии в пористой среде ..... 87
- Хожиев Ш. Т., Хожиев Ш. Т., Иброхимов У. Г., Фазуллаева М. Г.**  
Химическая кинетика кластерообразования .... 91

## ХИМИЯ

- Бакибаев А. А., Кабиева С. К., Воронова О. А., Плотников Е. В., Газалиева М. А., Рахимберлинова Ж. Б., Такибаева А. Т.**  
Исследование влияния гуминовых кислот и их модификаций на процесс электровосстановления кислорода .....94
- Богданова Д. А., Нургалиев Т. Р., Родькин Н. Г., Нуштаева А. В.**  
Сравнительный анализ адсорбционных свойств различных адсорбентов..... 97

- Джураева Г. Х., Атакулова Д. Т.**  
Особенности химического и минералогического состава и существующие методы переработки рапы озер караумбет и барсакельмес..... 100
- Эминова С. Ф., Гахраманов Т. О., Мамедов С. Э., Ахмедов Э. И.**  
Влияние содержание бора и фосфора на физико-химические и каталитические свойства Н-ультрасила в реакции этилирования этилбензола ..... 102

## МЕДИЦИНА

- Абдрахманова Г. Е., Мусралиева А. Д., Надырова М. Я., Ни Е. О., Рашитова А. Ж., Серикбаев М. А.**  
Факторы риска развития пневмонии и сепсиса новорожденных города Алматы..... 106
- Деньга А. В., Шлыков В. В.**  
Медицинская информационная система для автоматизации рабочего места врача..... 108
- Кильмухаметова Ю. Х.**  
Стоматологический статус студентов второго курса железнодорожного техникума города Черновцы ..... 110
- Куташов В. А., Сазонов И. Э., Ульянова О. В.**  
Современная терапия цереброваскулярных заболеваний в Воронежском регионе ..... 113
- Мирсагатова М. Р.**  
О радиофобии населения в крупных городах . 118
- Хабарова Т. Ю., Куташов В. А.**  
Функционирование клинико-психологической реабилитации у пациенток с посттравматическим стрессовым расстройством ..... 120
- Чой С. В., Абдилдаева Л. Т., Айторе А. Н., Бакытбек М., Дулатбаева Г. Р., Карабалаева А. К.**  
Уровень контроля над бронхиальной астмой у детей города Алматы ..... 123



# МАТЕМАТИКА

## Оптимальная весовая кубатурная формула над пространством Соболева $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$

Бакаев Илхом Иззатович, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Современная постановка проблемы оптимизации формул приближенного интегрирования заключается в минимизации нормы функционала погрешности формулы на выбранных нормированных пространствах [1–3].

Рассмотрим кубатурную формулу общего вида

$$\int_{T_n} p(x) f(x) dx \approx \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N (-1)^\alpha c_\lambda^\alpha f^{(\alpha)}(x^{(\lambda)}), \tag{1}$$

над пространством С. Л. Соболева  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ . Здесь соответственно  $c_\lambda^\alpha$  и  $x^{(\lambda)}$  являются коэффициентами и узлами кубатурной формулы (1),  $p(x)$  — весовая функция,  $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ ,  $T_n$  —  $n$ -мерный тор и  $\alpha$  — порядок обобщенных производных и  $0 \leq q \leq m - 1$ .

Норма функции

$$\|f(x) / \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)\|^2 = \left( \int_{T_n} f(x) dx \right)^2 + \sum_{k \neq 0} |2\pi k|^{2m} |\hat{f}_k|^2, \tag{2}$$

Обобщенную функцию

$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = p(x) \varepsilon_{T_n}^{(\alpha)}(x) - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \delta^{(\alpha)}(x - x^{(\lambda)}), \tag{3}$$

назовем ее функционалом погрешности кубатурной формулы (1).

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Квадрат нормы функционала погрешности (3) кубатурной формулы общего вида (1) над пространством  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$  равен

$$\|\ell_N^{(\alpha)}(x) / \tilde{W}_2^{(m)*}(T_n)\|^2 = \left| \hat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \hat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left( \prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k, x^{(\lambda)})} \right|^2}{k^{2m}},$$

где  $c_\lambda^\alpha$  — коэффициенты,  $x^{(\lambda)}$  — узлы кубатурной формулы (1) и  $\hat{p}_k$  — коэффициенты Фурье функции  $p(x)$ , т. е.  $\hat{p}_k = \int_{T_n} p(x) e^{2\pi i(k, x)} dx$ .

*Доказательство.* Известно, что для функции  $f(x) \in \tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$  справедливо следующее равенство:

$$f(x) = \sum_k \hat{f}_k e^{-2\pi i(k, x)},$$

где  $\widehat{f}_k = \langle f(x), e^{2\pi i(k,x)} \rangle = \int_{T_n} f(x) e^{2\pi i(k,x)} dx$ , т. е. коэффициенты Фурье.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \langle \ell_N^{(\alpha)}, f(x) \rangle &= \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \sum_k \widehat{f}_k e^{-2\pi i(k,x)} \rangle = \\ &= \sum_k \widehat{f}_k \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), e^{-2\pi i(k,x)} \rangle = \sum_k \widehat{f}_k \widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)} = \widehat{f}_0 \widehat{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k \neq 0} \widehat{f}_k \widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь  $\widehat{\ell}_0^{(\alpha)} = \int_{T_n} \ell_N^{(\alpha)}(x) dx$ ,  $\widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)} = \int_{T_n} \ell_N^{(\alpha)}(x) e^{-2\pi i(k,x)} dx$ .

Применяя к правой части (4) неравенство Коши-Шварца и учитывая (2) получим следующую оценку

$$\left| \langle \ell_N^{(\alpha)}, f(x) \rangle \right| = \left| \widehat{f}_0 \widehat{\ell}_0^{(\alpha)} + \sum_{k \neq 0} \widehat{f}_k \widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)} \right| \leq \|f(x)/\widetilde{W}_2^{(m)}(T_n)\| \cdot \left\{ \left| \widehat{\ell}_0^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \widehat{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{|k|^{2m}} \right\}^{1/2} \tag{5}$$

Принимая во внимание (2) и (5), получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) / \widetilde{W}_2^{(m)*}(T_n) \right\| \leq \left\{ \left| \widehat{\ell}_0^{(\alpha)} \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \widehat{\ell}_k^{(\alpha)} \right|^2}{|k|^{2m}} \right\}^{1/2}, \tag{6}$$

$$\text{где } \widehat{\ell}_k^{(\alpha)} = \widehat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left( \prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k,x^{(\lambda)})} \tag{7}$$

Таким образом, имея ввиду (7) и (6) получим

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)}(x) / \widetilde{W}_2^{(m)*}(T_n) \right\|^2 \leq \left| \widehat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \widehat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left( \prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k,x^{(\lambda)})} \right|^2}{k^{2m}}. \tag{8}$$

Существует такая функция из  $\widetilde{W}_2^{(m)}(T_n)$ , что в неравенстве (8) равенство достигается.

Действительно, рассмотрим следующую функцию  $u(x)$ :

$$u(x) = \widehat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)} e^{-2\pi i(k,x)}}{|k|^{2m}}.$$

Вычисляя значение функционала  $\ell_N^{(\alpha)}(x)$  на функции  $u(x)$  получим

$$\begin{aligned} \langle \ell(x), u(x) \rangle &= \langle \ell_N^{(\alpha)}(x), \widehat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\widehat{\ell}_{-k}^{(\alpha)} e^{-2\pi i(k,x)}}{|k|^{2m}} \rangle = \\ &= \left| \widehat{p}_0 - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha \right|^2 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\left| \widehat{p}_k - \sum_{|\alpha| \leq q} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^\alpha (2\pi i)^\alpha \left( \prod_{j=1}^n k_j \right)^\alpha e^{2\pi i(k,x^{(\lambda)})} \right|^2}{k^{2m}} = \left\| u(x) / \widetilde{W}_2^{(m)}(T_n) \right\|^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая (9),(6) получим доказательство теорема.

Введём обозначения  $D^N(x) = \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)})$ , тогда для функционала погрешности кубатурной формулы

(1) при  $\alpha = 0$  имеет место следующая теорема, которая является основным результатом этой работы.



**Теорема 2.** Среди всех кубатурных формул вида (1) при

$$\ell_N(x) = p(x)\varepsilon_{T_n}(x) - \prod_{i=1}^n D^{N_i}(x_i) \text{ и } \alpha = 0,$$

оптимальная в пространстве  $\tilde{W}_2^{(m)}(T_n)$  является единственная формула с коэффициентами  $\overset{o}{c}$  тогда, когда как узлы кубатурной формулы являются образом решетки на торе  $T_n$  и коэффициенты которой равны между собой

$$c_1 = c_2 = \dots = c_N = \overset{o}{c},$$

где

$$\overset{o}{c} = \frac{\widehat{P}_0 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{\widehat{P}_k}{|k|^{2m}}}{N \left( 1 + \frac{1}{(2\pi)^{2m}} \cdot \frac{1}{N^{2m}} \sum_{k \neq 0} \frac{1}{|k|^{2m}} \right)}.$$

Литература:

1. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. — 808 с.
2. Рамазанов, М.Д. Лекции по теории приближенного интегрирования. Уфа, 1973. — 173 с.
3. Салихов, Г.Н. Кубатурные формулы для многомерных сфер. Ташкент: Фан, 1985. — 104 с.

## Компактные пространства

Бешимова Дилором Рузиназаровна, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

**П**окрытием множества  $X$  называется такое семейство  $\{U_\alpha : \alpha \in M\}$  его подмножеств, что  $\cup \{U_\alpha : \alpha \in M\} = X$ . В случае когда  $(X, \tau)$  — топологическое пространство, это покрытие называется открытым (замкнутым) покрытием пространства  $X$ , если все множества  $U_\alpha$  открыты (замкнуты).

**Определение 1.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется *компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

Хаусдорфовы компактные пространства называется компактами.

**Определение 2.** Точка  $x$  называется *предельной точкой* множества  $A \subset X$ , если во всякой окрестности точки  $x$  содержится бесконечно много точек множества  $A$ . Точка  $x$  называется *точкой полного накопления* множества  $A \subset X$ , если для всякой ее окрестности  $Ox$  множества  $A$  и  $Ox \cap A$  равномощны.

**Определение 3.** Топологическое пространство  $(X, \tau)$  называется *счетно-компактным*, если из всякого его счетного открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.

**Теорема 1.** Топологическое  $T_1$ -пространство  $(X, \tau)$  счетно-компактно тогда и только тогда, когда всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, что в  $(X, \tau)$  существует бесконечное подмножество,  $A$  которое не имеет предельных точек. Известно, что  $T_1$ -пространстве всякое множество без предельных точек замкнуто. Поэтому множество  $X \setminus A$  открыто. Поскольку множество  $A$  замкнуто и не имеет предельных точек, у всякой точки  $x \in A$  существует окрестность  $Ox$ , пересекающаяся с множеством  $A$  в единственной точке  $x$ . Из счетного покрытия  $\{X \setminus A, O_{x_i}, x_i \in A, i \in N\}$  можно выделить конечное подпокрытие  $\{X \setminus A, O_{x_1}, O_{x_2}, \dots, O_{x_k}\}$ . Тогда множество  $A$  состоит из  $k$  точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Получили противоречие, что  $A$  содержит бесконечное много точек.

Достаточность. Предположим противное. Существует счетное открытое покрытие  $\mu = \{U_1, U_2, \dots\}$  пространства  $X$ , из которого нельзя выделить конечного покрытия. Можно считать, что  $U_{i+1} \not\subset \bigcup_{k=1}^i U_k$  для всякого  $i = 1, 2, \dots$ . Из каждой разности  $U_{i+1} \setminus \bigcup_{k=1}^i U_k$  выберем по точке  $x_i$  и положим  $A = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Пусть  $x$  — произвольная точка пространства  $X$ . Тогда точка  $x$  лежит в некотором элементе  $U_i$  покрытия  $\mu$ . Множество  $U_i$  является окрестностью точки  $x$ , пересекающейся с множеством  $A$  не более чем по  $i-1$  точке  $x_1, \dots, x_{i-1}$ . Таким образом, бесконечное множество  $A$  не имеет предельных точек. Получили противоречие. Теорема 6.1 доказана.

**Определение 4.** Топологическое пространство называется *финально компактным*, если из всякого его открытого покрытия можно выделить счетное подпокрытие.

**Пример 1.** Пусть  $R$  — числовая прямая с обычной топологией является финально-компактным, но не является компактным пространством.

**Утверждение 1.** В финально-компактном пространстве  $X$  всякое несчетное множество регулярной мощности имеет точку полного накопления.

Доказательство. Предположим противное, что существует множество  $A \subset X$  несчетной регулярной мощности  $\tau$ , не имеющее точек полного накопления. Тогда у всякой точки  $x \in X$  существует окрестность  $Ox$ , пересекающаяся с множеством  $A$  по множеству мощности  $< \tau$ . Из покрытия  $\{Ox : x \in X\}$  пространства  $X$  можно выбрать счетное подпокрытие  $\{Ox_1, Ox_2, \dots\}$ . Следовательно, множество  $A$  можно представить в виде счетной суммы множеств  $A \cap Ox_i$  мощности  $< \tau$ , что противоречит регулярности и несчетности  $\tau$ . Утверждение 1 доказано.

**Теорема 2.** Топологическое пространство  $X$  компактно тогда и только тогда, когда всякое его бесконечное подмножество имеет точку полного накопления.

Доказательство. Необходимость. Пусть  $X$  — компактное пространство. Тогда в силу замечания 1 пространство  $X$  является финально компактным пространством. В силу утверждения 1 всякое бесконечное подмножество пространства  $X$  имеет точку полного накопления.

Достаточность. Пусть бесконечное подмножество  $A$  пространства  $X$  имеет точку полного накопления  $x$ , т. е. для каждой окрестности  $Ox$  точки  $x$  множества  $A$  и  $Ox \cap A$  равномощны. Это означает, что точка  $x$  есть предельная точка множества  $A$ . Покажем, что  $X$  есть компактное пространство. **Теорема 3.** Пусть  $X$  — тихоновское пространство. Тогда

$$wd(O_\beta(X)) = wd(O_r(X)) = wd(O_\tau(X)) = wd(O_\sigma(X)) \leq wd(X).$$

Литература:

1. Radul, T.N. On the functor of order-preserving functionals. // Comment. Math. Unif. Carol. 1998. V,39. No. 3. P. 609–615.
2. Жиёмуратов, Р.Е. Топологические и категорные свойства пространства нелинейных  $\sigma$ -гладких функционалов. Канд. Дисс. Ташкент, ИМИТ, 2010, стр. 69.
3. Бешимов, Р.Б. О слабой плотности топологических пространств // ДАН РУз. — 2000. — № 11. — с. 10–13.

## О семействе обобщенных моделей Фридрикса

Гадаев Рустам Ражабович, ассистент;  
Джонизоков Улугбек Абдуганиевич, ассистент  
Джизакский политехнический институт (Узбекистан)

Некоторые задачи физики твердого тела [1], квантовой теории поля [2] и статистической физики [3] приводят к необходимости исследования резонансов и собственных значений обобщенной модели Фридрикса.

В настоящей работе рассматривается семейство обобщенных моделей Фридрикса  $h(p)$ ,  $p \in T^3$ . Рассмотрим случай, когда параметр функция  $w_1$  (см. ниже) имеет специальный вид и имеет невырожденный минимум в  $n$ ,  $n > 1$  в различных точках шестимерного тора  $T^6$ .

Пусть  $T^3 = (-\pi; \pi]^3$  — трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней. Всюду в работе  $T^3$  рассматривается как абелева группа, в которой операции сложения и умножения на вещественное число введены как операции сложения и умножения на вещественное число в  $R^3$  по модулю  $(2\pi Z)^3$ . Пусть  $C$  — одномерное комплексное пространство,  $L_2(T^3)$  — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $T^3$ .

Обозначим через  $H$  прямую сумму пространств  $H_0 = C$  и  $H_1 = L_2(T^3)$ , т. е.  $H = H_0 \oplus H_1$ . Гильбертово пространство  $H$  называется двухчастичная обрезанная подпространства Фоковского пространства.

Рассмотрим семейство обобщенных моделей Фридрикса  $h(p)$ ,  $p \in T^3$  действующих в гильбертовом пространстве  $H$  и задающийся как операторная матрица

$$h(p) = \begin{pmatrix} h_{00}(p) & h_{01} \\ h_{10} & h_{11}(p) \end{pmatrix} \tag{1}$$

где операторы  $h_{ii}(p) : H_i \rightarrow H_i$ ,  $i = 0, 1$ ,  $p \in T^3$  и  $h_{io}(p) : H_j \rightarrow H_i$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = 0, 1$  определяются по формулам

$$(h_{00}(p)f_0)_0 = w_0(p)f_0, (h_{01}f_1)_0 = \int \mathcal{G}(s)f_1(s)ds,$$

$$(h_{10}f_0)_1(q) = \mathcal{G}(q)f_0, (h_{11}(p)f_1)_1(q) = w_1(p, q)f_1(q).$$

Здесь  $f_i \in H_i$ ,  $i = 0, 1$ ,  $\mathcal{G}(\cdot)$  — вещественнозначная непрерывная (ненулевая) функция на  $T^3$ , а функции  $w_0(\cdot)$  и  $w_1(\cdot, \cdot)$  имеют вид  $w_1(p) = a + \varepsilon(p)$ ,  $w_1(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q)$ , где  $a > 0$  функция  $\varepsilon(\cdot)$  определяется с помощью равенства

$$\varepsilon(p) = \sum_{j=1}^3 (1 - \cos mp^{(j)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in T^3,$$

а  $m$  натуральное число. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

Легко можно проверить, что в этих предположениях оператор  $h(p)$ ,  $p \in T^3$ , определенный по формуле (1) и действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , является ограниченным и самосопряженным.

Пусть оператор  $h_0(p)$ ,  $p \in T^3$  действует в  $H$  как

$$h_0(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{11}(p) \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения  $h(p) - h_0(p)$ ,  $p \in T^3$  оператора  $h_0(p)$ ,  $p \in T^3$  является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора  $h(p)$ ,  $p \in T^3$  совпадает с существенным спектром оператора  $h_0(p)$ ,  $p \in T^3$ . Известно, что  $\sigma_{ess}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$ , где числа  $m(p)$  и  $M(p)$  определяются равенствами

$$m(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{j=1}^3 \left( 1 - \cos \frac{mp^{(j)}}{2} \right), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in T^3,$$

$$M(p) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{j=1}^3 \left( 1 + \cos \frac{mp^{(j)}}{2} \right), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in T^3.$$

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]. \quad (2)$$

**Замечание 1.** Отметим, что существенный спектр оператора  $h\left(\frac{1}{m}\bar{\pi}\right)$ ,  $\bar{\pi} = (\pi, \pi, \pi)$  совпадает с точкой  $\{12\}$  и следовательно, для любого  $p \in T^3$  мы не можем сказать, что существенный спектр оператора  $h(p)$  является абсолютно непрерывным.

Обозначим через  $n = n(m)$  число тех точек  $(p_i, q_j) \in (T^3)^2$  таких, что  $p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)})$ ,  $q = (q^{(1)}, q^{(2)}, q^{(3)})$  и  $p_i^{(k)}, q_j^{(k)} \in \left\{ 0, \pm \frac{2}{m}\pi; \pm \frac{4}{m}\pi; \dots; \pm \frac{m'}{m}\pi \right\}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $p_s \neq p_l$ ,  $q_s \neq q_l$  для всех  $s \neq l$ , где

$$m' = \begin{cases} m - 2, & \text{если } m \text{ четная} \\ m - 1, & \text{если } m \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Легко можно проверить, что  $n = (m' + 1)^6$  и функция  $w_1(\cdot, \cdot)$  имеет невырожденный минимум в точках  $(p_i, q_j) \in (T^3)^2$ ,  $i, j = 1, \sqrt{n}$ .

Дополнительно будем предполагать, что  $m \geq 3$  Потому что, если  $m = 1, 2$ , тогда  $n = 1$  и в настоящей работе нам интересен случай  $n > 1$ .

**Замечание 2.** Заметим, что верно равенство  $h(p_1) \equiv h(p_i)$ ,  $i = 2, \sqrt{n}$ .

Из определения числа  $p_1$  и равенства (2) вытекает, что  $\sigma_{\text{ess}}(h(p_1)) = [0; 12]$ . При каждом фиксированном  $p \in T^3$  определим регулярную в  $C \setminus [m(p); M(p)]$  функцию (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором  $h(p)$ ,  $p \in T^3$ )

$$\Delta(p; z) = w_0(p) - z - \int \frac{\mathcal{G}^2(s)ds}{w_1(p, s) - z}.$$

Далее, везде дополнительно предполагается, что все частные производные первого порядка функции  $\mathcal{G}(\cdot)$  непрерывны на  $T^3$ .

Так как функция  $w_1(\cdot, \cdot)$  имеет невырожденный минимум, равный нулю в точках  $(p_i, q_j) \in (T^3)^2$ ,  $i, j = 1, \sqrt{n}$  и все частные производные первого порядка функции  $\mathcal{G}(\cdot)$  непрерывны на  $T^3$ , существует конечный интеграл

$$\int \frac{\mathcal{G}^2(s)ds}{w_1(p, s)}, \quad p \in T^3.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега и равенства  $\Delta(p_i; 0) = \Delta(p_1; 0)$ ,  $i = 2, \sqrt{n}$  следует, что

$$\Delta(p_1; 0) = \lim_{p \rightarrow p_i} \Delta(p; 0), \quad i = 1, \sqrt{n}.$$

**Теорема 1.** Число  $z = 0$  является собственным значением оператора  $h(p_1)$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(p_1; 0) = 0$  и  $\mathcal{G}(q_i) = 0$ ,  $i = 1, \sqrt{n}$ .

Литература:

1. D. C. Mattis. The few-body problem on a lattice. Rev. Modern Phys., 58 (1986), No. 2, 361–379.
2. Фридрихс, К. Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир. 1972.
3. Малышев, В. А., Минлос Р. А. Кластерные операторы. Труды семинара им. И. Г. Петровского, 1983. Вып. 9. с. 63–80.

## Математическое моделирование тепловых полей при индукционно-резистивном обогреве трубопровода

Давыдова Марина Юрьевна учитель математики  
МАОУ «Физико-технический лицей № 1» (г. Саратов)

*Перспективным направлением в области электрообогрева трубопроводов является применение индуктивно-резистивной системы нагрева, основное назначение которой — компенсация тепловых потерь нефтепроводов и их предпусковой разогрев. Система индуктивно-резистивного нагрева является самой рентабельной по сравнению с системами электрообогрева сопротивлением и индукционными системами.*

**Ключевые слова:** *трубопровод, индукционно-резистивная система, нагревательный проводник, скин-эффект*

*A promising direction in the field of electrical heating of pipelines is the use of the inductive-coil heating system, the main purpose of which is compensation of heat losses in pipelines and their pre-start heating. Inductive-coil heating system is the most cost-effective in comparison with the resistance heating systems and induction heating systems.*

**Keywords:** *pipeline, inductive-resistive system of heating conductor, skin effect*

В зимнее время нефтепроводы различного назначения и диаметра часто дают сбой из-за реологических особенностей транспортируемых нефтепродуктов. Высокая вязкость перекачиваемых продуктов служит причиной перегрузки насосных агрегатов и перерасхода электроэнергии. В связи с этими особенностями применение в нефтяной промышленности обогрева нефтепроводов необходимо для поддержания технологически заданной температуры транспортируемых жидкостей, обеспечения необходимой вязкости нефтепродуктов и необходимой производительности трубопроводов.

Принцип действия ИРСН заключается в использовании специальных нагревательных элементов, использующих явление скин-эффекта и эффекта близости в проводниках на переменном токе [1].

Произведем исследование распределения температур в обогреваемом нефтепроводе.

Исходные данные:

- Материал трубопровода — сталь марки «Ст-35»;
- Площадь поперечного сечения трубы  $S = 32,34 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$
- Индукционно-резистивный проводник (ИРП) выполнен из меди
- Индукционно-резистивный нагреватель (ИРН) выполнен из никеля
- Жидкость в трубе — нефть
- Температура окружающей среды  $-35^\circ\text{C}$ .
- К рассмотрению примем ток частотой 50, 500 и 1000 Гц.
- Глубина проникновения тока (толщина скин-слоя) определяется выражением [2]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\omega \mu \mu_0 \frac{\sigma}{2}}}, \tag{1}$$

И при рассматриваемых частотах будет равна  $\delta_1 = 1527 \text{ мкм}$ ,  $\delta_2 = 483 \text{ мкм}$  и  $\delta_3 = 341 \text{ мкм}$  соответственно.

Плотность тока  $j$  убывает с глубиной проникновения в проводник

$$j(x, y, z, \tau) = j_0(x, y, z)e^{i\sigma} , \tag{2}$$

где  $\delta$  — толщина скин-слоя, м;  $j_0$  — плотность тока в скин-слое,  $\text{А/м}^2$ ;  $\mu$  — магнитная проницаемость материала проводника,  $\text{Гн/м}$ ;  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\text{Гн/м}$ ;  $\sigma$  — удельная электрическая проводимость материала проводника,  $\text{См/м}$ ;  $\tau$  — время, с;  $\omega$  — круговая частота переменного тока, Гц.

Картина температурного поля зависит от объемной плотности тепловыделения, вычисляемой по формуле

$$Q_V = \frac{I^2 \cdot R}{V} = j_p^2 \cdot \rho, \quad (3)$$

Так же  $\Delta = F(f, I)$ , поэтому конечная температура нефти в трубопроводе определяется выбором параметров  $I$  и  $f$  источника питания.

Передача тепла от индукционно-резистивного нагревателя нефтепроводу осуществляется теплопроводностью в месте контакта нагревателя и нефтепровода. Распределение тепла в индукционно-резистивном нагревателе определяется следующим выражением

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_1 \nabla^2 T_1(x, y, z, \tau) + \frac{j(x, y, z, \tau)^2}{\sigma}, \quad (3)$$

Распределение тепла в нефтепроводе

$$c_2 \rho_2 \frac{\partial T_2(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \lambda_2 \nabla^2 T_2(x, y, z, \tau), \quad (4)$$

Распределение тепла в движущейся нефти

$$c_3 \rho_3 \frac{\partial T_3(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} + v(x, y, z, \tau) \nabla T_3(x, y, z, \tau) = \lambda_3 \nabla^2 T_3(x, y, z, \tau), \quad (5)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — удельная теплоемкость материала индукционно-резистивного нагревателя, материала нефтепровода и нефти соответственно, Дж/(кг·К);  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  — плотность материала индукционно-резистивного нагревателя, материала нефтепровода и нефти соответственно, кг/м<sup>3</sup>;  $T_1, T_2, T_3$  — абсолютная температура индукционно-резистивного нагревателя, нефтепровода и нефти соответственно, К;  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — коэффициент теплопроводности материала индукционно-резистивного нагревателя, материала нефтепровода и нефти соответственно, Вт/(м·К);  $\nabla$  — оператор Гамильтона;  $v$  — скорость транспортируемой нефти, м/с.

Расчет распределения температурных полей произведен в программе ELCUT.

1. Пример решения (Жидкость в трубе — нефть. Температура окружающей среды -35°C. Ток источника  $I = 60$  А. Частота тока  $f_1 = 50$  Гц):

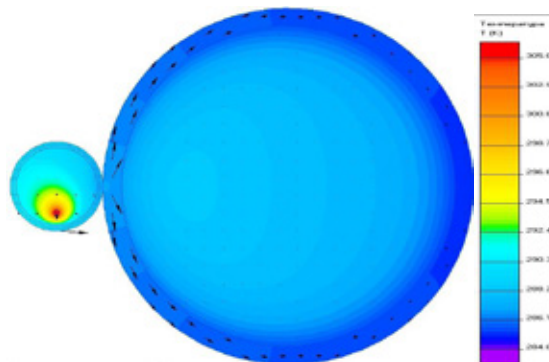


Рис. 1. Распределение температурного поля в трубе при нагреве с помощью системы ИРСН при частоте тока  $f_1 = 50$  Гц. Время нагрева  $\tau = 1800$  с.

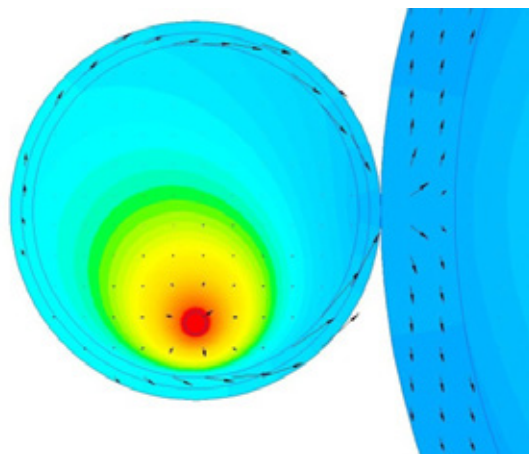


Рис. 2. Увеличенное изображение распределения температур и тепловых потоков вблизи стенки трубы

2. Пример решения (Жидкость в трубе — нефть. Температура окружающей среды  $-35^{\circ}\text{C}$ . Ток источника  $I = 50$  А. Частота тока  $f_2=500$  Гц)

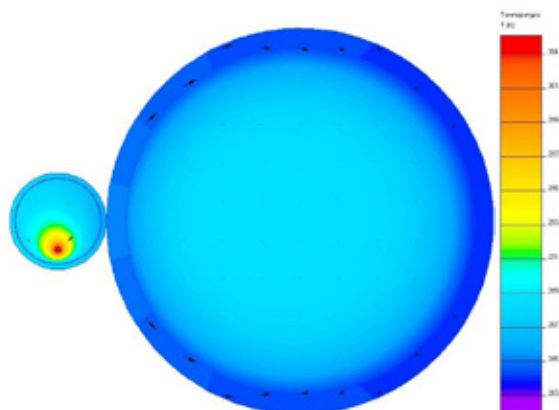


Рис. 3. Распределение температурного поля в трубе при нагреве с помощью системы ИРСН при частоте тока  $f_2=500$  Гц. Время нагрева  $\tau=1800$  с.

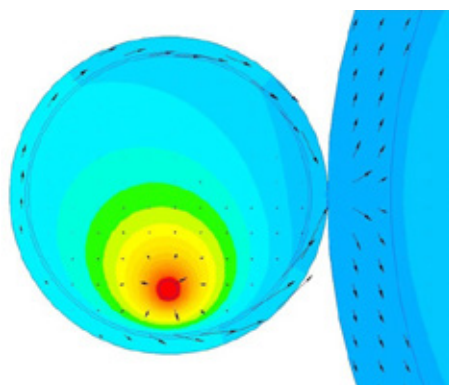


Рис. 4. Увеличенное изображение распределения температур и тепловых потоков вблизи стенки трубы.

3. Пример решения (Жидкость в трубе — нефть. Температура окружающей среды  $-35^{\circ}\text{C}$ . Ток источника  $I = 60$  А. Частота тока  $f_3=1000$  Гц)

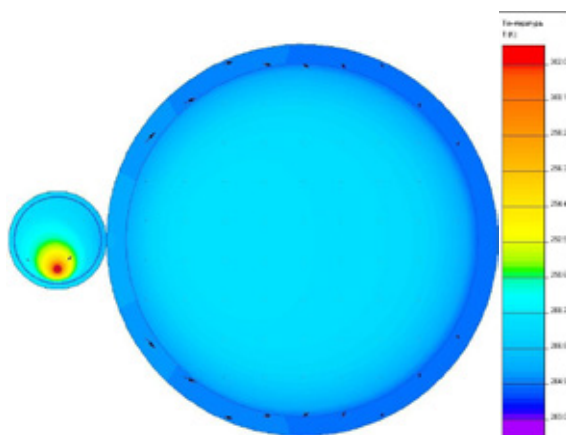


Рис. 5. Распределение температурного поля в трубе при нагреве с помощью системы ИРСН при частоте тока  $f_3=1000$  Гц. Время нагрева  $\tau=1800$  с.

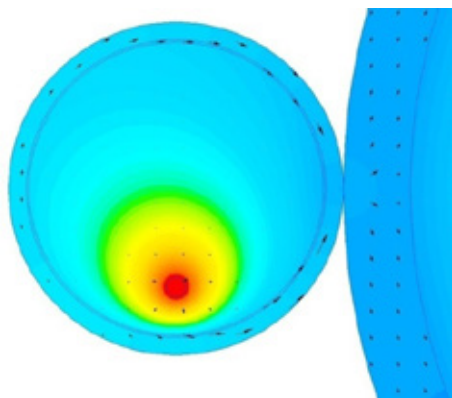


Рис. 6. Увеличенное изображение распределения температур и тепловых потоков вблизи стенки трубы

Вывод: Произведен расчет распределения температурного поля в нефтепроводе с учетом физических свойств материалов и факторов среды. Решения представлены графически в виде распределения температурных полей, шкал температур, так же приведено распределение тепловых потоков от нагревателя.

Как видно из решений, нефть в трубе нагревается до  $16^\circ\text{C}$ , что в принципе делает решение задачи верным, поскольку получен функционирующий обогреваемый нефтепровод в тяжелых температурных условиях окружающей среды. Индукционно-резистивная системы нагрева нефтепровода позволяет поддерживать заданную температуру нефтепродукта в предусмотренных технологическим процессом пределах, что способствует увеличению скорости транспортировки, предотвращению образования твердых фракций и пробок в нефтепроводах, а также сохранению необходимой кинематической вязкости транспортируемого продукта.

Литература:

1. Нефтеперекачивающие станции / А. А. Коршак. — Ростов н/Д: Феникс, 2015. — 269 с.
2. Вайнштейн, Л. А. Электромагнитные волны / Л. А. Вайнштейн. — 2. изд., перераб. и доп. — М.: Радио и связь, 1988. — 440 с.
3. Бычков, Ю. А. Расчет математических моделей динамических систем аналитически-численным методом. Модели с сосредоточенными и распределенными параметрами. Переходные и периодические режимы. / Ю. А. Бычков, С. В. Щербаков; Санкт-Петербургский гос. электротехн. ун-т «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина). — 2-е изд., перераб., доп. и расш. — СПб.: Изд-во «Технолит», 2010. — 380 с.



## Математическая модель процесса гибки с растяжением

Ермолаев Вячеслав Иванович, кандидат технических наук, инженер;  
 Ермолаева Вероника Викторовна, кандидат технических наук, доцент;  
 Пичугин Михаил Юрьевич, студент  
 Саратовский государственный технический университет имени Ю. А. Гагарина

Комплекс практических задач современного авиастроения, появление новых материалов, конструкций, повышение требований к уровню организации производства и к качеству выпускаемой продукции, ее конкурентоспособности на внешнем и внутреннем рынке определили насущную потребность в современных инновационных технологиях и оборудовании, характеризующихся возможно полной и высокоэффективной автоматизацией производства. К ним обоснованно можно отнести использование автоматизированных профилирующих машин, в частности для гибки с растяжением длинномерных сложнопрофильных изделий.

Технология авиастроения, обработка авиационных сплавов давлением отличаются повышенной изменчивостью размерно-механических параметров заготовок, мелкосерийностью и многономенклатурностью, значительной сложностью кинематических схем и сложностью проектирования управляющих программ, высоким уровнем (априорной) неопределенности, из-за чего существующие САПР оказываются неэффективными из-за отсутствия времени на своевременную подготовку управляющих программ в условиях быстрой смены номенклатуры деталей и инструментальной оснастки. Последнее обусловило необходимость разработки таких технологий, при которых формообразующее замыкание координат и сил являлось слабозависимым от воздействия влияющих факторов и параметров различной природы за счет подготовки управляющей программы в реальном времени в режиме «Обучение» по первой детали.

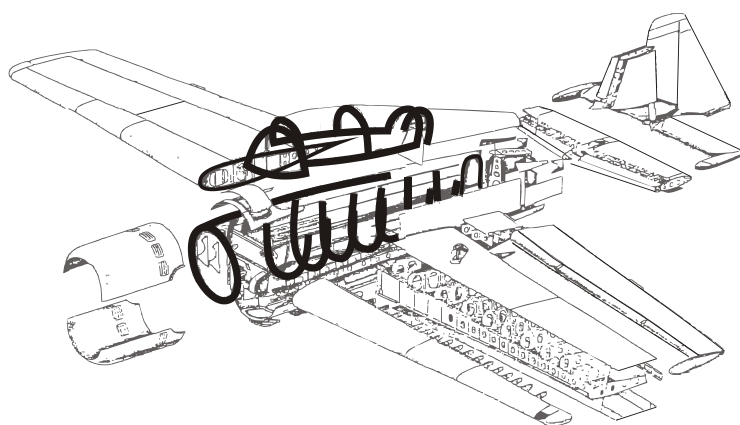


Рис. 1. Конструкторско-технологическое членение самолета

В авиастроении процессы гибки с растяжением используются в условиях многономенклатурного мелкосерийного производства. На рис. 1 представлено конструкторско-технологическое членение спортивного самолета, где выделены детали, изготавливаемые гибкой с растяжением. При изготовлении летательного аппарата число деталей из профилей может достигать десятков тысяч, общая их длина — до 30 км, размеры деталей от 25 до 1000 мм, их масса может меняться от 0,01 до 25 кг. Характер производства предполагает частую замену (несколько раз за рабочую смену) пуансонов различных типоразмеров и конфигурации, используемых для изготовления деталей. Количество деталей в партии колеблется от 2–3 до 30–40 штук. Вместе с тем существующие системы автоматизированного проектирования и расчета технологических параметров процесса гибки с растяжением требуют значительных временных затрат (до нескольких часов) на подготовку программы формообразования партии конкретных деталей, что в условиях современного производства неприемлемо. Указанные особенности делают актуальными задачи оперативного программирования в режиме «обучение» для поступившей в производство партии деталей по силам растяжения и последующей своевременной коррекции управляющей программы, воспроизводимой в автоматическом режиме по координатному замыканию.

Рассматривается ориентированная на САПР математическая модель процесса гибки с растяжением, позволяющая повысить эффективность управления формообразованием сложнопрофильных деталей на автоматизированных профилирующих машинах за счет анализа влияния непрямолинейности свободного участка профиля, который начинается от зоны пластического шарнира и до точки фиксации в зажимном патроне.

Приведены результаты теоретических исследований, в ходе которых проведены модернизация аналитического решения и моделирование гибки с растяжением на основе нового представления о выборе расчетной схемы нагружения, связанной с линией между точкой схода заготовки с пуансона и концом заготовки. При этом растягивающий гидроцилиндр задает величину суммарной силы, приложенной к концу заготовки, а гибочный — направление действия этой силы. За счет использования модели нерастяжимой нити показана принципиальная возможность качественного анализа новых пространственных задач гибки с растяжением в естественных уравнениях равновесия нити на поверхности, в частности, для задачи изготовления сопрягающих профилей между крылом и фюзеляжем самолета.

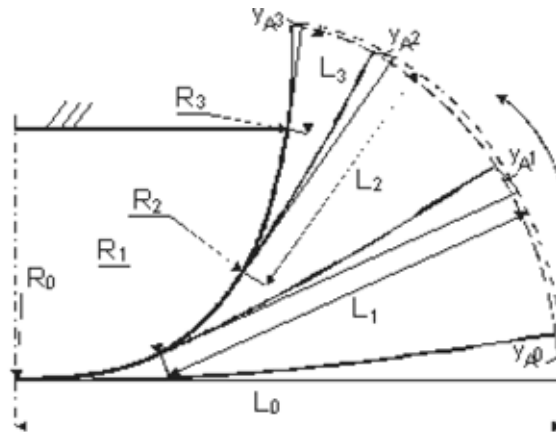


Рис. 2. Сравнение способов формообразования опорной траектории при «старом» и «новом» методах моделирования процесса гибки с растяжением

Предложена новая модель процесса гибки с растяжением, более полно отражающая особенности данной технологической операции (рис. 2). Процесс гибки с растяжением представляется в виде волны деформирования, которая перемещается по длине заготовки вместе с точкой схода с пуансона. После прохождения волны деформированное состояние остается законсервированным. В каждый конкретный момент времени заготовка может быть условно разделена на два участка: первый — уже изогнутый и зафиксированный, и второй, представляющий собой консольную балку, к концу которой приложены силовые воздействия, осуществляющие растяжение и изгиб. Форму первого участка определяет шаблон, для определения формы второго участка используется решение задачи о гибке с растяжением консольной балки с защемленным концом.

Величина  $y_A$  — координата точки  $A$  — характеризует отклонение траектории перемещения конца реальной заготовки от траектории перемещения нерастяжимой нити той же длины. Выражая  $y_A$  через радиус шаблона  $R_w$  в точке схода

с него заготовки, учитывая  $\frac{1}{R_w} = \kappa(0) = \frac{QL}{\lambda}$ , получают:

$$y_A = \frac{1}{R_w P} \frac{(L\sqrt{P\lambda} - \lambda) e^{\left(2L\sqrt{\frac{P}{\lambda}}\right)} + L\sqrt{P\lambda} + \lambda}{e^{\left(2L\sqrt{\frac{P}{\lambda}}\right)} - 1}, \tag{1}$$

где  $L$  — часть длины заготовки, которая еще не коснулась шаблона;  $\kappa$  — кривизна слоя, проходящего через ось поворота сечения заготовки при изгибе;  $P$  и  $Q$  — силы растяжения и изгиба, действующие на заготовку;  $\lambda$  — параметр, характеризующий свойства материала заготовки и геометрические параметры ее поперечного сечения.

Проведен вычислительный эксперимент по моделированию процесса гибки с (рис. 3, 4). Отработана методика использования программного комплекса при расчете напряженно-деформированного состояния формообразуемого профиля.

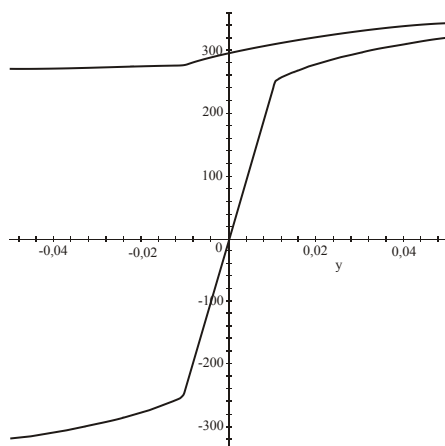


Рис. 3. Распределение напряжений по высоте сечения образца

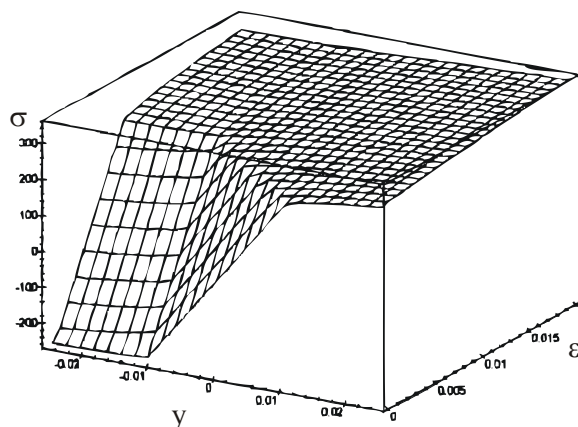


Рис. 4. Распределение напряжений вдоль вертикального сечения образца в зависимости от дополнительного растяжения

Уточненная на основе (1) математическая модель позволила повысить эффективность управления формообразованием сложнопрофильных деталей на автоматизированных профилегибочных машинах.

С учетом проведенных теоретических исследований по уточнению математической модели приведен способ формообразования сложнопрофильных деталей с использованием оперативной коррекции управляющих программ. Проведена модернизация способа формирования координатной сетки контурного управления в режиме «Обучение» по силе растяжения на первой детали. При этом проводится дополнительный учет различных влияющих факторов вида: деформация контура обтяжного пуансона, перераспределение его положения из-за несимметричных нагрузок и др.

Разработан способ формирования координатной сетки автоматизированной профилегибочной машины, заключающийся в том, что первую деталь изготавливают при расчетном изменении гибочного угла по перемещениям, а растяжение заготовки производят по силам с запоминанием приращений перемещений в опорных точках, отличающийся тем, что после исполнения расчетных перемещений гибочного крыла, дополнительно проводят его перемещение до контактирования профиля с концом обтяжного пуансона с одновременным калибровочным растяжным перемещением профиля (рис. 5).

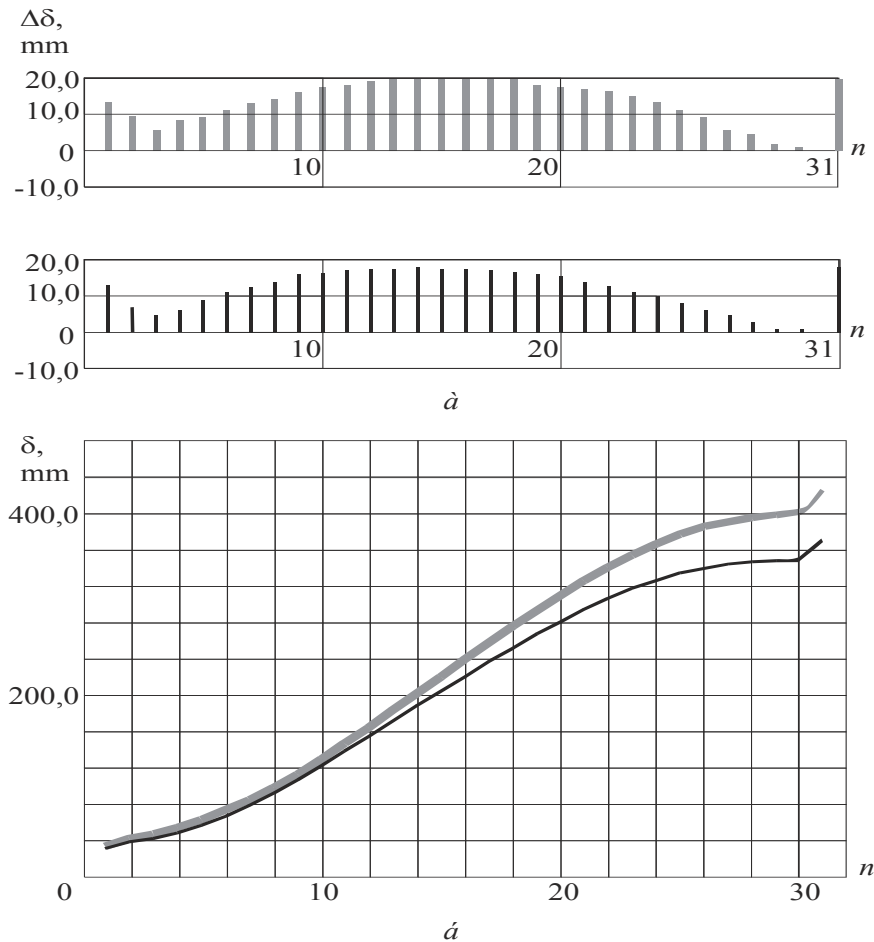


Рис. 5. Сформированные в режиме обучения значения приращений ( $\Delta\delta$ ) и перемещений ( $\delta$ ) в реперных точках ( $n$ ) обобщенной системы координат (угол наклона касательной к контуру пуансона и приращения перемещений) автоматизированной профилегибочной машины

Исследовано влияние на остаточные деформации деталей изменения механических свойств свежезакаленных деталей с течением времени, особенно для случая неудовлетворительной технологической пластичности.

Отработан метод коррекции управляющей программы по критерию точности соответствия контура детали и контура шаблона способом управления по обратной связи (знаковая подналадка), иллюстрирующий повышение точности процесса формообразования на автоматизированных профилегибочных машинах (уменьшение отклонений контура деталей от шаблона до двух-четырех раз, рис. 6).

Отработаны методы определения параметров первоначальной настройки автоматизированной профилегибочной машины с учетом положений фиксации каретки на гибочном крыле, длины заготовки, формы пуансона, диапазона перемещения штока растяжного гидроцилиндра.

Проведено аналитическое и экспериментальное исследование условий закрепления концов профиля в зажимных патронах. Исследовалось влияние ряда возмущений на точность и надежность фиксации заготовки в зажимном патроне. Определены виды нарушений нормального процесса, разработаны рекомендации по их предупреждению. Исследованы аналитически и экспериментально особенности системы «гибочный гидроцилиндр — крыло», определены условия возникновения скоростного замыкания для этой системы, влияющие на качество гибки.

#### Основные выводы

1. На основе выполненных исследований обосновано управление формообразованием сложнопрофильных деталей на автоматизированных профилегибочных машинах, впервые позволяющее компенсировать влияние криволинейности свободного участка профиля и деформаций обтяжного пуансона при автоматической подготовке и последующей коррекции управляющей программы.

2. С учетом установленной криволинейности свободного участка профиля проведены модернизация аналитического решения и моделирование гибки с растяжением на основе нового представления о выборе расчетной схемы нагружения, связанной с линией между точкой схода заготовки с пуансона и концом заготовки.



Рис. 6. Знаковая адаптивная подналадка

3. Разработаны методика и программный комплекс расчета напряженно-деформированного состояния формообразуемого профиля для САПР, позволяющие давать обоснованные рекомендации о выборе технологических схем формообразования на автоматизированных профилегибочных машинах.

4. Проведен вычислительный эксперимент процесса гибки с растяжением. Отработана методика использования программного комплекса при расчете напряженно-деформированного состояния формообразуемого профиля.

Литература:

1. Аналитическое решение задачи гибки с растяжением / А. В. Кочетков, И. Б. Челпанов, В. Б. Гнидько, В. И. Ермолаев // Вестник машиностроения. — 2000, № 7. — с. 46–49.
2. Кочетков, А. В., Ермолаев В. И. Классификационные признаки для технологических роботов гибки с растяжением // Исследования станков и инструментов для обработки сложных и точных поверхностей: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СГТУ, 2000. — С. 142–144.
3. Бржозовский, Б. М., Ермолаев В. И., Карпов А. Н. Совершенствование технологий изготовления трехметровых дорожных реек за счет силового формообразования // Материалы Всерос. науч.-практ. конф. по диагностике автомобильных дорог. — Саратов: ФГУП СНПЦ «Росдортех», 2003. — с. 93–95.
4. Кочетков, А. В., Ермолаев В. И., Челпанов И. Б. Проектирование силоизмерительных датчиков, реализуемых на базе штатных деталей машин // Прогрессивные направления развития технологии машиностроения: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СГТУ, 2003. — с. 72–76.
5. Малогабаритный пресс для силовых операций с микропроцессорным управлением / Б. М. Бржозовский, С. В. Никаноров, В. И. Ермолаев, А. И. Стекольников // Автоматизация и управление в машино- и приборостроении: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СГТУ, 2004. — с. 106–108.
6. Ермолаев, В. И. Модернизация способа формирования координатной сетки для контурного управления автоматизированной профилегибочной машины в режиме «Обучение» // Автоматизация и управление в машино- и приборостроении: Межвуз. науч. сб. — Саратов: СГТУ, 2004. — с. 53–54.

## Об одной весовой оптимальной по порядку сходимости кубатурной формуле в пространстве $L_p^{(m)}(K_n)$

Жалолов Озоджон Исомидинович, кандидат физико-математических наук, доцент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Рассмотрим кубатурную формулу вида

$$\int_{K_n} p(x) f(x) dx \approx \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda f(x^{(\lambda)}) \tag{1}$$

над пространством Соболева  $L_p^{(m)}(K_n)$ , где  $K_n$  —  $n$ -мерный единичный куб. Обобщённая функция

$$\ell_N(x) = p(x) \varepsilon_{K_n}(x) - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda \delta(x - x^{(\lambda)}) \tag{2}$$

называется *функционалом погрешности* кубатурной формулы (1),

$$\langle \ell_N(x), f(x) \rangle = \int_{K_n} p(x) f(x) dx - \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda f(x^{(\lambda)})$$

является погрешностью кубатурной формулы (1),  $p(x) \in L_p(K_n)$  — весовая функция,  $\varepsilon_{K_n}(x)$  — характеристическая функция  $K_n$ ,  $c_\lambda$  и  $x^{(\lambda)}$  — коэффициенты и узлы кубатурной формулы (1) и  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

**Определение.** Пространство  $L_p^{(m)}(K_n)$  — определяется как пространство функций заданных на  $n$ -мерном единичном кубе  $K_n$  и имеющие все обобщённые производные порядка  $m$ , суммируемые со степенью  $p$  в норме

$$\|f(x)/L_p^{(m)}(K_n)\| = \left\{ \int_{K_n} \left\{ \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} [D^{|\alpha|} f(x)]^2 \right\}^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \tag{3}$$

Справедлива следующая

**Лемма.** Если для функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) выполняется условие Декартовых произведений, т. е.

$$\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2) \otimes \dots \otimes \ell_{N_n}(x_n) \tag{4}$$

$$u \left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \leq d_i \frac{1}{N_i^{m_i}}, \quad d_i - \text{константы}, \tag{4}$$

$$m. e \left\| \ell_{N_i}(x_i) / L_p^{(m_i)*}(0,1) \right\| \leq d_i O(h^{m_i}), \quad d_i - \text{константы}, \quad (i = \overline{1, n}), \tag{5}$$

$$m_0 \left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^n N_i^{m_i}}, \quad d - \text{константа}, \tag{6}$$

$$\text{или} \left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| \leq d \cdot O(h^m),$$

$$\text{где} \ell_{N_i}(x_i) = p(x_i) \varepsilon_{K_i}(x_i) - \sum_{\lambda_i=1}^{N_i} c_{\lambda_i} \delta(x_i - x_i^{(\lambda_i)}), \quad d = \prod_{i=1}^n d_i \quad \text{и} \quad m = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

**Доказательство** ведем методом математической индукции.

Пусть  $n = 2$ , тогда  $x = (x_1, x_2)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, m = m_1 + m_2, dx = dx_1 dx_2$ ,  
 $f(x) = f(x_1, x_2), p(x) = p(x_1, x_2)$  и  $\ell_N(x) = \ell_{N_1}(x_1) \otimes \ell_{N_2}(x_2)$ .

Так как в дальнейшем мы будем использовать норму функции в одномерном случае то (3) при  $n = 1$  принимает следующий вид.

$$\|f(x_i)/L_p^{(m_i)*}(0,1)\| = \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{d^{m_i}}{dx_i^{m_i}} f(x_i) \right]^p dx_i \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{7}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle \right| = \left| \langle \ell_{N_2}(x_2), \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle \rangle \right| \leq \\ & \leq \left\| \ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\|, \end{aligned} \tag{8}$$

Вычислим следующую норму

$$\left\| \langle \ell_{N_1}(x_1), f(x_1, x_2) \rangle / L_p^{(m_2)}(0,1) \right\| \leq d' \left\| \ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x)/L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \tag{9}$$

где  $d'$  — константа.

Таким образом, из (8) и (9) получим:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_N(x_1, x_2), f(x_1, x_2) \rangle \right| \leq \\ & \leq d' \left\| \ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| f(x)/L_p^{(m)}(K_2) \right\|, \end{aligned} \tag{10}$$

Из (10), пользуясь определением нормы, получим

$$\left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d' \left\| \ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_2}(x_2)/L_p^{(m_2)*}(0,1) \right\|, \tag{11}$$

Учитывая (4), на основании (11), имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d' \cdot d_1 \cdot d_2 \frac{1}{N_1^{m_1} N_2^{m_2}} \\ \text{т. е. } & \left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_2) \right\| \leq d_3 O(h^{m_1}) O(h^{m_2}), \text{ где } d_3 = d' \cdot d_1 \cdot d_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть теперь неравенство (6) справедливо при  $n = k$ , тогда на основании приведенных выше вычислений, получим

$$\left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_k) \right\| \leq d'' \cdot d \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_k^{m_k}}$$

Используя справедливость утверждения леммы при  $n = k$  докажем, что утверждение выполняется при  $n = k + 1$ . Учитывая (12) при  $n = k + 1$  оценим погрешность кубатурной формулы вида (1)

$$\begin{aligned} & \left| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle \right| \leq \\ & \leq \left\| \ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k)/L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \times \\ & \times \left\| \langle \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1}), f(x_1, x_2, \dots, x_{k+1}) \rangle / L_p^{(m_{k+1})}(0,1) \right\|. \end{aligned} \tag{13}$$

Отсюда, как и выше, пользуясь определением нормы функционала, получим

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_N(x)/L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d'' \left\| \ell_{N_1}(x_1)/L_p^{(m_1)*}(0,1) \right\| \cdot \dots \\ & \dots \cdot \left\| \ell_{N_k}(x_k)/L_p^{(m_k)*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \ell_{N_{k+1}}(x_{k+1})/L_p^{(m_{k+1})}(0,1) \right\|. \end{aligned} \tag{14}$$

Из неравенств (4) и (14) имеем:

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_{k+1}) \right\| \leq d^m \cdot d \cdot \frac{1}{N_1^{m_1} \cdot N_2^{m_2} \dots N_{k+1}^{m_{k+1}}} \tag{15}$$

С помощью этой леммы легко доказывается следующая теорема.

**Теорема.** Весовая кубатурная формула (1) с функционалом погрешности (2) при  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ ,

$\prod_{i=1}^n N_i = N$  и  $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$  является оптимальной по порядку сходимости над пространством

$L_p^{(m)}(K_n)$ , т. е. для нормы функционала погрешности (2) кубатурной формулы (1) имеет место равенство

$$\left\| \ell_N(x) / L_p^{(m)*}(K_n) \right\| = O\left( N^{-\frac{m}{n}} \right).$$

Литература:

1. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974—808 с.
2. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука. 1988, — 333 с.

## Решение общей марковской игры путем аппроксимации ее игрой с переоценкой

Ибрагимов Абдуфаттах Абдурашидович, кандидат технических наук, доцент  
Ташкентский институт ирригации и мелиорации (Узбекистан)

*Проблемы существования и нахождения значения и ситуаций ε-равновесия для общей марковской игры решены путем аппроксимации ее марковской игрой с переоценкой (дисконтированием). В качестве примера рассмотрена марковская игра «Большой матч».*

**1. Марковская игра с переоценкой.** Марковскую игру можно задать с помощью множества прямоугольных матриц (игр компонент)  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_N\}$  (см. [1]):

$$\Gamma_i = [h_i^{kr} + \beta \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kr} \Gamma_j],$$

где  $\Gamma_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) – состояние игры,  $k$  ( $r$ ) – решение игрока I (II), принимаемое в  $i$ -м состоянии;  $k \in A_i = \{1, 2, \dots, k_i\}$ ,  $r \in B_i = \{1, 2, \dots, r_i\}$ ;  $\beta \in [0, 1)$  – коэффициент переоценки (дисконтирующий множитель).

Процесс игры определяется следующим образом. Пусть на очередном шаге разыгрывается игра-компонента  $\Gamma_i$  (игра находится в состоянии  $i$ ). Игрок I и II независимо выбирают строку  $k$  и столбец  $r$  соответственно. В результате игрок II платит игроку I  $h_i^{kr}$  единиц, и согласно распределению  $p_{ij}^{kr}$  определяется следующее состояние  $\Gamma_j$ . После чего игра продолжается по той же схеме. Выигрыши на протяжении игры накапливаются. Игрок I стремится максимизировать свой накопленный выигрыш, в то время как игрок II стремится его минимизировать. Суть коэффициента переоценки  $\beta$  состоит в том, что единица выигрыша игрока I через  $n$  шагов игры будет стоить  $\beta^n$  единиц.

Обозначим:  $x_i^k(n)$  – вероятность выбора решения  $k \in A_i$  игроком I в состоянии  $i$  на  $n$ -м шаге игры;  $y_i^r(n)$  – вероятность выбора решения  $r \in B_i$  игроком II в состоянии  $i$  на  $n$ -м шаге игры;  $X_i(n) = \{x_i^k(n), k \in A_i\}$ ;  $Y_i(n) = \{y_i^r(n), r \in B_i\}$ ;  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ .

Решающей функцией на  $n$ -м шаге игрока I называется набор распределений  $x_n = \{X_i(n), 1 \leq i \leq N\}$ , а игрока II –  $y_n = \{Y_i(n), 1 \leq i \leq N\}$ . Стратегией игрока I называется последовательность решающих функций  $\pi = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , а игрока II –  $\varphi = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ . Стратегии вида  $x^\infty = (x, x, \dots, x, \dots)$ ,  $y^\infty = (y, y, \dots, y, \dots)$  называются стационарными. Множества стратегий игроков обозначим:  $\Pi = \{\pi\}$ ,  $\Phi = \{\varphi\}$ ,  $X^\infty = \{x^\infty\}$ ,  $Y^\infty = \{y^\infty\}$ . В дальнейшем при рассмотрении стационарных



стратегий, верхний индекс  $\infty$  будет опущен. Множество  $\Sigma_S = X \times Y$  называется классом стационарных стратегий, множество  $\Sigma_M = \Pi \times \Phi$  – классом марковских стратегий.

На  $n$ -м шаге игры при заданных стратегиях  $\pi \in \Pi$  и  $\varphi \in \Phi$  вероятность перехода из состояния  $i \in S$  в состояние  $j \in S$  равна

$$P_{ij}[X_i(n), Y_i(n)] = \sum_{k \in A_i} \sum_{r \in B_i} x_i^k(n) y_i^r(n) p_{ij}^{kr},$$

а ожидаемый выигрыш игрока I равна

$$H_i[X_i(n), Y_i(n)] = \sum_{k \in A_i} \sum_{r \in B_i} x_i^k(n) y_i^r(n) h_i^{kr}.$$

При любых нестационарных стратегиях  $\pi$  и  $\varphi$  игроков рассматриваемый процесс является, вообще говоря, неоднородной цепью Маркова, для которой матрица вероятностей перехода за  $n$  шагов имеет вид

$$P_n(\pi, \varphi) = P(x_1, y_1) P(x_2, y_2) \cdots P(x_n, y_n), \quad n \geq 1,$$

где  $P(x_n, y_n)$  является матрицей перехода размера  $N \times N$ ,  $(i, j)$ -й элемент которого равен

$P_{ij}[X_i(n), Y_i(n)]$ . При  $n = 0$  положим  $P_0(\pi, \varphi) = I$  (единичная матрица размера  $N \times N$ ). Решающим функциям  $x_n$  и  $y_n$  соответствует  $(N \times 1)$ -мерный вектор выигрышей  $H(x_n, y_n) = \{H_i[X_i(n), Y_i(n)], 1 \leq i \leq N\}$ .

Эти обозначения позволяют представить функцию выигрыша марковской игры с переоценкой  $\beta$  и конечным числом шагов  $T$  как  $N$ -мерный вектор-столбец

$$W_\beta^T(\pi, \varphi) = \sum_{n=0}^{T-1} \beta^n P_n(\pi, \varphi) H(x_{n+1}, y_{n+1}),$$

$i$ -й элемент которого отвечает  $i$ -му начальному состоянию игры.

Тройка  $\Gamma = \langle \Pi, \Phi, W_\beta^T(\pi, \varphi) \rangle$  называется марковской игрой с переоценкой и конечным числом шагов. Подыгра  $\gamma = \langle X^\infty, Y^\infty, W_\beta^T(x^\infty, y^\infty) \rangle$  игры  $\Gamma$  называется марковской игрой с переоценкой и конечным числом шагов в стационарном режиме. Верхнее и нижнее значения игры  $\Gamma$  определяются следующими  $N$ -мерными вектор столбцами:

$$\bar{v}(\Gamma) = \inf_{\varphi \in \Phi} \sup_{\pi \in \Pi} W_\beta^T(\pi, \varphi), \quad \underline{v}(\Gamma) = \sup_{\pi \in \Pi} \inf_{\varphi \in \Phi} W_\beta^T(\pi, \varphi).$$

Таким же образом определяются верхнее  $\bar{v}(\gamma)$  и нижнее  $\underline{v}(\gamma)$  значения игры  $\gamma$ . Игра  $\Gamma$  ( $\gamma$ ) имеет значение  $v(\Gamma)$  ( $v(\gamma)$ ), если ее верхнее и нижнее значения равны.

Из принципа оптимальности Беллмана и принципа максимина фон Неймана вытекает существование значения игры  $\Gamma$ . Значение  $[w_i^*](i \in S)$  игры  $\Gamma$  и оптимальные стратегии  $\pi^*$  и  $\varphi^*$  игроков могут быть определены с помощью функционального уравнения преобразования цен:

$$w_i^n = \text{val}[h_i^{kr} + \beta \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kr} w_j^{n-1}], \quad i \in S, \quad n = 1, 2, \dots, T, \tag{1}$$

где  $w_i^0 = 0, j \in S$ ;  $w_i^n$  –  $i$ -я компонента вектора  $W_\beta^n(\pi, \varphi)$ ;  $\text{val}[\cdot]$  – значение (цена) игры с матрицей  $[\cdot]$ .

Марковская игра с переоценкой и бесконечным числом шагов  $\Gamma W_\beta = \langle \Pi, \Phi, W_\beta^\infty(\pi, \varphi) \rangle$  исследована в [2] с помощью операторов сжатия.

**2. Общая марковская игра. Постановка задачи.** Когда число шагов бесконечно в качестве функции выигрыша может быть рассмотрен предельный средний выигрыш игрока I

$$G(\pi, \varphi) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{W_1^n(\pi, \varphi)}{n}.$$

Общая марковская игра, задаваемая тройкой  $\Gamma G = \langle \Pi, \Phi, G(\pi, \varphi) \rangle$ , характеризуется тем, что при любых стационарных стратегиях игроков множество состояний игры  $S$  разбивается на несколько эргодических множеств и невозвратное множество, которые могут меняться в зависимости от стратегий игроков. Такая игра изучена в работах [3, 4].

Наша цель – исследовать проблемы существования и нахождения значения и ситуаций  $\varepsilon$ -равновесия для общей марковской игры путем аппроксимации ее марковской игрой с переоценкой.

**3. Существование и нахождение значения и ситуаций  $\varepsilon$ -равновесия для общей марковской игры.** Напомним, что если  $P$  – стохастическая матрица, то последовательность  $\{P^n\}$  суммируема по Чезаро к некоторой стохастической матрице  $P^*$ . Отсюда следует суммируемость по Абелю последовательности  $\{P^n\}$  к матрице  $P^*$ , то есть  $(1 - \beta) \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n P^n \rightarrow P^*$  при  $\beta \rightarrow 1-0$ .

Пусть

$$G_n(\pi, \varphi) = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P_m(\pi, \varphi) H(x_{m+1}, y_{m+1}), \quad n \geq 1.$$

Обозначим  $G_\beta(\pi, \varphi) = (1 - \beta) W_\beta^\infty(\pi, \varphi)$ .

**Лемма 1.** В классе стационарных стратегий  $\Sigma_S$  сходимость  $G(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(x, y)$  равномерна.

Данное утверждение является следствием теоремы 6.3 из [3, 4].

**Лемма 2.** В классе стационарных стратегий  $\Sigma_S$  сходимость  $G(x, y) = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} G_\beta(x, y)$  равномерна.

Доказательство. Согласно доказательству теоремы Фробениуса (см. [5]) имеем

$$G(x, y) - G_\beta(x, y) = (1 - \beta)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n (n + 1) [G(x, y) - G_{n+1}(x, y)].$$

Сумму справа разобьем на две:

$$(1 - \beta)^2 \sum_{n=0}^{T-1} + (1 - \beta)^2 \sum_{n=T}^{\infty},$$

причем, ввиду леммы 1, для любого заданного числа  $\epsilon > 0$  существует такой не зависящий от  $(x, y) \in \Sigma_S$  номер  $T$ , что при  $n > T$  норма  $\|G(x, y) - G_{n+1}(x, y)\| < \epsilon$  для всех  $(x, y) \in \Sigma_S$ . Тогда вторая сумма по норме будет меньше  $\epsilon$  вне зависимости от  $\beta$ , а для первой суммы того же можно добиться за счет приближения  $\beta$  к 1 (независимо  $x$  от  $y$ ). Таким образом, по заданному  $\epsilon > 0$  найдется не зависящей от  $(x, y) \in \Sigma_S$  значение  $\beta_\epsilon \in (0, 1)$  такое, что при  $\beta > \beta_\epsilon$  будет  $\|G(x, y) - G_\beta(x, y)\| < \epsilon$  для всех  $(x, y) \in \Sigma_S$ . Лемма доказана.

**Теорема 1.** Пусть множества  $S, A_i$  и  $B_i (i \in S)$  конечны. Тогда общая марковская игра в стационарном режиме  $\gamma G = \langle \Pi, \Phi, G(x, y) \rangle$  имеет значение, т. е.

$$v(\gamma G) = \bar{v}(\gamma G) = \underline{v}(\gamma G).$$

Доказательство. Существование значения игры  $\gamma G$  будет доказано, если покажем существование ситуации  $\epsilon$ -равновесия  $(x_\epsilon, y_\epsilon)$  в классе стационарных стратегий  $\Sigma_S$ .

Последовательность  $\{P^n(x, y)\}$  суммируема по Чезаро к  $P^*(x, y)$ . Отсюда следует суммируемость по Абелю последовательности  $\{P^n(x, y)\}$  к  $P^*(x, y)$ . Следовательно,  $G(x, y) = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} G_\beta(x, y)$ . Отсюда и из леммы 2 следует,

что для любого  $\epsilon > 0$  при достаточно близости коэффициента переоценки  $\beta$  к 1 имеет место двойное неравенство

$$G_\beta(x, y) + \frac{\epsilon}{3} \mathbf{1} \geq G(x, y) \geq G_\beta(x, y) - \frac{\epsilon}{3} \mathbf{1} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S, \tag{2}$$

где  $\mathbf{1} - N$ -мерный вектор столбец с компонентами, равными 1.

С другой стороны, для марковской игры с переоценкой в классе стационарных стратегий  $\Sigma_S$  существует ситуация  $\epsilon$ -равновесия, ибо в  $\Sigma_S$  при любом  $\beta \in (0, 1)$  данная игра имеет значение [2]. Откуда для любого  $\epsilon > 0$  справедливы неравенства

$$G_\beta(x_\epsilon, y) + \frac{\epsilon}{3} \mathbf{1} \geq G_\beta(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq G_\beta(x, y_\epsilon) - \frac{\epsilon}{3} \mathbf{1} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S.$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$G_\beta(x_\epsilon, y) + \frac{2\epsilon}{3} \mathbf{1} \geq G(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq G_\beta(x, y_\epsilon) - \frac{2\epsilon}{3} \mathbf{1} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S.$$

Здесь вновь используя неравенства (2), имеем

$$G(x_\epsilon, y) + \epsilon \mathbf{1} \geq G(x_\epsilon, y_\epsilon) \geq G(x, y_\epsilon) - \epsilon \mathbf{1} \quad \forall (x, y) \in \Sigma_S.$$

Это значит, что для общей марковской игры в классе  $\Sigma_S$  существует ситуация  $\epsilon$ -равновесия  $(x_\epsilon, y_\epsilon)$  и, следовательно, данная игра в классе  $\Sigma_S$  имеет значение. Теорема доказана.

Обобщим этот результат.

**Теорема 1.** Пусть множества  $S, A_i$  и  $B_i (i \in S)$  конечны. Тогда общая марковская игра  $\Gamma G = \langle \Pi, \Phi, G(\pi, \varphi) \rangle$  имеет значение, а оба игрока –  $\epsilon$ -оптимальные стационарные стратегии, т. е.

$$v(\Gamma G) = \bar{v}(\Gamma G) = \underline{v}(\Gamma G) = \bar{v}(\gamma G) = \underline{v}(\gamma G) = v(\gamma G).$$

Доказательство. Определим  $G^+(\pi, \varphi)$  и  $G^-(\pi, \varphi)$  как верхний и нижний пределы последовательности  $\{G_n(\pi, \varphi), n \geq 1\}$ . Согласно результату Брауна (см. [6, с. 92–93]) в случае фиксированной стратегии  $y \in Y$  игрока II:

$$\max_{\pi \in \Pi} G^+(\pi, y) = \max_{\pi \in \Pi} G^-(\pi, y) = \max_{x \in X} G(x, y).$$

Аналогично для фиксированной стратегии  $x \in X$  игрока I:

$$\min_{\varphi \in \Phi} G^+(x, \varphi) = \min_{\varphi \in \Phi} G^-(x, \varphi) = \min_{y \in Y} G(x, y).$$

Учитывая, что в рассматриваемой игре знаки sup (inf) и max (min) равнозначны, имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}(\Gamma G) &= \max_{\pi \in \Pi} \min_{\varphi \in \Phi} G(\pi, \varphi) \geq \max_{x \in X} \min_{\varphi \in \Phi} G(x, \varphi) \geq \\ &\geq \max_{x \in X} \min_{y \in Y} G(x, y) \geq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} G(x, y) \geq \\ &\geq \min_{y \in Y} \max_{\pi \in \Pi} G(\pi, y) \geq \min_{\varphi \in \Phi} \max_{\pi \in \Pi} G(\pi, \varphi) = \underline{v}(\Gamma G). \end{aligned} \tag{3}$$

Поскольку  $\bar{v}(\Gamma G) \geq \underline{v}(\Gamma G)$ , все неравенства (3) на самом деле являются равенствами, что и доказывает теорему.

Согласно доказательству теоремы 1 при достаточной близости коэффициента  $\beta$  к 1 ситуация равновесия  $(x^*, y^*) \in \Sigma_\varepsilon$  игры с переоценкой  $\Gamma G_\beta = \langle \Pi, \Phi, G_\beta(\pi, \varphi) \rangle$  является ситуацией  $\varepsilon$ -равновесия общей марковской игры  $\Gamma G$ . Для марковской игры с переоценкой с бесконечным числом шагов  $\Gamma W_\beta = \langle \Pi, \Phi, W_\beta^\infty(\pi, \varphi) \rangle$  имеет место функциональное уравнение преобразования цен [2]

$$w_i^n = \text{val} \left[ h_i^{kr} + \beta \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kr} w_j^{n-1} \right], i \in S, n \geq 1,$$

где  $w_i^0 = 0, i \in S$ .

Умножим обе части исходного равенства на  $1-\beta$  и в полученном соотношении положим  $g_i^n = (1-\beta)w_i^n$ .

В результате имеем

$$g_i^n = \text{val} [(1-\beta)h_i^{kr} + \beta \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kr} g_j^{n-1}], i \in S, n \geq 1, \tag{4}$$

где  $g_i^0 = 0, i \in S$ .

Последовательность векторов  $g^n = (g_1^n, g_2^n, \dots, g_N^n)^T$  при  $n \rightarrow \infty$  сходится к значению игры с переоценкой в стационарном режиме  $g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T = v(\gamma G_\beta) = (1-\beta)v(\gamma W_\beta)$ . Оптимальные стационарные стратегии игроков  $x^*$  и  $y^*$  определяются путем решения матричных игр

$$g_i = \text{val} [(1-\beta)h_i^{kr} + \beta \sum_{j=1}^N p_{ij}^{kr} g_j], 1 \leq i \leq N. \tag{5}$$

Для заданного  $\varepsilon > 0$  значение общей марковской игры  $\Gamma G$  определяется с помощью рекуррентного соотношения (4), постепенно приближая коэффициента  $\beta$  к 1.

**4. Пример. Марковская игра «Большой матч».** Полученные результаты применим к игре «Большой матч», задаваемой тремя игр-компонентами [3, 4, 7–9]:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 1 + \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_3 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = [\Gamma_2], \Gamma_3 = [1 + \Gamma_3].$$

Применение функционального уравнения (5) к играм-компонентам  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  дает

$$\begin{cases} g_1 = \text{val} \begin{bmatrix} (1-\beta) + \beta g_1 & \beta g_2 \\ \beta g_1 & \beta g_3 \end{bmatrix}, \\ g_2 = \beta g_2, \\ g_3 = (1-\beta) + \beta g_3. \end{cases} \tag{6}$$

Из 2-го и 3-го уравнения получаем  $g_2 = 0, g_3 = 1$ . Подставив эти значения в 1-ое уравнение системы (6), имеем

$$g_1 = \text{val} \begin{bmatrix} (1-\beta) + \beta g_1 & 0 \\ \beta g_1 & \beta \end{bmatrix}.$$

Решая эту 2x2-игру (см. [9, с. 45]), находим значение данной игры  $\Gamma G_\beta$  и оптимальные стратегии игроков

$$g_1 = g_1(\beta) = \frac{\beta}{1+\beta}, \xi^* = \frac{\beta}{1+\beta}, \eta^* = \beta.$$

Отсюда можем определить значение игры «Большой матч»

$$g_1^* = \lim_{\beta \rightarrow 1-0} g_1(\beta) = 1/2$$

и  $\varepsilon$ -оптимальные стратегии игроков

$$x_\varepsilon = \left( \frac{1-\varepsilon}{2-\varepsilon}, \frac{1}{2-\varepsilon} \right), y_\varepsilon = (1-\varepsilon, \varepsilon),$$

где  $\varepsilon = 1 - \beta$ .

Заметим, что игрок I кроме  $\varepsilon$ -оптимальной стратегии  $x_\varepsilon$  имеет также оптимальную стратегию  $x_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = (1/2, 1/2)$ . В то же время игрок II имеет лишь  $\varepsilon$ -оптимальную стратегию  $y_\varepsilon$ , так как  $y_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_\varepsilon = (1, 0)$  не оптимальна, ибо  $g_1(x', y) = 1$  при стратегии  $x' = (1, 0)$  игрока II.

Литература:

1. Льюс, Р.Д., Райфа Х. Игры и решения. Введение и критический обзор. М.: Изд. иностр. литературы, 1961. 642 с.
2. Ибрагимов, А. А. О существовании и единственности ситуации равновесия в марковских играх с переоценкой // НАН Украины. Кибернетика и системный анализ. 2000. № 6. с. 152–165.
3. Ибрагимов, А. А. Марковские игры с несколькими эргодическими классами // Украинский математический журнал. 2003. Т 55. № 6. с. 466–471.
4. Ибрагимов, А. А. Существование значения в общих марковских играх // Известия РАН. Теория системы управления. 2004. № 2. с. 5–15.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 2. М.: Наука. 800 с.
6. Майн, Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 176 с.
7. Ибрагимов, А. А. О марковской игре «большой матч» // РАН. Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. с. 104–113.
8. Ибрагимов, А. А. Марковская игра «Большой матч» в классе стационарных стратегий // Журнал «Молодой ученый» № 4 (84), март, 2015 г. Москва. с. 4–7.
9. Дюбин, Г.Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981. 336 с.

### Обобщенная марковская игра «Большой матч»

Ибрагимов Абдуфаттах Абдурашидович, кандидат технических наук, доцент  
Ташкентский институт ирригации и мелиорации (Узбекистан)

Марковская игра «Большой матч» изучена в обобщенной форме.

**1. Обобщенный большой матч.** Марковская игра «Большой матч», как представитель марковской игры с конечным множеством состояний и конечными множествами решений игроков и критерием предельного среднего выигрыша первого игрока, изучена в работах [1–7]. Представляет интерес, так называемая, обобщенная марковская игра «Большой матч» или «обобщенный большой матч» (сокращенно ОБМ), задаваемой тремя игр-компонентами:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} a + \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_3 \end{bmatrix}, \Gamma_2 = [b + \Gamma_2], \Gamma_3 = [c + \Gamma_3], \tag{1}$$

где матрица  $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$  представляет собой  $i$ -е состояние игры ОБМ;  $a, b, c$  – числа. В случае  $a = c = 1, b = 0$  имеет место игра «Большой матч»

Процесс разыгрывания игры ОБМ состоит в следующем. На первом шаге в состоянии  $\Gamma_1$  игроки I и II независимо друг от друга выбирают строку  $i$  и столбца  $j$  соответственно. В результате складывается ситуация  $(i, j)$ . После чего согласно элементу  $\gamma_{ij}$  формальной матрицы  $\Gamma_1$  определяется выигрыш игрока I и следующее состояние игры. Так, например, при ситуации  $(1, 1)$   $\gamma_{11} = a + \Gamma_1$  и игрок II платит игроку I  $a$  единицу и следующим состоянием игры будет снова  $\Gamma_1$ . Состояния  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  являются поглощающими, ибо, попадая в одно из них, игра останется в нем навсегда. На каждом шаге игры игроки оглашают свои решения с помощью монеты. Показ герба ( $G$ ) означает, что игрок I (II) выбрал первую строку (первый столбец), а показ решетки ( $P$ )— вторую строку (второй столбец).

Введем обозначения:  $\xi_n (\eta_n)$  — решающая функция, представляющая собой вероятность выбора решения «герб» игроком I (II) на  $n$ -м шаге игры;  $\pi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$  — стратегия игрока I;  $\varphi = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n, \dots)$  — стратегия игрока II;  $\xi^\infty = (\xi, \xi, \dots, \xi, \dots), \eta^\infty = (\eta, \eta, \dots, \eta, \dots)$  — стационарные стратегии игроков I и II, соответственно;  $w_1^\infty(\pi, \varphi)$  — сред-

ний суммарный выигрыш игрока I за  $n$  шагов при стратегиях игроков  $\pi$  и  $\varphi$  и начальном состоянии  $\Gamma_1$ ;  $g_1^n(\pi, \varphi) = w_1^n(\pi, \varphi)/n$  — средний выигрыш игрока I за один шаг в  $n$  шаговом игре при  $\pi$  и  $\varphi$  и начальном состоянии  $\Gamma_1$ . Стратегии игроков  $\pi^*$  и  $\varphi^*$  оптимальны, если справедливо двойное неравенство  $g_1^n(\pi^*, \varphi) \geq g_1^n(\pi^*, \varphi^*) \geq g_1^n(\pi, \varphi^*)$  для всех  $n \geq 1$  и произвольных  $\pi$  и  $\varphi$ .

2. **Целевая функция игры ОБМ в классе стационарных стратегий.** Представим в явном виде целевую функцию  $g_1^n(\xi^\infty, \eta^\infty)$ . Согласно игр-компонентам (1) игра ОБМ, как марковская игра, характеризуется следующими данными

Состояние	Ситуация	Вероятность перехода			Выигрыш
		$p_{i1}^{kr}$	$p_{i2}^{kr}$	$p_{i3}^{kr}$	
$i$	$(k, r)$				$h_i^{kr}$
1	(1, 1)	1	0	0	$a$
	(1, 2)	0	1	0	0
	(2, 1)	1	0	0	0
	(2, 2)	1	0	1	0
2	(1, 1)	0	1	0	$b$
3	(1, 1)	0	0	1	$c$

Пусть игра ОБМ находится в состоянии 1. Иначе говоря, пусть разыгрывается игровая компонента  $\Gamma_1$ . При стратегиях игроков  $(\xi, 1 - \xi)$  и  $(\eta, 1 - \eta)$  вероятность остаться в игровой компоненте  $\Gamma_1$  равна  $\xi\eta + (1 - \xi)\eta = \eta$ . Вероятности перехода из  $\Gamma_1$  в  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  соответственно равны  $\xi(1 - \eta)$  и  $(1 - \xi)(1 - \eta)$ . Следовательно, матрица  $P(\xi, \eta)$  имеет вид

$$P(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \eta & \xi(1 - \eta) & (1 - \xi)(1 - \eta) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отсюда получим матрицу вероятностей перехода за  $n$  шагов и вектор ожидаемых выигрышей игрока I:

$$P^n(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \eta^n & \xi(1 - \eta^n) & (1 - \xi)(1 - \eta^n) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$H(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \xi\eta a + \xi(1 - \eta)b + (1 - \xi)(1 - \eta)c \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$g_1^n(\xi^\infty, \eta^\infty) = \sigma_n [\xi\eta a + \xi(1 - \eta)b + (1 - \xi)(1 - \eta)c] + \xi(1 - \sigma_n)b + (1 - \xi)(1 - \sigma_n)c,$$

где  $\sigma_n = (1 + \eta + \eta^2 + \dots + \eta^{n-1}) / n$ .

Условимся обозначать через  $\sigma_\infty$  величину  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$ . Тогда, целевая функция  $g_1^*(\xi^\infty, \eta^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_1^n(\xi^\infty, \eta^\infty)$  игры ОБМ с бесконечным числом шагов в классе стационарных стратегий имеет вид

$$g_1^*(\xi^\infty, \eta^\infty) = \sigma_\infty [\xi\eta a + \xi(1 - \eta)b + (1 - \xi)(1 - \eta)c] + \xi(1 - \sigma_\infty)b + (1 - \xi)(1 - \sigma_\infty)c. \tag{2}$$

3. **Метод последовательных приближений.** Оптимальные стратегии игроков  $\pi^*$  и  $\varphi^*$  и значение  $g_1^n(\pi^*, \varphi^*)$  игры ОБМ с конечным числом шагов  $n$  могут быть определены с помощью модифицированного функционального уравнения преобразования цен (см. [4, 5]), которое для игр-компонент (1) принимает вид:

$$\begin{cases} g_1^n = \text{val} \begin{bmatrix} \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} g_1^{n-1} & \frac{n-1}{n} g_2^{n-1} \\ \frac{n-1}{n} g_1^{n-1} & \frac{n-1}{n} g_3^{n-1} \end{bmatrix}, \\ g_2^n = \frac{b}{n} + \frac{n-1}{n} g_2^{n-1}, \\ g_3^n = \frac{c}{n} + \frac{n-1}{n} g_3^{n-1}, \end{cases} \tag{3}$$

где  $g_i^0 = 0, i = 1, 2, 3; n \geq 1$ .

Из 2-го и 3-го уравнения получаем  $g_2^n = b, g_3^n = c$ . Подставив эти значения в 1-ое уравнение системы (3), имеем

$$g_1^n = \text{val} \begin{bmatrix} \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} g_1^{n-1} & \frac{n-1}{n} b \\ \frac{n-1}{n} g_1^{n-1} & \frac{n-1}{n} c \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Решая эту 2x2-игру (см. [8, с. 45]), находим значение  $g_1^n(\pi^*, \varphi^*)$  игры ОБМ и оптимальные стратегии игроков  $\pi^* = (\xi_n^*, \xi_{n-1}^*, \dots, \xi_1^*), \varphi^* = (\eta_n^*, \eta_{n-1}^*, \dots, \eta_1^*)$  для конечного  $n$ .

Рекуррентные соотношения (3) могут быть использованы для решения ОБМ с бесконечным числом шагов. Именно, при  $n \rightarrow \infty$  (4) дает значения игры  $g_1^*$ , а  $\varepsilon$ -оптимальные стационарные стратегии игроков  $\xi_\varepsilon^\infty = \xi_n^{*\infty}, \eta_\varepsilon^\infty = \eta_n^{*\infty}$  достигаются за конечное число шагов  $n$ .

Между тем, специфическая особенность игры ОБМ позволяет решить данную задачу более простым путем. Так, положив в (4)  $\varepsilon = 1/n$  и записав вместо величины  $g_1^n$  искомое ее предельное значение  $g_1^*$  получим уравнение относительно  $g_1^*$

$$g_1^* = \text{val} \begin{bmatrix} \varepsilon a + (1 - \varepsilon)g_1^* & (1 - \varepsilon)b \\ (1 - \varepsilon)g_1^* & (1 - \varepsilon)c \end{bmatrix} \tag{5}$$

Решая эту 2x2-игру, находим значение  $g_1^*$  игры ОБМ и  $\varepsilon$ -оптимальные стационарные стратегии игроков:

$$g_1^*(\varepsilon) = \frac{(1-\varepsilon)ac}{a-(1-\varepsilon)b+(1-\varepsilon)c} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{ac}{a-b+c} = g_1^* \tag{6}$$

$$\xi_\varepsilon = \frac{(1-\varepsilon)c}{a-(1-\varepsilon)b+(1-\varepsilon)c} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{c}{a-b+c} = \xi_0^* \tag{7}$$

$$\eta_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon a}{\varepsilon a - (1-\varepsilon)b + (1-\varepsilon)c} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 = \eta_0^* \tag{8}$$

Заметим, что если в (2) подставить  $\xi = \xi_0^*$  и  $\eta = \eta_\varepsilon$ , то получится  $g_1^*(\xi_0^*, \eta_\varepsilon^\infty) = g_1^*$ .

Следует отметить, что при  $a = c = 1, b = 0$  получим результаты, соответствующие игре «Большой матч» (см. [4–7]):  $g_1^* = 1/2, \xi^* = 1/2, \eta_\varepsilon = 1 - \varepsilon$ .

**4. Метод аппроксимации ОБМ игрой с переоценкой.** Для изучения и решения ОБМ с бесконечным числом шагов наиболее подходящим методом является аппроксимация ОБМ соответствующей игрой с переоценкой. В этом случае функция выигрыша имеет вид  $g_i^n(\pi, \varphi) = (1 - \beta)w_i^n(\pi, \varphi)$ , где  $\beta \in [0, 1)$  – коэффициент переоценки.

Исходя из результатов, изложенных в [9] для данных игр-компонент (1) имеют место следующие рекуррентные соотношения

$$\begin{cases} g_1^n = \text{val} \begin{bmatrix} (1 - \beta)a + \beta g_1^{n-1} & \beta g_2^{n-1} \\ \beta g_1^{n-1} & \beta g_3^{n-1} \end{bmatrix}, \\ g_2^n = (1 - \beta)b + \beta g_2^{n-1}, \\ g_3^n = (1 - \beta)c + \beta g_3^{n-1}, \end{cases} \tag{9}$$

где  $g_i^0 = 0, i = 1, 2, 3; n \geq 1$ .

Рекуррентные соотношения (9) позволяют решить игру ОБМ с переоценкой. Именно, при  $n \rightarrow \infty$  (9) дает значения игры  $g_1^n(\beta)$  и  $\beta$ -оптимальные стационарные стратегии игроков  $\xi_\beta^\infty, \eta_\beta^\infty$ . Здесь, записав вместо величин  $g_1^n, g_2^n, g_3^n$  искомые их предельные значения  $g_1, g_2, g_3$  имеем

$$\begin{cases} g_1 = \text{val} \begin{bmatrix} (1 - \beta)a + \beta g_1 & \beta g_2 \\ \beta g_1 & \beta g_3 \end{bmatrix}, \\ g_2 = (1 - \beta)b + \beta g_2, \\ g_3 = (1 - \beta)c + \beta g_3. \end{cases} \tag{10}$$

Из 2-го и 3-го уравнения получаем  $g_2 = b, g_3 = c$ . Подставив эти значения в 1-ое уравнение системы (10), имеем

$$g_1 = \text{val} \begin{bmatrix} (1 - \beta)a + \beta g_1 & \beta b \\ \beta g_1 & \beta c \end{bmatrix}.$$

Здесь, если положить  $\varepsilon = 1 - \beta$ , то данное уравнение принимает вид

$$g_1 = \text{val} \begin{bmatrix} \varepsilon a + (1 - \varepsilon)g_1 & (1 - \varepsilon)b \\ (1 - \varepsilon)g_1 & (1 - \varepsilon)c \end{bmatrix},$$

которое ничем не отличается от уравнения (4).

Эти факты показывают насколько тесно связаны рекуррентные соотношения (3) и (9).

**5. ОБМ – принятия решений в условиях риска.** В случае, когда  $a$  и  $b$  больше  $c$  игра ОБМ имеет тривиальное решение. В этом случае, в игровой компоненте  $\Gamma_1$  1-я строка доминирует 2-ую строку и игрок I с вероятностью 1 принимает решение  $\Gamma$  ( $\xi = 1$ ). Тогда игрок II выбирает решение  $\Gamma$  ( $\eta = 1$ ) и цена игры  $g_1^* = a$ , если  $a \leq b$ ; – решение  $P$  ( $\eta = 0$ ) и цена игры  $g_1^* = b$ , если  $a > b$ . Так же тривиально решается случай, когда  $a$  и  $b$  меньше  $c$ .

Заслуживает внимание случай, когда одно из чисел  $a$  и  $b$  больше  $c$ , а другое меньше  $c$ . Пусть  $a \geq c$ ,  $a < b$ . В этом случае решение  $\Gamma$  игрока II связано с определенным риском. Здесь, игрок II может принимать решение  $P$  и игра переходит во 2-ое состояние и игрок II платит игроку I  $b$  единиц (если  $b$  отрицательно, то игрок I платит игроку II  $b$  единиц) на каждом шаге игры.

Характерной особенностью игры ОБМ является то, что только при решении  $P$  игрока II игра может покинуть состояние  $\Gamma_1$ . При разыгрывании игры ОБМ этим обстоятельством игрок II может воспользоваться разумным образом. Играв достаточно длительное время «герб» игрок II сначала изучает поведение игрока I, т. е. следит за статистикой  $W_n = m/n$ , где  $m$  – число «гербов» принимаемых игроком I за  $n$  шагов игры. Если  $W_n > \xi_0^*$  (6), то игрок II наверняка будет выбрать «решетку» и выигрыш игрока будет меньше, чем цена игры  $g_1^*$  (5). Если  $W_n \leq \xi_0^*$ , то решение «герб» остается неизменным на последующих шагах игры и выигрыш игрока II не больше, чем цена игры  $g_1^*$ . Такая адаптивная стратегия игрока II вполне приемлема при разыгрывании игры ОБМ. При этом игроку II целесообразно воспользоваться методом принятия решений в условиях риска, изложенным в [10].

Конечно, лучше всего игроку II воспользоваться случайным механизмом, обеспечивающим ему проигрыш не больше, чем цена игры  $g_1^*$ , аналогичным случайному механизму  $T(m, k)$ , изложенному в [7]. Но этот вопрос является темой другой статьи. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением двух частных случаев:

$$1) a = 2, b = 0, c = 1. \text{ Согласно (6)–(8) } g_1^* = 2/3, \xi_0^* = 1/3, \eta_\varepsilon = 1 - \frac{2\varepsilon}{\varepsilon+1}.$$

Целевая функция (2) примет вид

$$g_1^*(\xi^\infty, \eta^\infty) = 2\sigma_\infty \xi + (1 - \xi)(1 - \sigma_\infty).$$

Здесь, при  $\xi = 1/3$   $g_1^* = 2/3$  независимо от значения  $\sigma_\infty$ , при  $\sigma_\infty = 1/3$   $g_1^* = 2/3$  независимо от значения  $\xi$ . Так что, в случайном механизме  $T(m, k)$  дробь  $m/k$  может быть выбрана так, что  $m/k \approx \ln 3$  с любой точностью. Тогда обеспечивается равенство  $\sigma_\infty = 1/3$  с заданной точностью и случайный механизм  $T(m, k)$  может быть использован игроком II при разыгрывании рассматриваемой игры ОБМ.

$$2) a = 1, b = 0, c = 2. \text{ Согласно (6)–(8) } g_1^* = 2/3, \xi_0^* = 2/3, \eta_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2\varepsilon-1}.$$

Целевая функция (2) примет вид

$$g_1^*(\xi^\infty, \eta^\infty) = \sigma_\infty \xi + 2(1 - \xi)(1 - \sigma_\infty).$$

Здесь, при  $\xi = 2/3$   $g_1^* = 2/3$  независимо от значения  $\sigma_\infty$ , при  $\sigma_\infty = 2/3$   $g_1^* = 2/3$  независимо от значения  $\xi$ . Так что, в случайном механизме  $T(m, k)$  дробь  $m/k$  может быть выбрана так, что  $m/k \approx \ln \frac{3}{2}$  с любой точностью. Тогда обеспечивается равенство  $\sigma_\infty = 2/3$  с заданной точностью и случайный механизм  $T(m, k)$  может быть использован игроком II при разыгрывании рассматриваемой игры ОБМ.

#### Литература:

1. Gillette, D. Stochastic games with zero stop probabilities // Contributions to the Theory of Games. V. III / Dresher M. Princeton, Univ. Press., 1957. Ann. Math. Studies № 39.
2. Blackwell, D. The big Match // STAM J. Appl / Math. 1970. № 19. P. 473–476.
3. Ибрагимов, А. А. О марковской игре «большой матч» // РАН. Автоматика и телемеханика. 2000. № 11. с. 104–113.
4. Ибрагимов, А. А. Марковские игры с несколькими эргодическими классами // Украинский математический журнал. 2003. Т. 55. № 6. с. 762–778.
5. Ибрагимов, А. А. Существование значения в общих марковских играх // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 2. с. 5–15.
6. Ибрагимов, А. А. Оптимальные действия сторон в большом матче // VI Междуна-родная конференция MMR 2009 — Математические методы в теории надежности (Москва, 22–29 июня 2009 г.). Расширенные тезисы докладов. с. 256–260.
7. Ибрагимов, А. А. Марковская игра «Большой матч» в классе стационарных стратегий // Журнал «Молодой ученый» № 4 (84), март, 2015 г. Москва. с. 4–7.
8. Дюбин, Г. Н., Суздаль В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981. 336 с.
9. Ибрагимов, А. А. Решение общей марковской игры путем аппроксимации ее игрой с переоценкой // Журнал «Молодой ученый» № 13 (117), июль-1, 2016 г. Москва.
10. Ибрагимов, А. А. Построение функции полезности для статистической задачи решения с входной платой // Узбекский журнал «Проблемы информатики и энергетики». 1997. № 5. с. 3–8.

## Метод двухмасштабного разложения решения интегро-дифференциального уравнения с малым параметром

Кадырбеков Турап Кадырбекович, кандидат физико-математических наук, доцент;  
Хидоятова Муяссар Атхамовна, ассистент  
Ташкентский институт ирригации и мелиорации (Узбекистан)

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром.

$$x + x = \varepsilon f \left( x, x \int_0^t R(t-s) \varphi(x(s), x(s)) ds \right) \dots \tag{1}$$

где  $\varepsilon > 0$  малый параметр  $x = \frac{dx}{dt}$ ,  $x = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $f(x, y, z)$  некоторая непрерывная функция своих аргументов.

$$y = x = \frac{dx}{dt}, z = \int_0^t R(t-s) \varphi(x(s), x(s)) ds, R(t) - \text{ядро}$$

Согласно методу двух масштабного разложения ищем решение уравнение (1) в виде асимптотического ряда [1,2]

$$x(t, \tau, \varepsilon) = x_0(t, \tau) + \varepsilon x_1(t, \tau) + \varepsilon^2 x_2(t, \tau) + \dots, \tag{2}$$

$$\text{где } t = t, \tau = (\varepsilon + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots) t \tag{3}$$

Постоянные  $\omega_i (i = 2, 3, \dots)$  определяем из условия ограниченности решений

Поставляя значения  $t$  и  $\tau$  определяемые равенствами (3) в правую часть разложения (2) находим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x_0}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \tau} (\varepsilon + \varepsilon^2 \omega_2) + \varepsilon \frac{\partial x}{\partial \tau} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + 0(\varepsilon^3) \tag{4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial t^2} + \varepsilon \left( \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \tau} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + 2 \omega \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} \right) + 0(\varepsilon^3) \tag{5}$$

Далее разложая функцию  $\varepsilon \cdot f(x, y, z)$  в ряд по степеням  $\varepsilon$  имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \cdot f \left( x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \frac{\partial x_0}{\partial t} + \varepsilon \left( \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x}{\partial \tau} \right) + \varepsilon^2 \left( \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + \dots \right) \\ & \int_0^t R(t-s) \varphi \left( x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots, \frac{\partial x_0}{\partial t} + \varepsilon \left( \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \left( \omega_2 \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial \tau} + \frac{\partial x_2}{\partial t} \right) + \dots \right) ds = \\ & \varepsilon \cdot f \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \varphi \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) + \varepsilon^2 \cdot f_x \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \varphi \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) x_1 + \\ & + \varepsilon^2 \cdot f \int_x^1 \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \varphi \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) \left( \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + \varepsilon^2 \cdot \int_t^1 \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \varphi \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) \\ & \int_0^t R(t-s) \left[ \varphi_{1x} \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) x_1 + \int_x^1 \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) \right] ds + 0(\varepsilon^3) \end{aligned} \tag{6}$$

Поставляя соотношения (2), (5), и (6) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты пари одинаковых степеней фф получаем



$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_0 = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = -2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \tau} + f \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \rho \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + x_2 = & - \left[ \frac{\partial^2 x_0}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial t \partial \tau} \omega_2 + \frac{\partial^2 x_1}{\partial t \partial \tau} \right] + f_x^1 \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \rho \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) x_1 + \\ & + f_x^1 \left( x_0, \frac{\partial x_0}{\partial t} \int_0^t R(t-s) \rho \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds \right) \left( \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right) + f_x^1 R(t-s) \rho \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) ds x \\ & x \int_0^t R(t-s) \left[ \varphi_x^1 \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) x_1 + \varphi_x^1 \left( x_0 \frac{\partial x_0}{\partial t} \right) \frac{\partial x_0}{\partial \tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t} \right] ds \end{aligned} \tag{9}$$

Вводя медленно меняющуюся амплитуду  $a = a(\tau)$  и фазу  $\psi = \psi(\tau)$  из уравнения (7) находим

$$x_0 = a(\tau) \cos(t + \psi(\tau)) \tag{10}$$

Поставляя выражение 10 в правую часть уравнения (8) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + x_1 = & 2 \left[ \frac{da}{d\tau} \sin(t + \psi) + a(\tau) \frac{d\psi}{d\tau} \cos(t + \psi) \right] + \\ & + f(a\tau) \cos(t + \psi(\tau)) - a(\tau) \sin(t + \psi(\tau)), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\int_0^1 R(t-s) \rho \left[ a(\tau(s)) \cos(t(s) + \psi(\tau(s))), -a(\tau(s)) \sin(t(s) + \psi(\tau(s))) \right] ds$$

Чтобы исключить появление пекулярных (вековых) членов разложения, необходимо положить [3]

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\tau} = & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \chi - a \sin \chi) + \int_0^1 R(t-s) \rho(a(\tau(s)) \cos \chi(s)), \\ & - a(\tau(s)) \sin \chi(s) ds \sin \chi d\chi = P_1(a), \\ a \frac{d\psi}{d\tau} = & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a \cos \chi - a \sin \chi) \\ & \int_0^1 R(t-s) \rho(a(\tau(s)) \cos \chi(s) + \psi(\tau(s)), -a(\tau(s)) \sin \chi(s) ds \cos \chi d\chi = Q_1(a), \end{aligned} \tag{12}$$

где  $\chi = t + \psi(\tau)$ .

Так как  $\frac{\partial x_1}{\partial t} = \frac{\partial x_1}{\partial \chi} \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau}$  те переходя в уравнении (II) к переменной  $\chi$ , получаем

$$a \frac{\partial^2 x_1}{\partial \chi^2} + x_1 = 2[P_1(a) \sin \chi + Q_1(a) \cos \chi] + f(a \cos \chi, \tag{13}$$

$$a \sin \chi, \int_0^1 R(t-s) \rho(a(s) \cos \chi(s) - a(s) \sin \chi(s)) ds \tag{14}$$

Определим функции  $a^{(1)}(a, \chi)$  и  $\theta^{(1)}(a, \chi)$  посредством соотношений.

$$\frac{\partial a^{(1)}}{\partial \chi} = -f \left( a \cos \chi - a \sin \chi, \int_0^1 R(t-s) \rho[a(s) \cos \chi(s) - a(s) \sin \chi(s)] ds \right) \sin \chi - P_1(a) \tag{15}$$

$$a \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \chi} = -f \left( a \cos \chi - a \sin \chi, \int_0^1 R(t-s) \varphi[(a(s) \cos \chi(s) - a(s) \sin \chi(s)) ds] ds \right) \cos \chi - Q_1(a) \tag{16}$$

$$\int_0^{2\pi} a^{(1)}(a, \chi) d\chi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \theta^{(1)}(a, \chi) d\chi = 0$$

Тогда из уравнения (13) методом вариации параметров, находим

$$x_1 = [D_1(\tau) + a^{(1)}(a, \chi)] \cos \chi + [E_1(\tau) - a \theta^{(1)}(a, \chi)] \sin \chi, \tag{17}$$

где  $D_1(\tau), E_1(\tau)$  — медленно меняющиеся функции, определяемые из условия отсутствия вековых членов в выражениях для  $x_2(t, \tau)$ .

Подставляя равенства (10) и (17) в правую часть уравнения (9) и используя условия отсутствия сингулярных членов в разложениях, находим для определения  $D_1(\tau)$  и  $E_1(\tau)$  уравнения в виде [3, 4]

$$\frac{dD}{d\tau} - \frac{dP_1}{da} D_1 = P_2(a) - \omega_2 P_1(a) \tag{18}$$

$$\frac{dE_1}{d\tau} - \frac{P_1(a)}{a} E_1 + \left[ \frac{dQ_1(a)}{da} - \frac{Q_1(a)}{a} \right] D_1 = Q_2(a) + \omega_2 Q_1(a),$$

$$P_2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ a^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial f_0}{\partial a} + \theta^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial f_0}{\partial \chi} + \right. \\ \left. + \phi_0(a, \chi) \int_0^1 R(t-s) \left[ a^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial \varphi_0}{\partial a} + \theta^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \chi} \right] ds \right\} \sin \chi d\chi,$$

$$Q_2(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ a^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial f_0}{\partial a} + \theta^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial f_0}{\partial \chi} + \right. \\ \left. + \phi_0(a, \chi) \int_0^1 R(t-s) \left[ a^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial \varphi_0}{\partial a} + \theta^{(1)}(a, \chi) \frac{\partial \varphi_0}{\partial \chi} \right] ds \right\} \cos \chi d\chi,$$

$$f_0(a, \chi) = f \left( a \cos \chi, -a \sin \chi, \int_0^1 R(t-s) \varphi(a \cos \chi, -a \sin \chi) ds \right)$$

$$\varphi_0(a, \chi) = \varphi(a \cos \chi, -a \sin \chi),$$

$$\phi_0(a, \chi) = \frac{\partial}{\partial z} f \left( a \cos \chi, -a \sin \chi, \int_0^1 R(t-s) \varphi(a \cos \chi, -a \sin \chi) ds \right)$$

Из системы уравнений (18) следует, что если  $P_1(a) = 0$ , то необходимо положить  $P_2(a) = 0$  так как в противном случае разложение имело бы сингулярные члены. Предположив, что  $P_1(a) \neq 0$ , из системы (18) найдем медленно меняющиеся функции  $D_1(\tau)$  и  $E_1(\tau)$ .

Таким образом, определяются остальные последующие члены разложения (2). Следовательно, при вычислении члена  $x_1$  нужно учитывать вид решения  $x_{i+1}$  а также равномерную пригодность  $x_0$  и  $x_{i+1} (i = 0, 1, \dots)$  на достаточно большом промежутке времени. Итак используя соотношения (2), (4) формуле (10) и выражение (17) имеем

$$x(a, \chi, \varepsilon) = a \cos \chi + \varepsilon [D_1(\tau) + a^{(1)}(a, \chi)] \cos \chi + [E_1(\tau) - a \theta^{(1)}(a, \chi)] \sin \chi + \dots$$

Литература:

1. Самойленко, А. М. «К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем» // Дифференциальные уравнения. 1987. № 23 стр. 276–278
2. Бигун, Я. Н., Форчук В. И. «применение метода усреднения для исследования одного класса многочастотного систем с запаздыванием» // Укр. Мат. Журнал 1980 № 2 стр. 149–164.
3. Филатов, А. Н. «Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений». Ташкент Фан, АН УзССР, 1974 г.
4. Кадырбеков, Т. К. «Нелинейные колебания вязкоупругой балки. Механика полимеров». Рига. 1973 г.
- 5.
- 6.

### Декомпозиция линейной модели квадрокоптера

Колотов Михаил Евгеньевич, бакалавр;  
Смирнова Татьяна Александровна, бакалавр  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В статье предложен авторский вариант декомпозиции линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей динамику квадрокоптера, упрощающий последующий анализ модели и синтез системы управления. Данный подход позволяет преобразовать сложную MIMO-систему в 6 независимых SISO-подсистем.*

**Ключевые слова:** квадрокоптер, системы управления, декомпозиция, пространство состояний

В настоящее время сфера применения беспилотных летательных аппаратов (далее БПЛА) в жизнедеятельности человека неуклонно расширяется. Так, ни одна современная военная операция не происходит без предварительной разведки с применением БПЛА. Крупные интернет-магазины уже используют дронов-курьеров в штатном режиме. Обыкновенному же пользователю БПЛА могут предложить возможность проведения качественной фото- или видеосъемки любого события по вполне приемлемым ценам. В данной статье будет рассмотрена математическая модель БПЛА с четырьмя несущими винтами, вращающимися в диагонально противоположных направлениях. Данная математическая модель основана на системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получена путем линеаризации системы, выведенной в [1]. Так как синтез системы управления и анализ модели значительно упрощается при работе с SISO-системами (Single-Input Single-Output), по сравнению с MIMO-системами (Multiple-Input Multiple-Output), работа посвящена декомпозиции линейной MIMO-системы на несколько SISO-подсистем.

Основным объектом данной работы является система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная из модели динамики квадрокоптера вида (1), представленной в [1], путем линеаризации в окрестности положения равновесия (2).

$$\ddot{\vec{X}} = F(\vec{X}, \dot{\vec{X}}, U). \tag{1}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}, \\ U = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_0 \\ u_0 \end{bmatrix}. \end{cases} \right\} \quad (2)$$

Где управляющий сигнал  $u_i$  представляет собой квадрат угловой скорости винта  $i$ -го мотора квадрокоптера,  $[x \ y \ z]^T$  — координаты центра масс квадрокоптера в абсолютной системе координат,  $[\varphi \ \theta \ \psi]^T$  — углы Эйлера, представляющие собой ориентацию квадрокоптера (крен, тангаж и рысканье соответственно). Значение  $u_0$  находится из уравнения вертикальной динамики квадрокоптера с допущением, что при данной величине управляющего сигнала БПЛА висит в воздухе неподвижно (по оси  $z$ ) в горизонтальном положении:

$$\begin{cases} \ddot{z} = 0 \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Таким образом, значение управляющего сигнала  $u_0$  определяется как

$$u_0 = \frac{mg}{4k},$$

где  $m$  — масса квадрокоптера,  $g$  — сила тяжести и  $k$  — коэффициент тяги моторов. Подробнее с исходной нелинейной моделью квадрокоптера (а так же с ее выводом) вы можете ознакомиться в [1].

Для линеаризации системы разложим правую часть системы в отклонения от положения равновесия в ряд Тейлора как функцию нескольких переменных и отбросим нелинейные слагаемые. В результате получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g\theta - \frac{A_x}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} = -g\varphi - \frac{A_y}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} = \frac{k}{m}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) - \frac{A_z}{m} \dot{z} \\ \ddot{\varphi} = \frac{kl}{I_{xx}}(u_4 - u_2) \\ \ddot{\theta} = \frac{kl}{I_{yy}}(u_3 - u_1) \\ \ddot{\psi} = \frac{b}{I_{zz}}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \end{cases}, \quad (3)$$

где  $A_{x,y,z}$  — коэффициенты аэродинамического сопротивления,  $l$  — расстояние от центра масс квадрокоптера до моторов,  $I_{xx,yy,zz}$  — моменты инерции,  $b$  — коэффициент крутящего момента моторов.

Переходя от линейной системы (3) к системе в пространстве состояний (4), получим модель квадрокоптера с 4 входами (управляющие сигналы для каждого из моторов) и 6 выходами-измерениями.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g\theta_1 - \frac{A_x}{m}x_2 \\ \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -g\varphi_1 - \frac{A_y}{m}y_2 \\ \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{A_z}{m}z_2 + \frac{k}{m}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \\ \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = \frac{kl}{I_{xx}}(u_4 - u_2) \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = \frac{kl}{I_{yy}}(u_3 - u_1) \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = \frac{b}{I_{zz}}(u_1 - u_2 + u_3 - u_4) \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A_x}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{A_y}{m} & 0 & -g & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A_z}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & \frac{k}{m} & \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{kl}{I_{xx}} & 0 & \frac{kl}{I_{xx}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{kl}{I_{yy}} & 0 & \frac{kl}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b}{I_{zz}} & -\frac{b}{I_{zz}} & \frac{b}{I_{zz}} & -\frac{b}{I_{zz}} \end{bmatrix}$$

Передаточная матрица системы в данном случае будет иметь размерность  $6 \times 4$ , что, несомненно, вызывает определенные сложности при дальнейшей работе с моделью. Наложив некоторые ограничения на вид управляющего сигнала, можно разделить MIMO-систему на SISO-подсистемы, работать с которыми определено проще.

Предположим, что квадрокоптер неподвижно висит в воздухе. Величина управляющего сигнала в данном случае одинакова для каждого мотора и равняется, как было выяснено ранее,  $u_0$ . Как видно из (3), чтобы, не потеряв горизонтального положения ( $\dot{\varphi} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\psi} = 0$ ), изменить лишь высоту, необходимо изменить управляющий сигнал для каждого мотора на одинаковую величину (обозначим  $u_{\Delta z}$ ). Если же поставлена задача изменить лишь угол крена  $\varphi$ , то достаточно изменить  $u_1$  и  $u_2$  на одинаковую величину  $u_{\Delta\varphi}$  с разным знаком. Аналогичная ситуация и с углом тангажа  $\theta$  — необходимо изменить на одинаковую величину  $u_{\Delta\theta}$  с разным знаком управляющие сигналы для первого и третьего моторов. Для управления углом рысканья  $\psi$  будем изменять мощности моторов на одинаковую величину  $u_{\Delta\psi}$  в разную сторону, если они находятся на разных осях квадрокоптера. Таким образом, замена для вектора  $u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4]^T$  будет иметь вид:

$$\begin{cases} u_1 = u_{\Delta z} + u_{\Delta\theta} + u_{\Delta\psi} \\ u_2 = u_{\Delta z} - u_{\Delta\psi} + u_{\Delta\varphi} \\ u_3 = u_{\Delta z} - u_{\Delta\theta} + u_{\Delta\psi} \\ u_4 = u_{\Delta z} - u_{\Delta\psi} - u_{\Delta\varphi} \end{cases} \tag{5}$$

Подставив (5) в систему (3), получим в результате:

$$\begin{cases} \ddot{x} = g\theta - \frac{A_x}{m} \dot{x} \\ \ddot{y} = -g\varphi - \frac{A_y}{m} \dot{y} \\ \ddot{z} = 4\frac{k}{m} u_{\Delta z} - \frac{A_z}{m} \dot{z} \\ \ddot{\varphi} = -2\frac{kl}{I_{xx}} u_{\Delta\varphi} \\ \ddot{\theta} = -2\frac{kl}{I_{yy}} u_{\Delta\theta} \\ \ddot{\psi} = 4\frac{b}{I_{zz}} u_{\Delta\psi} \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим теперь систему (6). Как можно заметить, при переходе к модели в пространстве состояний, возможна её декомпозиция на 6 SISO-подсистем:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g\theta_1 - \frac{A_x}{m} x_2 \\ \dot{\theta}_1 = \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 = -2\frac{kl}{I_{yy}} u_{\Delta\theta} \\ y = x_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -g\varphi_1 - \frac{A_y}{m} y_2 \\ \dot{\varphi}_1 = \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_2 = -2\frac{kl}{I_{xx}} u_{\Delta\varphi} \\ y = y_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -\frac{A_z}{m} z_2 + 4\frac{k}{m} u_{\Delta z} \\ y = z_1 \end{cases}, \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = 4\frac{b}{I_{zz}} u_{\Delta\psi} \\ y = \psi_1 \end{cases}$$

Данные системы значительно удобнее использовать при работе с передаточными функциями, например, частотном анализе. Также, основываясь на вышеизложенных результатах, можно построить LQR-регулятор (с использованием асимптотических наблюдателей), который, к тому же, достаточно просто проверить на робастность.

Литература:

1. Luukkonen, T., Modelling and control of quadcopter, 2011, P. 2–6.

## Математическое моделирование банкротства предприятия

Комарова Наталья Эдуардовна, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В данной статье исследуются различные механизмы выплат долгов кредиторам при банкротстве предприятия. Особый интерес представляют механизмы, использующие методы математической теории игр. Проведен обзор задачи в статическом случае и предложен новый подход, основанный на кооперативной теории динамических игр.*

**Ключевые слова:** задача банкротства, кооперативные игры, вектор Шепли

В различной литературе понятие банкротства предприятия трактуется весьма неоднозначно, но большинство авторов под понятием «банкротство» понимают следующее:

Банкротство (нем. Bankrott, Bankarotta) — долговая несостоятельность предприятия, несостоятельность его удовлетворить требования кредиторов по оплате услуг, товаров и работ, а также неспособность вносить обязательные платежи в бюджет и внебюджетные фонды.

Успех деятельности фирмы зависит от большого числа внешних и внутренних факторов и если она ведет эту деятельность неэффективно, то настает момент, когда ее необходимо вывести с рынка. Для этого выполняется ряд процедур, одной из которых является определение ликвидационной стоимости. После чего встает вопрос о разделении этой стоимости между кредиторами, истцами и заявителями, что приводит к большому числу юридических конфликтов. Проблема заключается в том, что стоимости фирмы в большинстве случаев недостаточно, чтобы погасить все требования. Необходимо сделать оптимальное распределение денежных средств и установить соответствующие правила дележа.

Рассмотрим теперь формальную постановку задачи. Пусть у нас есть положительная величина  $M \in \mathbf{R}_+$  — ликвидационная стоимость предприятия. Необходимо распределить её среди конечного множества агентов  $N$  (кредиторов, истцов и заявителей) вида  $\{1, 2, \dots, n\}$ , требования которых в сумме превышают число  $M$ . Определим требование  $i$ -ого агента как  $d_i \in \mathbf{R}_+$ . Суммарное требование вычисляется как  $D = \sum_{i=1}^n d_i$ . Обозначим класс всех задач о банкротстве  $\mathbf{D}_N$ .

Тогда под **задачей банкротства** будем понимать пару  $(d, M) \in \mathbf{R}_+^N \times \mathbf{R}_+$ , в которой распределяемая сумма денежных средств строго меньше суммарного требования кредиторов предприятия. Данная задача эквивалентна реальной ситуации в суде по делам о банкротстве. Мы будем рассматривать конфликт претензий агентов и искать способы нахождения оптимального распределения вида  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Правило дележа — это функция, которая для любой пары  $(d, M)$  ставит в соответствие вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такой, что  $\sum_{i=1}^n x_i \leq M$  и выполняется неравенство  $0 \leq x_i \leq d_i$ . Необходимо определить ряд таких правил и найти способы их сравнения.

Данную задачу изучают довольно длительное время. Авторы предлагают различные правила дележа, приведем наиболее распространенные из них. Самое простое правило дележа — это правило «уступить и делить» (CD), которое справедливо для случая  $N = \{1, 2\}$ . Вектор требований агентов выглядит  $(d_1, d_2)$ , величина общих выплат равна  $M$ . Тогда первый агент претендует на сумму  $d_1$ , уступая тем самым  $M - d_1$ , если эта разность положительна и 0 в противном случае. Аналогично поступает и второй агент. Итак, получаем

$$(M - d_1)^+ = \{M - d_1, 0\} \text{ и } (M - d_2)^+ = \{M - d_2, 0\}.$$

Далее выплачиваем каждому агенту цену уступки другого, а оставшуюся сумму денег делим пополам.

$$CD_i(d, M) = (M - d_j)^+ + \frac{1}{2}(M - \sum_{k \in N} (M - d_k)^+), \text{ где } i, j \in N \text{ и } i \neq j.$$

Рассмотрим еще одно правило дележа, которое является одним из самых распространенных в реальных задачах. Существует два типа **пропорционального** правила.

а) **Правило усеченных претензий (ТР)**. Здесь делёж вычисляется пропорционально усеченным претензиям  $\min(\mathbf{d}_i, M)$ .

$$TR(d, M) = \alpha d', \text{ где } d' = (d'_i), d'_i = \min(d_i, M), \alpha = \frac{M}{\sum d'_i}.$$

б) **Приведенное правило (А)**. Это правило — одно из обобщений правила «уступать и делить». Сначала каждому агенту отдается сумма уступки от остальных, т. е. остаток при условии, что все кроме рассматриваемого агента удовлетворили свои требования.

$$m_i(d, M) = (M - \sum_{i \neq j} d_j)^+, m(d, M) = (m_i(d, M))_{i \in N}.$$

А вектор остатков  $d - m(d, M)$  делится по правилу (а), с учетом, что осталась сумма  $M_A = M - \sum_{k \in N} m_k(d, M)$ .

$$A(d, M) = m(d, M) + TR(d - m(d, M), M_A).$$

Следующие правила основаны на идее уравнивания. Но главный вопрос состоит в том, по какому именно критерию уравнивать, если агенты не одинаковы. В задаче о банкротстве участники отличаются лишь величиной требований и уравнивание выплат игнорирует эти отличия. Получается, что агент может получить сумму большую чем ту, на которую претендует, но это противоречит нашему определению дележа. Поэтому в **правиле ограниченных равных (СЕА)** выплаты вводятся верхние границы выплат, и никто не получит больше, чем требует.

$$CEA_i(d, M) = \min\{d_i, \gamma\}, \text{ где } \gamma \text{ удовлетворяет } \sum \min\{d_i, \gamma\} = M.$$

Существует иной подход к идее равенства — **ограниченное эгалитарное правило (СЕ)**, которое основано на проблеме справедливого дележа в ситуации одновысших предпочтений. Это правило концентрирует внимание на половине требований агентов, но модернизирует идею равномерного правила, что гарантирует одинаковую упорядоченность выплат и требований.

$$CE_i(d, M) = \min\{d_i, \gamma\}, \text{ если выполняется } \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i \geq M$$

$$CE_i(d, M) = \max\{\frac{d_i}{2}, \min\{d_i, \gamma\}\}, \text{ в противном случае.}$$

В каждом случае  $\gamma$  выбирается так, что  $\sum_{i=1}^n CE_i(d, M) = M$ .

Еще одно правило дележа, использующее идею равенства — **правило Талмуда (Т)**. Это правило можно объяснить с помощью простого алгоритма. Положим, что распределяемая сумма колеблется в пределе от 0 до половины суммарного требования. На первом шаге она будет делиться среди всех агентов равномерно до тех пор, пока каждому не достанется величина, которая равна половине минимальной претензии. Затем доля агента с минимальным требованием прекращает расти, а остаток делится между всеми поровну до того момента, пока все не получат сумму второй по минимальности заявки. Этот процесс будет продолжаться, пока распределяемая сумма не будет равна  $D/2$ . В этот момент каждый получит ровно половину своей заявки.

В случае, когда доступная сумма больше половины суммарного требования, будем уменьшать её и делить разность  $D - M$ . Сначала эта разность делится до того момента, пока каждый агент не получит убыток, равный половине наименьшей заявки. Аналогично процесс будет идти до тех пор, пока доступная сумма не будет равна  $D/2$ .

$$\text{Если } \frac{D}{2} > M, \text{ тогда } T_i(d, M) = \min\{\frac{d_i}{2}, \lambda\}, \lambda: \sum \min\{\frac{d_i}{2}, \lambda\} = M.$$

$$\text{Если } \frac{D}{2} < M, \text{ тогда } T_i(d, M) = d_i - \min\{\frac{d_i}{2}, \lambda\}, \lambda: \sum (d_i - \min\{\frac{d_i}{2}, \lambda\}) = M.$$

Каталог теоретических правил дележа постоянно анализируется и пополняется, рассматриваются различные подходы к сравнению всех этих правил, вводятся семейства правил, которые содержат бесконечное число членов.

С другой стороны, цель распределения — удовлетворить потребности кредиторов, истцов и заявителей. А они в свою очередь хотят максимизировать свою часть выплат. Поэтому для решения этой проблемы логично использовать математическое моделирование средствами теории кооперативных игр. Такие игры моделируют ситуации, при которых участники игры, объединяясь, могут получить дополнительную прибыль.

Чтобы построить игровую модель банкротства предприятия, необходимо упомянуть некоторые сведения из теории кооперативных игр. Под игрой мы будем понимать процесс, в котором участвуют две и более сторон, ведущие борьбу за реализацию своих интересов. Пусть условия игры допускают совместные действия и перераспределения выигрыша. Главная задача исследования — это оптимальное распределение благ между членами объединения.

Построим игру в виде характеристической функции. Пусть  $N = \{1, \dots, n\}$  — множество всех игроков. Любое непустое подмножество  $S \subset N$  будем называть *коалицией*.

Под характеристической функцией игры  $n$  лиц будем понимать вещественную функцию  $v$ , определенную на коалициях  $S \subset N$ , при этом для любых непересекающихся коалиций  $T \subset N$  и  $S \subset N$  выполняется неравенство



$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S).$$

Это неравенство называется свойством супераддитивности. Оно необходимо для содержательной интерпретации числа  $v(T)$  как гарантированного выигрыша коалиции  $T$  в случае, когда она действует независимо от других игроков. Это означает, что объединение  $T \cup S$  имеет не меньше возможностей, чем две непересекающиеся коалиции  $T$  и  $S$ , действующие в одиночку.

Построим характеристическую функцию на основе ранее рассмотренных правил дележа:

$$v^{(M, d)}(S) = \max\{M - \sum d_i, 0\}, S \subset N, i \in N \setminus S. (*)$$

Таким образом поставим каждой коалиции в соответствие число равное сумме уступок игроков, которые не входят в эту коалицию.

При решении игры банкротства можно использовать различные принципы оптимальности такие как  $S$ -ядро,  $NM$ -решение, вектор Шепли. Но в данной задаче важно существование и единственность дележа для любой кооперативной игры. Поэтому удобно использовать принцип оптимальности- вектор Шепли, который вычисляется по следующей формуле:

$$\varphi(v)_i = \sum_{S: i \in S} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} (v(S) - v(S \setminus i)).$$

Таким образом, в зависимости от исходных данных задачи мы можем выбрать подходящий принцип оптимальности. Поэтому кооперативная модель проблемы банкротства имеет преимущество перед теоретическими правилами распределения. Для того, чтобы определить справедливое решение, достаточно построить игру, проанализировать возможные решения и выбрать одно из них.

Иногда возникают ситуации, когда при ликвидации фирмы денежные средства поступают на счет руководства по временным периодам. Это может быть связано с банковскими особенностями, наличием у фирмы обособленных подразделений и другими экономическими факторами. Тогда распределение денежных средств производится по шагам и сложность дележа возрастает в несколько раз. Предложим подход для решения этой задачи, который строится на основе многошаговой кооперативной теории.

Предположим, что нам известна процедура поступления денежных средств на счет должника. Выплаты будут производиться в моменты времени  $(t_1, \dots, t_m)$ . Тогда вектор доступной суммы будет иметь вид  $(M(t_1), \dots, M(t_m))$ . Стоит вопрос, каким образом осуществлять дележ в каждый момент поступления. На первом шаге построим одношаговую игру в виде характеристической функции (\*)  $\Gamma_1 = (N, v)$ , положим что  $M = M(t_1) + \dots + M(t_m)$ , вектор требований имеет вид  $(d_1, \dots, d_n)$ . Строим характеристическую функцию и определяем вектор Шепли  $Sh^1 = (Sh_1^1, \dots, Sh_n^1)$ . На втором шаге уменьшим доступную сумму  $M = M(t_2) + \dots + M(t_m)$  и проделаем такие же вычисления. Аналогично процесс будет идти до шага  $m$ . После этого введем выплаты в каждый момент поступления:

$$x^1 = (x_1^1, \dots, x_n^1) = Sh^1 - Sh^2.$$

...

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k) = Sh^k - Sh^{k+1}.$$

...

$$x^m = (x_1^m, \dots, x_n^m) = Sh^m.$$

Итак, мы получили новый подход к решению задачи возврата долгов кредиторам предприятия, основанный на поэтапном погашении задолженности. Серьезным шагом в математическом моделировании данной задачи будет построение игровых многошаговых моделей при помощи других принципов оптимальности. Это поможет избежать ряд юридических споров, и облегчит процедуру банкротства.

Литература:

1. Aumann, R., Maschler M. Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. Journal of Economic Theory, 1985. Vol. 36, No 1. P. 195–213
2. Guiasu, S. Three ancient problems solved by using the game theory logic based on the Shapley value. Knowledge, Rationality and Action, 2011. Vol. 181, No 1. P. 65–79
3. Петросян, Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. М.:БХВ-Петербург, 2014. 423 с.

## Математическая модель динамики вязкой жидкости в проницаемой трубе

Комилова Холидахон Мухтаровна, ассистент  
Ташкентский институт ирригации и мелиорации (Узбекистан)

Известно, что интерес к изучению движения жидкости в трубе с проницаемыми стенками вызван потребностью техники орошения. В результате выполнения данного исследования приводит к разработке прогрессивным способов орошения, в частности внутриводопольного и капельного.

Для решения поставленной задачи рассмотрим движение вязкой жидкости при учете расхода через пористости стенок и гидравлического сопротивления, пропорционального первой степени расхода [1],

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{S} \frac{\partial Q}{\partial x} = - \frac{S}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - dQ, \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = k(t)(p - p_c); \quad (2)$$

здесь  $Q$  — расход жидкости по сечению трубы, ( $\text{м}^3/\text{с}$ );  $S$  — площадь поперечного сечения трубы, ( $\text{м}^2$ );  $k(t)$  — функция, характеризующая проницаемость среды;

$p$ ,  $p_c$  — соответственно давление жидкости в трубе и давление внешней среды

Начальные и граничные условия для рассматриваемой задачи

При  $t=0$   $Q=0$ ;

При  $x=0$  ( $t > 0$ )  $Q = Q_0 = \text{const}$ , (3)

$p = p_0 = \text{const}$

$\alpha = 32 \frac{\mu l}{S p g d^2}$  ( $l$  — длина трубы, ( $\text{м}^3/\text{с}$ );  $d$  — диаметр, ( $\text{м}$ )).

В случае, когда они малы, вторым членом уравнения (1) можно пренебречь. Тогда

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{S}{p} \frac{\partial p}{\partial x} - dQ \quad (4)$$

Учитывая (2) из (4) получим уравнения для определения расхода жидкости, через трубы.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{S}{p} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - Q. \quad (5)$$

В целях упрощения уравнение (5) вводим новую функцию  $Q_1$

$$Q = e^{-\alpha t} Q_1 \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = \frac{S}{p k(t)} \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2}. \quad (7)$$

С учетом начальных и граничных условий из (3) — получим:

при  $t=0$   $Q_1 = 0$ ; при  $x=0$  ( $t > 0$ )  $Q_1 = Q_0 e^{\alpha t}$  (8)

В формулу (7) вводим новую функцию по переменному  $t_1$

$$t_1 = \frac{S}{p} \int_0^t \frac{dt}{k(t)} \quad (9)$$

Если  $t=0$  то  $t_1 = 0$ , при  $t \rightarrow \infty$ ,  $t_1 \rightarrow \infty$ .

Выражение (9) для  $t_1$  подставляем в уравнение (7). После несложным математических преобразований получим

$$\frac{\partial Q_1}{\partial t_1} = \frac{\partial^2 Q_1}{\partial x^2} \quad (10)$$

Далее поставленная задача решается при следующих начальных и граничных условиях

при  $t = 0$   $Q_1 = 0$ ; при  $x = 0$   $Q_1 = Q_0 \varphi(t_1)$  (11)

где функция  $\varphi(t_1) = e^{\frac{\alpha S}{p} \int_0^{t_1} \frac{dt}{k(t)}}$  характеризует закон распределение давлений по времени  $t$

Решением уравнения (10) при условии (11) будет,

$$Q_1 = \frac{Q_0 x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{t_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t_1-\tau)}}}{(t_1-\tau)^{\frac{3}{2}}} \varphi(\tau) d\tau \quad (12)$$

Используя зависимости (6) и (9), получим формулу для расхода жидкости, протекающей через трубы

$$Q = \frac{Q_0 x}{2\sqrt{\pi}} e^{-\alpha t} \int_0^{t_1} \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t_1-\tau)}}}{(t_1-\tau)^{\frac{3}{2}}} \varphi(\tau) d\tau \quad (13)$$

Введя переменную

$$\xi = \frac{x}{2\sqrt{t_1-\tau}} \quad (14)$$

Из (13) получим

$$Q = \frac{Q_0}{2\sqrt{\pi}} e^{-\alpha t} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t_1}}}^{\infty} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi. \quad (15)$$

При этом граничные условия принимает вид:

при  $t = 0 (t_1 = 0) \quad Q = 0;$

при  $x = 0 \quad Q = Q_0$

Анализ полученной формулы (15) показывает, что при  $t \rightarrow \infty, Q \rightarrow Q_0$ . Это означает, что фильтрация жидкости из раствора в среду через большой промежуток времени практически сводится к минимуму.

Из уравнения (2) видно, что проинтегрировав функцию (15) по  $x$  один раз, можно легко получить выражения для закона изменения давления.

Представляет интерес определить, какое количество жидкости профильтровывается через пористые стенки цилиндра длиной  $l$ .

Времени через стенки профильтровавшейся жидкости равно.

$$\Delta q = Q_0 - Q(l, t)$$

Тогда общее количество жидкости, профильтровавшейся трубы за время  $t$ , равно:

$$q = Q_0 \int_0^t [Q_0 - Q(l, t)] dt. \quad (16)$$

Подставляя значения  $Q(l, t)$  из (15), и подставляя получим

$$q = Q_0 \int_0^t \left\{ 1 - \frac{e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t_1}}}^{\infty} \varphi\left(t_1 - \frac{x^2}{4\xi^2}\right) e^{-\xi^2} d\xi \right\} dt \quad (17)$$

При решении поставленной задачи коэффициент  $k(t)$  рассматривали как произвольную функцию, удовлетворяющую условиям (9). В конкретном случае если задана функция изменения давления, можно выбрать соответствующий закон для  $k(t)$ .

Пусть скорость просачивания отверстий трубы задается в виде.

$$v = k_1(t)(p - p_c) \quad (18)$$

Если функция  $k_1(t)$  линейно зависит от расхода профильтрованной жидкости за время  $t$ , получим

$$k_1(t) = k_0 \left( 1 - \alpha \int_0^t v dt \right), \quad (19)$$

То при  $t = 0$

$$v = k_0(p - p_c), \quad (20)$$

где  $k_0$  — коэффициент  $k(t)$  при  $t = 0$ . Коэффициент  $k(t)$  определяется из опытов [1],

$$\alpha = \frac{1}{\int_0^{\infty} v dt}$$

(берется из опыта).

Подставляя в (18) выражение (17), имеем.

$$k_1 = k_0 \left[ 1 - \alpha \int_0^t k_1(p - p_c) dt \right] \quad (21)$$

Дифференцируя по  $t$  и обозначая  $p - p_c$  через  $p_1$ , получаем

$$\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{dt} = -k_0 \alpha p_1 \quad (22)$$

проинтегрировав, запишем

$$k_1 = k_0 e^{-k_0 \alpha \int_0^t p_1 dt} \quad (23)$$

В случае, когда давление  $p$  не зависит от времени,

$$k_1 = k_0 e^{-k_0 \alpha (p - p_c) t} \quad (24)$$

Тогда уравнение принимает вид

$$v = k_0 \exp[-k_0 \alpha (p - p_c) t] (p - p_c) \quad (25)$$

Если  $p_1$  постоянная величина, а  $\beta = k_0 \alpha p_1$ , то окончательно получим

$$v = k_0 e^{-\beta t} (p - p_c). \quad (26)$$

По формуле (17) можно определить общее количество жидкости, фильтрующейся через стенки трубы при заданных параметрах, а по (24) при известных значениях жидкости в трубе и окружающей среде — найти закон изменения  $k_1(t)$ .

Предлагаемый метод вычисления расход воды в трубах с проницаемыми стенками можно применить к вопросам орошения, что даст возможность разработать гидродинамический метод расчета, обеспечивающий нормы полива сельхоз-культур, в том числе хлопчатника.

Литература:

1. Д. Ф. Файзуллаев, А. И. Умаров, А. А. Шакиров «Гидродинамика одно- и двухфазных сред и её практические приложения», 22–25стр. Ташкент, 1980

## Исследование одной нелинейной системы четвертого порядка

Кроткин Артем Эдуардович, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

*В данной работе рассматривается управляемый объект, который необходимо перевести в начало координат с заданным в конечный момент времени значением скорости и курсового угла за минимальное время. Движение объекта описывается системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Предполагается, что оптимальное управление и оптимальная траектория движения существуют. Исследование основывается на принципе максимума и не рассматривается случай нулевого управления. Полученное свойство, сформулированное в виде леммы.*

**Ключевые слова:** принцип максимума, гамильтониан, сопряженная система, курсовой угол

В современном мире люди каждый день управляют той или иной техникой или процессами. И так как прогресс не стоит на месте, то каждый день появляются новейшие объекты, которые требуют нахождения различных подходов к управлению ими. Поэтому вопрос управления сегодня весьма актуален. А так как люди не любят тратить свои усилия и ресурсы впустую, то они хотят управлять всем оптимально. Данная проблема возникла уже очень давно и так как решение этой задачи далеко не всегда было тривиальным, то изобрели соответствующую математическую теорию, которая получила название «теория оптимальных процессов». Важнейшую роль в ней сыграл Л. С. Понтрягин, который сформулировал в 1958 году всем известный принцип максимума. Позднее принцип доказали Р. В. Гамкрелидзе и В. Г. Болтянский в частном и общем случаях соответственно.

В жизни, мы стараемся закончить начатые дела, как можно раньше, поэтому на практике часто показателям качества решения является время, то есть мы хотим решить задачу быстродействия. Как известно, в случае линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений принцип максимума обеспечивает необходимые и достаточные условия для оптимальности решения. Однако же, когда возникает нелинейность, то прибегают к линеаризации, которая дает весьма хорошие результаты, но далеко не всегда. В таких случаях приходится прибегать к дополнительным исследованиям, опирающимся на вид и свойства конкретной нелинейной системы, благодаря которым иногда удается получить число точек переключения управления. В данной статье, приводится пример такого исследования. Нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений описывает физическую задачу захода самолета при сильном боковом ветре на палубу авианесущего корабля или сближения двух самолетов для дозаправки, то есть задачу стыковки.

Математическая модель в данном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} = V \sin \varphi + W_x \\ \dot{y} = V \cos \varphi - W_y \\ \dot{\varphi} = u_1(t) \omega \\ \dot{V} = u_2(t) \alpha \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}(t)$  и  $\mathbf{y}(t)$  — геометрические координаты объекта,  $V(t)$  — скорость,  $\varphi(t)$  — курсовой угол, отсчитываемый от положительного направления оси ординат до вектора скорости  $(V_x(t), V_y(t))^T$  по часовой стрелке и удовлетворяет ограничению  $|\Delta \varphi| \leq 2\pi$ .

Необходимо перевести объект из начальной точки  $(x_0, y_0, \varphi_0, V_0)$  в заданную область  $(0, 0, \cos \varphi(T) = 1, V(T) = V_0)$ , где  $T$  — конечный момент времени. Функционалом качества служит конечное время, следовательно, нам требуется решить задачу оптимального быстродействия. Также на систему накладываются следующие ограничения: управляющая вектор-функция  $(u_1(t), u_2(t))^T$  выбирается из класса кусочно-непрерывных функций, должна удовлетворять ограничениям  $|u_1(t)| \leq 1, |u_2(t)| \leq 1$  и при этом не рассматривается ситуация, когда управление равно нулю, скорость объекта  $V \in [V_0, V_{max}]$ , где  $V_{max} = V_0 + \alpha \frac{2\pi}{\omega}$ . Последнее равенство означает, что объект может совершить полный разворот, двигаясь равноускоренно при начальной скорости. Остальные параметры являются постоянными:  $\alpha$  — ускорение,  $\omega$  — угловая скорость,  $W_x$  и  $W_y$  — возмущения не равны нулю одновременно.

Данная задача была неоднократно рассмотрена в несколько иных постановках. Так, например, поставил задачу в игровой постановке (игра «шофер-убийца») Р.Айзекс в работах [1,2]. Множество вариантов и модификаций игры «шофер-убийца», а также различные алгоритмы для ее решения и численные методы, описаны в [3,4]. Принципиальное отличие задачи в данной работе заключается в задании значений в конечный момент времени курсового угла и скорости, а также в наличии ограничений на них.

В нашем случае гамильтониан системы имеет вид:

$$H(x, y, \varphi, V, u_1, u_2) = \psi_1(V \sin \varphi + W_x) + \psi_2(V \cos \varphi - W_y) + u_1 \omega \psi_3 + u_2 \alpha \psi_4.$$

Сопряженная (1) система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0 \\ \dot{\psi}_3 = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -(\psi_1 V \cos \varphi - \psi_2 V \sin \varphi) \\ \dot{\psi}_4 = -\frac{\partial H}{\partial V} = -(\psi_1 \sin \varphi + \psi_2 \cos \varphi) \end{cases} \quad (2)$$

Согласно принципу максимума [5], оптимальное управление имеет вид:

$$u_1(t) = \begin{cases} +1, \psi_3(t) > 0, \\ -1, \psi_3(t) < 0. \end{cases}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} +1, \psi_4(t) > 0, \\ -1, \psi_4(t) < 0. \end{cases}$$

Покажем, что имеет место следующая лемма.

**Лемма.** Пусть в задаче (1) для траектории удовлетворяющей принципу максимума существует три идущие подряд точки переключения управления  $u_2(t) = t_1, t_2, t_3$ , причем  $t_2$  — является и точкой переключения управления  $u_1(t)$ . Тогда  $\varphi(t_1) = \varphi(t_3)$ .

**Доказательство.** Для начала проинтегрируем первые два уравнения из (1) на интервале  $[0, t_1]$  постоянства управлений  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ :

$$\begin{aligned}
 x(\tau_1) = x(0) + W_x \tau_1 - \frac{V(\tau_1) \cos \varphi(\tau_1)}{\omega u_1(0)} + \frac{V(0) \cos \varphi(0)}{\omega u_1(0)} + \\
 + \frac{a u_2(0) \sin \varphi(\tau_1)}{\omega^2 u_1^2(0)} - \frac{a u_2(0) \sin \varphi(0)}{\omega^2 u_1^2(0)},
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
 y(\tau_1) = y(0) - W_y \tau_1 + \frac{V(\tau_1) \sin \varphi(\tau_1)}{\omega u_1(0)} - \frac{V(0) \sin \varphi(0)}{\omega u_1(0)} + \\
 + \frac{a u_2(0) \cos \varphi(\tau_1)}{\omega^2 u_1^2(0)} - \frac{a u_2(0) \cos \varphi(0)}{\omega^2 u_1^2(0)}.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Для упрощения записи введем обозначение:

$$H^0(t) = C_1 V(t) \sin \varphi(t) + C_2 V(t) \cos \varphi(t) = V(t) \cos(\varphi(t) - \alpha).$$

Также проинтегрируем третье уравнение из сопряженной системы (2):

$$\begin{aligned}
 \psi_3 = \int (C_2 V \sin \varphi - C_1 V \cos \varphi) dt = \int C_2 (\dot{x} - W_x) - C_1 (\dot{y} + W_y) dt = \\
 = C_2 (x - W_x t) - C_1 (y + W_y t) + C_3.
 \end{aligned}$$

Используя последнее соотношение, имеем:

$$\psi_3(\tau_1) - \psi_3(0) = C_2(x(\tau_1) - x(0) - W_x \tau_1) - C_1(y(\tau_1) - y(0) - W_y \tau_1) (*)$$

Воспользуемся тем, что гамильтониан как функция времени на оптимальной траектории постоянен, то есть:  $H(t_1)$

$$= H(t_2) = \dots = H(t_k) = const \text{ [5].}$$

$$\begin{aligned}
 H(t_2) - H(t_1) = C_1 V(t_2) \sin \varphi(t_2) + C_1 W_x + C_2 V(t_2) \cos \varphi(t_2) - C_2 W_y + \\
 + u_1(0) \omega \psi_3(t_2) - C_1 V(t_1) \sin \varphi(t_1) - C_1 W_x - C_2 V(t_1) \cos \varphi(t_1) + C_2 W_y - \\
 - u_1(0) \omega \psi_3(t_1) = H^0(t_2) - H^0(t_1) + u_1(0) \omega (\psi_3(t_2) - \psi_3(t_1))
 \end{aligned}$$

С учетом равенства (\*), получим:

$$\begin{aligned}
 H(t_2) - H(t_1) = H^0(t_2) - H^0(t_1) + C_2 V(t_1) \cos \varphi(t_1) - \\
 - C_2 V(t_2) \cos \varphi(t_2) - C_1 V(t_2) \sin \varphi(t_2) + C_1 V(t_1) \sin \varphi(t_1) + \\
 + \frac{C_2 a u_2(t_2) \sin \varphi(t_2)}{\omega u_1(0)} - \frac{C_2 a u_2(t_1) \sin \varphi(t_1)}{\omega u_1(0)} - \frac{C_1 a u_2(t_1) \cos \varphi(t_2)}{\omega u_1(0)} + \\
 + \frac{C_1 a u_2(t_1) \cos \varphi(t_1)}{\omega u_1(0)} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H(t_2) - H(t_1) = \frac{C_2 a u_2(t_2) \sin \varphi(t_2)}{\omega u_1(0)} - \frac{C_2 a u_2(t_1) \sin \varphi(t_1)}{\omega u_1(0)} - \\
 - \frac{C_1 a u_2(t_1) \cos \varphi(t_2)}{\omega u_1(0)} + \frac{C_1 a u_2(t_1) \cos \varphi(t_1)}{\omega u_1(0)} = 0.
 \end{aligned}$$

Домножим последнее равенство слева и справа на  $\frac{\omega u_1(0)}{a u_2(t_1)}$ .

$$C_2 \sin \varphi(t_2) - C_2 \sin \varphi(t_1) - C_1 \cos \varphi(t_2) + C_1 \cos \varphi(t_1) = 0.$$

Откуда приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 2C_2 \sin \left( \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2} \right) \cos \left( \frac{\varphi(t_2) + \varphi(t_1)}{2} \right) + \\
 + 2C_1 \sin \left( \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2} \right) \sin \left( \frac{\varphi(t_2) + \varphi(t_1)}{2} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\sin \left( \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2} \right) \left( C_2 \cos \left( \frac{\varphi(t_2) + \varphi(t_1)}{2} \right) + C_1 \sin \left( \frac{\varphi(t_2) + \varphi(t_1)}{2} \right) \right) = 0.$$

Отсюда следует:

$$\sin\left(\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1) - 2\alpha}{2}\right) = 0,$$

где  $\alpha = \arctg \frac{c_1}{c_2}$ . Из последнего равенства вытекают два варианта. Если первый сомножитель равен нулю, то  $\varphi(t_2) = \varphi(t_1) + 2\pi k, k = \pm 1$ , но этот случай невозможен, так как будет нарушено ограничение, накладываемое на курсовой угол, при этом ни момент  $t_1$ , ни момент  $t_2$  не являются точками переключения управления  $u_1(t)$ . Если же второй сомножитель равен нулю, то  $\varphi(t_2) = 2\alpha - \varphi(t_1) + \pi + 2\pi m, m \in Z$ . Аналогично:

$$\varphi(t_3) = 2\alpha - \varphi(t_2) + \pi + 2\pi l$$

откуда следует, что

$$\varphi(t_3) = \varphi(t_1) + 2\pi(l - m) = \varphi(t_1) + 2\pi j.$$

В последнем соотношении возможны 3 варианта: первый —  $\varphi(t_3) = \varphi(t_1) + 2\pi$ , второй —  $\varphi(t_3) = \varphi(t_1) - 2\pi$ , третий —  $\varphi(t_3) = \varphi(t_1)$ . Докажем, что возможен только 3-ий вариант. Пусть  $u_1 = 1$ , а тогда  $\varphi(t_2) > \varphi(t_1)$  и  $\varphi(t_2) > \varphi(t_3)$ . Рассмотрим первый вариант  $\varphi(t_2) > \varphi(t_3) = \varphi(t_1) + 2\pi$ , соответственно  $\varphi(t_2) - \varphi(t_1) > 2\pi$ , а это нарушает ограничение, накладываемое на угол. Если взять второй вариант, получим подобное нарушение ограничения  $\varphi(t_2) > \varphi(t_1) = \varphi(t_3) + 2\pi$ , следовательно,  $\varphi(t_2) - \varphi(t_3) > 2\pi$ . А 3-ий случай не нарушает никаких ограничений. Если же  $u_1 = -1$ , тогда  $\varphi(t_2) < \varphi(t_1)$  и  $\varphi(t_2) < \varphi(t_3)$ . В этом случае аналогичным образом получим:

$$1) \varphi(t_2) < \varphi(t_1) = \varphi(t_3) - 2\pi, \varphi(t_3) - \varphi(t_2) > 2\pi,$$

$$2) \varphi(t_2) < \varphi(t_3) = \varphi(t_1) - 2\pi, \varphi(t_1) - \varphi(t_2) > 2\pi,$$

$$3) \varphi(t_2) < \varphi(t_3) = \varphi(t_1), \varphi(t_3) - \varphi(t_2) > 0.$$

Здесь видно, что только третий вариант не нарушает ограничений на угол. Таким образом, показали, что углы в момент  $t_1$  и  $t_2$  равны. Лемма доказана.

Литература:

1. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / пер. с англ. В. И. Аркина, Э. Н. Симаковой; под ред. М. И. Зеликина. М.: Мир, 1967, 384 с. (Isaacs R. Differential games.)
2. Isaacs, R. Games of pursuit. Scientific report of the RAND Corporation. Santa Monica: RAND Corporation, 1951. 00 p.
3. Пацко, В. С., Турова В. Л. Игра «шофер-убийца» и ее модификации // Вестник Удмурт. у-та. Вып. 2. Ижевск 2008. С. 105–110.
4. Patsko, V. S., Turova V. L. Level sets of the value function in differential games with the homicidal chauffeur dynamics // Game Theory and Applications. 2007. Vol. 12. P. 123–152.
5. Понтрягин, Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов., М.: Наука, 1969. 384 с.

## Основные свойства квадратичного числового образа

Куланов Икром Бурхонович, ассистент  
Джизакский политехнический институт (Узбекистан)

Одним из классических методов изучения спектра линейного оператора  $A$  в гильбертовом пространстве  $H$  с областью определения  $D(A)$  является изучение его числового образа:  $W(A) := \{(Ax, x) : x \in D(A), \|x\| = 1\}$ .

Пусть  $Z, R$  и  $C$  — множества всех целых, вещественных и комплексных чисел, соответственно. Известно, что точечный спектр  $\sigma_p(A)$  оператора  $A$  лежит в  $W(A)$ , а его аппроксимативно точечный спектр  $\sigma_{app}(A)$  содержится в  $W(A)$ . Если  $A$  есть замкнутый оператор и всякая компонента множества  $C \setminus W(A)$  содержит хотя бы одну точку резольвентного множества  $\rho(A)$  оператора  $A$ , то имеет место включение  $\sigma(A) \subset W(A)$ . В силу теоремы Тёплица-Хаздорфа [1] числовой образ является выпуклым подмножеством множества  $C$ . С одной стороны, свойство выпуклости

является важным свойством, однако надо отметить, что если спектр состоит из объединения двух непересекающихся множеств, то числовой образ не всегда дает достаточно хорошую структуру.

Для того, чтобы получить более точную информацию о спектре в вышеуказанных случаях, в работе [2] введено понятие квадратичного числового образа, изучению которого также посвящены работы [3–6]. Квадратичный числовой образ определен, если дано разложение  $H = H_1 \oplus H_2$  и  $A \in L(H)$ , где  $H_1$  и  $H_2$  гильбертово пространство, а  $L(H)$  пространство линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве  $H$ . Тогда оператор  $A$  всегда записывается в виде блочно–операторной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{1}$$

с линейными ограниченными операторами  $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i, i, j = 1, 2$ . Для неограниченного линейного оператора  $A$  в  $H$ , его область определения  $D(A)$  необязательно должна быть разлагаемой как прямая сумма  $D_1 \oplus D_2$  подпространств  $D_1 \subset H_1, D_2 \subset H_2$  и следовательно, утверждение о том, что оператор  $A$  имеет представление (1) является дополнительным предположением. В этом случае

$$D(A) = (D(A_{11}) \cap D(A_{21})) \oplus (D(A_{12}) \cap D(A_{22})).$$

Так как в настоящей работе рассматривается случай, когда линейный оператор  $A$  является ограниченным, дальнейшие понятия приводятся для ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве  $H = H_1 \oplus H_2$ .

Сначала дадим определение квадратичного числового образа оператора  $A$  и некоторую информацию о нем (подробно см. работу [5]). Пусть  $(\cdot, \cdot)_i$  и  $\|\cdot\|_i$  — скалярное произведение и норма в  $H_i, i = 1, 2$ , соответственно.

Множество всех собственных значений матрицы

$$A_f = \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_2, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}, f = (f_1, f_2) \in H$$

таких, что  $\|f_i\|_i = 1, i = 1, 2$  называется квадратичной числовой образ оператора  $A \in L(H)$ , соответствующей представлению (1) блочно-операторной матрицы  $A$  и обозначается как  $W^2(A)$ , т. е.

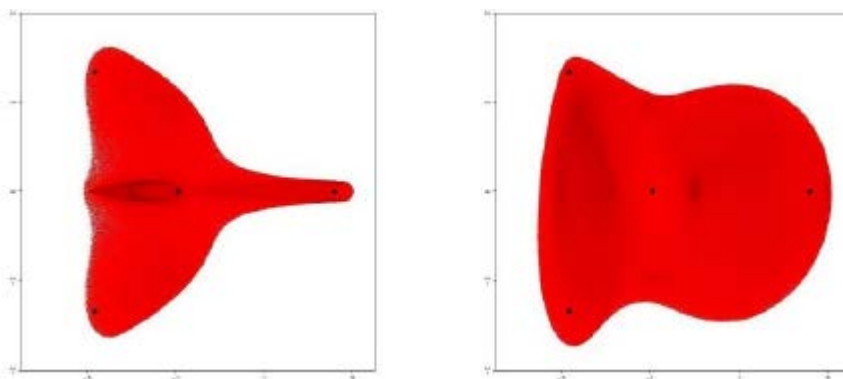
$$W^2(A) = \bigcup_{\|f_i\|_i=1, i=1,2} \sigma_p(A_f), f = (f_1, f_2) \in H.$$

Двум различным разложениям гильбертового пространства  $H$ , могут соответствовать различные квадратичные числовые образы.

Например, квадратичными числовыми образами матрицы  $4 \times 4$

$$M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & -3i \\ -1 & -2 & 3i & 0 \end{pmatrix},$$

соответствующих разложениям  $C^2 \oplus C^2$  и  $C^3 \oplus C^1$  являются различные множества [5]:





В некоторых случаях удобно воспользоваться эквивалентным описанием квадратичного числового образа, где используются ненулевые элементы  $f_1$  и  $f_2$ , необязательно имеющие нормы 1.

Для  $f_i \in H_i \setminus \{0\}$ ,  $i = 1, 2$  положим

$$\hat{A}_f = \left( \frac{(A_{ij}f_j, f_i)_i}{\|f_i\|_i \|f_j\|_j} \right)_{i,j=1}^2$$

и

$$\Delta(f_1, f_2; \lambda) = \det \begin{pmatrix} (A_{11}f_1, f_1)_1 - \lambda(f_1, f_1)_1 & (A_{12}f_1, f_1)_1 \\ (A_{21}f_1, f_2)_2 & (A_{22}f_2, f_2)_2 - \lambda(f_2, f_2)_2 \end{pmatrix}.$$

**Свойство 1.** *Имеет место соотношение:*

$$W^2(A) = \bigcup_{f_i \in H_i \setminus \{0\}, i=1,2} \sigma_p(A_f) = \{ \lambda \in C : \exists f_i \in H_i \setminus \{0\}, i = 1, 2, \det(A_f - \lambda) = 0 \} \\ = \{ \lambda \in C : \exists f_i \in H_i \setminus \{0\}, i = 1, 2, \Delta(f_1, f_2; \lambda) = 0 \}.$$

**Свойство 2.** *Квадратичный числовой образ всегда содержится в числовом образе:*

$$W^2(A) \subset W(A).$$

**Свойство 3.** *Если операторная матрица  $A$  имеет нижнюю или верхнюю треугольную форму, т. е.*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$\text{то } W^2(A) = W(A_{11}) \cup W(A_{22}).$$

Аналогично числовому образу значений, квадратичный числовой образ ограниченной блочно-операторной матрицы  $A$  является ограниченным подмножеством множества  $C$ :

$$W^2(A) \subset \{ \lambda \in C : |\lambda| \leq \|A\| \}$$

и оно замкнуто, если  $\dim H < \infty$ . В отличие от числового образа, квадратичный числовой образ, вообще говоря, невыпуклый и состоит из не более чем двух компонент. С другой стороны, квадратичный числовой образ обладает некоторыми аналогичными свойствами числового образа.

Литература:

1. Т. Като. Теория возмущения линейных операторов. М.: Мир, 1972.
2. H. Langer, C. Tretter. Spectral decomposition of some nonselfadjoint block operator matrices. J. Operator Theory, 39:2 (1998), 339–359.
3. H. Langer, A. S. Markus, V. I. Matsaev, C. Tretter. A new concept for block operator matrices: the quadratic numerical range. Linear Algebra Appl., 330:1–3 (2001), 89–112.
4. H. Langer, A. S. Markus, C. Tretter. Corners of numerical ranges. In Recent advances in operator theory Groningen, 1998), vol. 124 of Oper. Theory Adv. Appl., 385–400 (Birkhauser, Basel, 2001).
5. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
6. C. Tretter. Spectral inclusion for unbounded block operator matrices. J. Func. Anal., 256 (2009), 3806–3829.

## Построение эконометрических моделей и анализ факторов экспорта и импорта Санкт-Петербурга

Лапин Александр Вадимович, студент  
Санкт-Петербургский государственный университет

Большинство стран мира развивается через процесс интернациональной торговли. Отклонение от этого процесса безусловно ведет к застою развития научной мысли, замедлению темпов научно-технического прогресса, а также к объективному спаду в развитии экономики.

Исследование внешнеторгового оборота (ВТО) как страны в целом, так и отдельных регионов, является важной задачей в силу того, что значения данного показателя характеризуют рост и повышение эффективности экономики [1], [6].

В работе исследованы объемы экспорта и импорта Санкт-Петербурга со странами дальнего зарубежья и со странами СНГ в зависимости от различных факторов [2], [7]. В работе использованы математико-ста-

статические методы регрессионного анализа [3], [8], [9]. Информационно-эмпирическую базу исследования составляет статистический материал за 2000–2014 годы, опубликованный Федеральной службой государственной статистики РФ в ежегодных сборниках «Регионы России» [4]. Эконометрические расчеты проводились в среде программирования R [5], [10].

Доля Санкт-Петербурга во внешней торговле РФ составляет 4,8%. Основой внешнеэкономического потенциала региона является высокоразвитая промышленность, а также выгодное приграничное положение и наличие морского порта. Значительную часть внешнеторгового оборота Санкт-Петербурга составляет торговля со странами дальнего зарубежья (См. Рис. 1.).

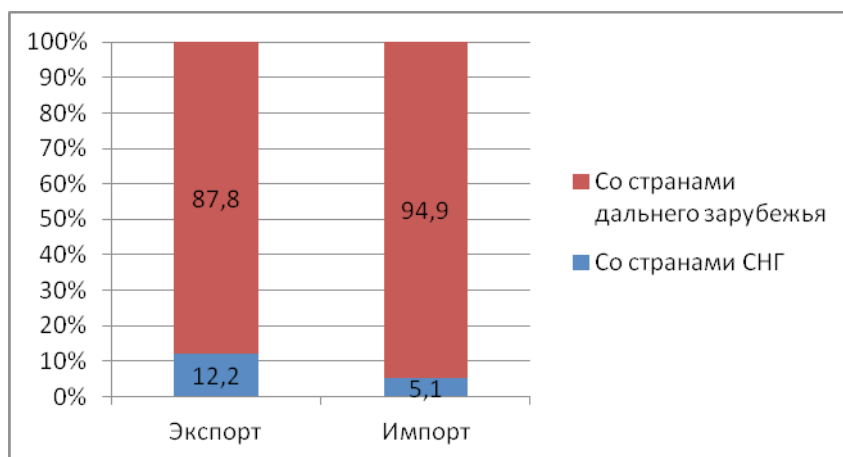


Рис. 1. Структура внешней торговли Санкт-Петербурга

На развитие внешнеторговых отношений влияет множество различных факторов, и для изучения потенциала развития региона важно знать, какие факторы оказывают наиболее сильное влияние. В качестве независимых переменных были выбраны 13 различных факторов, указанных на Рис. 2.

Целью работы является построение регрессионных моделей внешнеторгового оборота Санкт-Петербурга, отбор лучших из них, а также определение значимых факторов.

В работе построены линейные модели с помощью метода наименьших квадратов, а также нелинейные (квадратичная, гиперболическая, степенная, экспоненциальная, логарифмическая) с помощью соответствующих преобразований оценок коэффициентов МНК. Далее построены и исследованы многофакторные линейные и нелинейные модели.

Для каждой модели были построены поля корреляции. Также при построении множественных моделей были рассмотрены корреляционные матрицы и взаимозависимость факторов между собой. Большинство из них имеет сильную взаимозависимость, поэтому список факторов, которые можно включить во множественные модели был сильно ограничен для исключения случаев мультиколлинеарности.

Проверка выполнения основных предположений регрессионного анализа и качества моделей проводилась с помощью различных критериев: Стьюдента — для проверки значимости коэффициентов модели, Фишера — для проверки значимости модели в целом, Гольфельда-Квандта — для проверки гипотезы о наличии гетероскедастичности остатков, Дарбина-Уотсона — для проверки гипотезы о наличии автокорреляции остатков.

$x_i$	Факторы	Ед. измерения
$x_1$	Валовой региональный продукт	млн. руб.
$x_2$	Среднегодовая численность занятых в экономике	тыс. чел.
$x_3$	Среднедушевые доходы населения	руб.
$x_4$	Стоимость основных фондов отраслей экономики	млн. руб.
$x_5$	Число предприятий и организаций	шт.
$x_6$	Объем промышленной продукции	млн. руб.
$x_7$	Оборот розничной торговли	млн. руб.
$x_8$	Оборот оптовой торговли	млн. руб.
$x_9$	Объем платных услуг населению	млн. руб.
$x_{10}$	Инвестиции в основной капитал	млн. руб.
$x_{11}$	Иностранные инвестиции	тыс. \$
$x_{12}$	Стоимость фиксированного набора потребительских товаров и услуг	руб.
$x_{13}$	Среднегодовая цена на нефть марки Brent	\$

Рис. 2. Исследуемые факторы и единицы измерения

Также чтобы выбрать среди подходящих моделей лучшие, для каждой модели были подсчитаны коэффициент детерминации, остаточная сумма квадратов, средняя ошибка аппроксимации.

В результате проведенного исследования были построены модели экспорта и импорта со странами дальнего зарубежья и со странами СНГ. Среди большого числа моделей были выбраны следующие.

Модели экспорта со странами дальнего зарубежья.

$$y_1 = e^{-4.2918 x_{11}^{0.88075}}$$

При увеличении иностранных инвестиций на 1%,  $y_1$  увеличится на 0.88%.

$$y_1 = e^{-19.52811 x_5^{1.40024} x_{11}^{0.70695}}$$

При увеличении числа предприятий на 1%  $y_1$  увеличится на 1,4% (при неизменности иностранных инвестиций). При увеличении иностранных инвестиций на 1%  $y_1$  увеличится на 0.7% (при неизменности числа предприятий)

$$y_1 = e^{5.717 e^{0.0000051 x_5} e^{0.21 x_{13}}}$$

При росте числа предприятий на 1%  $y_1$  увеличится на 1,78% (при неизменности среднегодовой цены на нефть марки Brent). При увеличении среднегодовой цены на нефть марки Brent на 1%  $y_1$  увеличится на 14.23%

Модели импорта со странами дальнего зарубежья.

$$y_2 = -5559.06 + 342.35 x_{13}$$

При увеличении среднегодовой цены на нефть марки Brent на 1%,  $y_2$  увеличится на 1.31%.

$$y_2 = e^{-3.2898 x_9^{1.0701}}$$

При увеличении объема платных услуг населению на 1%  $y_2$  увеличится на 1,07%.

$$y_2 = e^{6.53 e^{0.000006 x_5} e^{0.000007 x_{11}}}$$

При росте числа предприятий на 1%  $y_2$  увеличится на 2.09% (при неизменности иностранных инвестиций). При увеличении иностранных инвестиций на 1%  $y_2$  увеличится на 3.59% (при неизменности числа предприятий).

Модели экспорта со странами СНГ.

$$y_3 = e^{-1.4115 x_{13}^{2.0247}}$$

При увеличении среднегодовой цены на нефть марки Brent на 1%,  $y_3$  увеличится на 2.02%.

$$y_3 = e^{-31.28619 x_5^{1.98436} x_{11}^{0.85424}}$$

При росте числа предприятий на 1%  $y_3$  увеличится на 1.98% (при неизменности иностранных инвестиций).

При увеличении иностранных инвестиций на 1%  $y_3$  увеличится на 0.85% (при неизменности числа предприятий).

Модели импорта со странами СНГ.

$$y_4 = 285.5 - 0.000045 x_{11} + 0.00000000000112 x_{11}^2$$

При увеличении иностранных инвестиций на 1%,  $y_4$  уменьшится на 0.32%.

$$y_4 = e^{5.04 e^{0.013 x_{13}}}$$

При увеличении среднегодовой цены на нефть марки Brent на 1%  $y_4$  увеличится на 0.88%.

$$y_4 = e^{-20.96 e^{0.0114 x_2} e^{-0.0000031 x_5}}$$

При среднегодовой численности занятых в экономике на 1%  $y_4$  увеличится на 28% (при неизменности числа организаций). При увеличении числа организаций на 1%  $y_4$  уменьшится на 1.08% (при неизменности среднегодовой численности занятых в экономике).

В результате были определены факторы, оказывающие влияние на внешнеторговый оборот Санкт-Петербурга. Следует обратить особое внимание на эти факторы при прогнозировании и анализе развития региона.

Стоит отметить, что большинство моделей не прошли этап верификации, так как они оказывались неадекватными, неточными или имели другие отклонения от основных предположений МНК: наблюдалась гетероскедастичность или автокорреляция остатков. Проводя проверку моделей на выбросы, было обнаружено немало выбросов в линейных моделях. Преимущественно данные 2007–2008 годов являлись выбросами в данных моделях. Очевидно, на зависимые переменные влияют также какие-либо другие скрытые факторы, которые довольно трудно обнаружить. Вероятно, это объясняется тем, что в 2007–

2008 годах был мировой финансовый кризис, а значит, экономика находилась под также влиянием внешних неконтролируемых факторов.

Безусловно, необходимо еще более подробно изучать внешнеторговый оборот как регионов, так и страны в целом, а также исследовать влияние других факторов.

Литература:

1. Региональная экономика: Учебник / Под ред. В. И. Видяпина, М. В. Степанова. М.: ИНФРА-М, 2007. 666 с.
2. Информационный ресурс «Федеральный справочник». URL: <http://federalbook.ru/files/FS/Soderjanie/FS-7/V/5.pdf/>
3. Эконометрика: учеб./Под ред. И. И. Елисеевой. М.: Проспект, 2010. 288 с.
4. Информационный ресурс «Федеральная служба государственной статистики». URL: <http://www.gks.ru/>
5. Р.И. Кабаков R в действии. Анализ и визуализация данных в программе R / пер. с англ. П. А. Волковой. М.: ДМК Пресс, 2014. 588 с.: ил.
6. Региональная экономика: учебник для академического бакалавриата / Под ред. Е. Л. Плисецкого, В. Г. Глушковой, М.: Издательство Юрайт, 2014. 583 с.
7. Талаев., М. С., Котилко В. В. Оценка факторов роста внешнеторгового оборота субъектов РФ // Российское предпринимательство, 2005. № 9 (69).с. 11–15.
8. Магнус, Я. Р., Катышев П. К., Пересецкий А. А. Эконометрика. Начальный курс: Учебник. — 8-е изд. М.: Дело, 2007. 504 с.
9. Буре, В. М., Евсеев Е. А. Основы эконометрики: Учеб. Пособие. СПб., 2004. 72 с.
10. Буре, В. М., Парилина Е. М., Седаков А. А., Шевкопляс Е. В. Прикладная статистика в R, STATISTICA и Excel. Описательная статистика. Оценивание параметров. Статистические критерии. Издательство Санкт-Петербургского государственного университета, 2011. 104 с.

## Формализация гражданского процесса при английском и американском судебном правиле в виде байесовской игры

Малафеев Олег Алексеевич, доктор физико-математических наук, профессор;

Рылов Денис Сергеевич, студент

Санкт-Петербургский государственный университет

Современные методы математики нашли широкое применение в моделировании социоэкономических систем [1–27] и, в частности, моделировании гражданских процессов, где истцы подают иски в суд для получения компенсации за причинённый ответчиком вред. Существенное влияние на финансовый результат судебной тяжбы оказывает размер потенциальных судебных издержек [28], которые во многом определяется применением английского или американского правила. Все юрисдикции мира, кроме США, используют английское правило [29]. При **американском правиле** каждая тяжущаяся сторона сама оплачивает все свои судебные издержки вне зависимости от исхода дела. При **английском правиле** судебные издержки победившей стороны оплачивает сторона проигравшая. Сравнительный анализ этих правил представлен в работах [30–34]. В настоящей статье формализуется новая модель судопроизводства при английском и американском правиле в виде байесовской игры.

Байесовской игрой  $G$  называется пятерка  $(N, \{A_i\}_{i \in N}, \{T_i\}_{i \in N}, \{\phi_i\}_{i \in N}, \{\mu_i\}_{i \in N})$ , где  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  — множество агентов;  $A_i$  — множество альтернатив агента  $i$ ;  $T_i$  — множество типов агента  $i$ ;  $\phi_i : A \times T \mapsto R$  — функция выигрыша агента  $i$ , где  $A = \prod_{i \in N} A_i$  — декартово произведение множеств альтернатив всех агентов,  $T = \prod_{i \in N} T_i$  — декартово произведение множеств типов всех агентов,  $R$  — множество вещественных чисел;  $\mu_i : T_i \mapsto \Delta(T_{-i})$  — представление агента  $i$  (о типах других агентов). Каждый агент точно знает свой тип, но не знает типов других агентов. Представление агента  $i$  для любого его типа  $t_i \in T_i$  задает распределение вероятностей  $\mu_i(\cdot | t_i)$  на множестве  $\Delta(T_{-i})$  типов других агентов, где  $T_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} T_j$ . Если все множества  $T_i$  конечны, то функцию  $\mu_i$  можно задать как  $\mu_i : T_{-i} \times T_i \mapsto [0, 1]$ . Тогда  $\mu_i(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n | t_i) = \mu_i(t_{-i} | t_i)$  — условная вероятность того, что типы других агентов суть соответственно  $t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$ , если тип агента  $i$  равен  $t_i$ . Выигрыш агента  $i$  зависит от типов агентов и выбранных ими альтернатив. Если сложилась ситуация  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ , где  $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2, \dots, s_n \in S_n$ , а типы игроков равняются  $t_1 \in T_1, t_2 \in T_2, \dots, t_n \in T_n$ , то выигрыш агента  $i$  составляет  $\phi_i(s_1, \dots, s_n; t_1, \dots, t_n)$ . Обозначим байесовские игры, моделирующие судопроизводственный процесс при английском правиле и американском правиле, через  $G_{Eng}$  и  $G_{Am}$  соответственно.

При подаче искового заявления, истец обязан указать сумму компенсации, обозначаемую через  $W$ , и в ходе судебного процесса доказать ее обоснованность. Если суд в достаточной мере согласится с доводами истца, то ему будет присуждена требуемая сумма. Для простоты модели предполагается, что суд не может изменить сумму требуемой компенсации, а только вынести вердикт в пользу истца или ответчика. Агрегируем все судебные издержки истца в одну величину  $C_p$ . Ответчик тратится на аналогичные издержки, обозначим их через  $C_d$ . Пусть  $p_p$  — вероятность истца выиграть дело по мнению истца,  $p_d$  — вероятность истца выиграть дело по мнению ответчика.

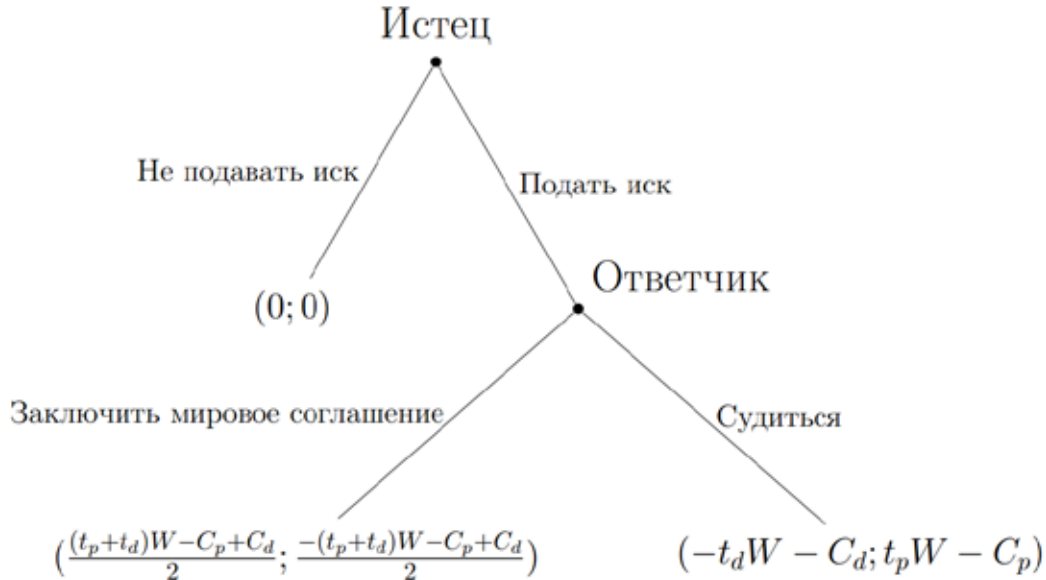


Рис. 1. Игра в позиционной форме при американском правиле

Судебный процесс может быть начат, только если истец подаст иск, т. е. заполнит исковое заявление. Разумеется, что истец может выбрать бездействие и не заполнять исковое заявление. Если истец все же подает иск, то суд отводит ответчику время на досудебное урегулирование конфликта. Ответчик может попытаться заключить мировое соглашение с истцом. Для упрощения модели предполагается, что заключение мирового соглашения бесплатно и происходит до момента траты обеих тяжущихся сторон на судебные издержки. При заключении мирового соглашения ответчик передает истцу некоторую сумму денег, а истец прекращает судебное преследование. Заключение мирового соглашения может состояться только с согласия истца и ответчика. Если истец или ответчик не согласен заключить мировое соглашение, то состоится суд, который вынесет вердикт в пользу одной из тяжущихся сторон.

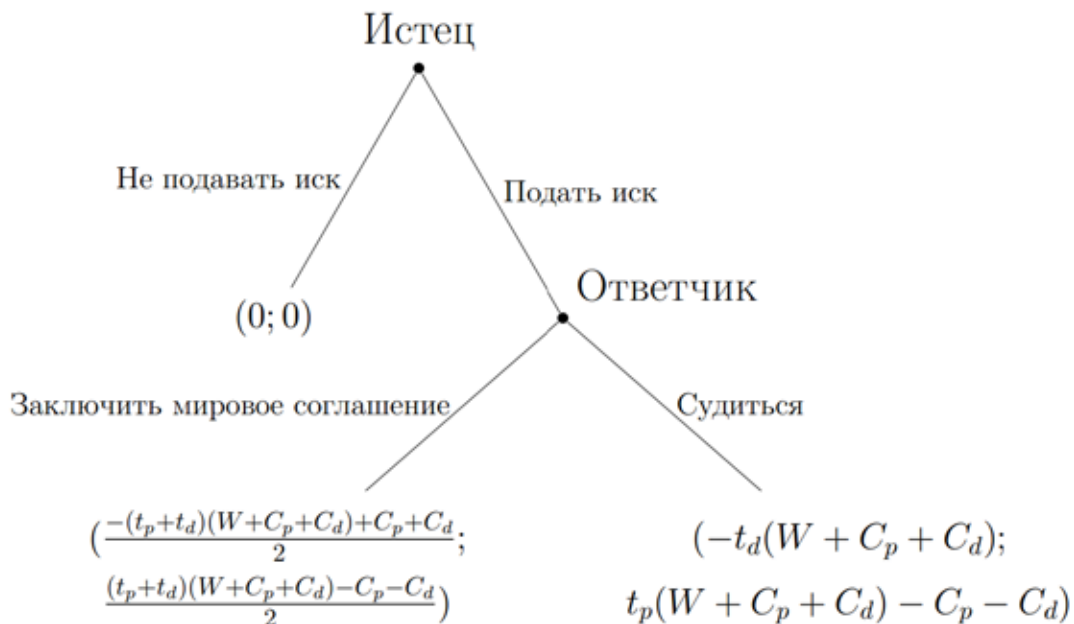


Рис. 2. Игра в позиционной форме при английском правиле

На рисунках 1 и 2 выигрыши истца и ответчика записаны в форме  $(D; P)$ , где  $D$  — выигрыш ответчика, а  $P$  — выигрыш истца.

Формализуем игры  $G_{Eng}$  и  $G_{Am}$ . В обеих играх участвуют два агента:  $N = \{1,2\}$ , где первый агент — истец, а второй агент — ответчик. Истец может выбрать одну из двух альтернатив: подать иск в суд или не подавать иск в суд. Обозначим первую альтернативу через  $A_1^1$ , а вторую через  $A_1^2$ , тогда  $A_1 = \{A_1^1, A_1^2\}$ . Ответчик может выбрать одну из двух альтернатив: заключить мировое соглашение или судиться. Обозначим первую альтернативу через  $A_2^1$ , а вторую через  $A_2^2$ , тогда  $A_2 = \{A_2^1, A_2^2\}$ . Истец типа  $t_p \in T_1$  считает, что его шанс выиграть дело равен  $t_p$ , соответственно  $T_1 = [0,1]$ . Ответчик типа  $t_d \in T_2$  считает, что шанс истца выиграть дело равен  $t_d$ , соответственно  $T_2 = [0,1]$ . Тяжущиеся стороны не знают субъективных оценок друг друга и предполагают, что их оценки одинаковы. Соответственно  $\mu_1 : T_1 \mapsto T_2$  и  $\mu_2 : T_2 \mapsto T_1$  — функции тождества. Обозначим функции выигрыша истца  $\phi_1$  и ответчика  $\phi_2$  при английском и американском правиле через  $\phi_1^{Eng}, \phi_2^{Eng}$  и  $\phi_1^{Am}, \phi_2^{Am}$ . Если истец не подает иск в суд, то функции выигрыша истца и ответчика принимаются нулевыми. Размер компенсации истца при заключении мирового соглашения равен среднеарифметическому значению выигрыша истца и отрицательного выигрыша ответчика в случае судебного разбирательства.

Таблица 1. Функция выигрыша истца

	$\phi_1(A_1^1, A_2^1, t_p, t_d)$	$\phi_1(A_1^1, A_2^2, t_p, t_d)$	$\phi_1(A_1^2, A_2^2, t_p, t_d)$ $\phi_1(A_1^2, A_2^1, t_p, t_d)$
Американское правило	$t_p W - C_p$	$\frac{(t_p + t_d)W - C_p + C_d}{2}$	0
Английское правило	$t_p(W + C_p + C_d) - C_p - C_d$	$\frac{(t_p + t_d)(W + C_p + C_d) - C_d - C_p}{2}$	0

Таблица 2. Функция выигрыша ответчика

	$\phi_2(A_1^1, A_2^1, t_p, t_d)$	$\phi_2(A_1^1, A_2^2, t_p, t_d)$	$\phi_2(A_1^2, A_2^2, t_p, t_d)$ $\phi_2(A_1^2, A_2^1, t_p, t_d)$
Американское правило	$-t_d W - C_d$	$-\frac{(t_p + t_d)W - C_p + C_d}{2}$	0
Английское правило	$-t_d(W + C_p + C_d)$	$-\frac{(t_p + t_d)(W + C_p + C_d) + C_d + C_p}{2}$	0

Байесовская игра  $G_{Eng}$  задаётся пятеркой

$$G_{Eng} = (\{1,2\}, \{A_1, A_2\}, \{T_1, T_2\}, \{\phi_1^{Eng}, \phi_2^{Eng}\}, \{\mu_1, \mu_2\}),$$

$$G_{Am} = (\{1,2\}, \{A_1, A_2\}, \{T_1, T_2\}, \{\phi_1^{Am}, \phi_2^{Am}\}, \{\mu_1, \mu_2\}).$$

Литература:

1. Григорьева, К.В. Динамический процесс кооперативного взаимодействия в многокритериальной (много-агентной) задаче почтальона / К.В. Григорьева, О.А. Малафеев // Вестник гражданских инженеров. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГАСУ, 2011. — № 1. — С. 150–156.

2. Колокольцов, В. Н. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев // Вестник гражданских инженеров. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГАСУ, 2010. — № 4. — С. 144–153.
3. Колокольцов, В. Н. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть II) / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев // Вестник гражданских инженеров. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГАСУ, 2011. — № 1. — С. 134–145.
4. Дроздова, И. В. Эффективность вариантов реконструкции городской жилой застройки / И. В. Дроздова, О. А. Малафеев, Л. Г. Паршина // Экономическое возрождение России. — Санкт-Петербург: Изд-во ИНИР, 2008. — № 3. — с. 63–67.
5. Малафеев, О. А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение / О. А. Малафеев, А. И. Муравьев. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУЭФ, 2000. — Т. 1. — 283 с.
6. Малафеев, О. А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение / О. А. Малафеев, А. И. Муравьев. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ ЭиФ, 2001. — Т. 2. — 294 с.
7. Григорьева, К. В. Методы решения динамической многокритериальной задачи почтальона / К. В. Григорьева, О. А. Малафеев // Вестник гражданских инженеров. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГАСУ, 2011. — № 4. — с. 156–161.
8. Малафеев, О. А. Математическое моделирование развития компании / О. А. Малафеев, К. С. Черных // Экономическое возрождение России. — Санкт-Петербург: Изд-во ИНИР, 2004. — № 1. — с. 60–66.
9. Малафеев, О. А. Конкурентное управление в моделях аукционов / О. А. Малафеев, К. Н. Грицай // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: сб. науч. трудов ПГНИУ. — Пермь, 2004. — № 36. — с. 74–82.
10. Ершова, Т. А. Конфликтные управления в модели вхождения в рынок / Т. А. Ершова, О. А. Малафеев // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: сб. науч. трудов ПГНИУ. — Пермь, 2004. — № 36. — с. 19–27.
11. Малафеев, О. А. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах / О. А. Малафеев, А. И. Муравьев. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ ЭиФ, 1998. — Т. 2. — 317 с.
12. Малафеев, О. А. Равновесие в диффузионной конфликтной модели экономики со многими участниками / О. А. Малафеев, М. С. Троева // Вопросы механики и процессов управления. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2004. — № 22. — с. 146–153.
13. Малафеев, О. А. Многоагентное взаимодействие в динамической задаче управления венчурными строительными проектами / О. А. Малафеев, О. С. Зенович, В. К. Севек // Экономическое возрождение России. — Санкт-Петербург: Изд-во ИНИР, 2012. — № 1. — с. 124–131.
14. Малафеев, О. А. Компромисс и равновесие в моделях многоагентного управления в коррупционной сети социума / О. А. Малафеев, Д. С. Бойцов, Н. Д. Рединских, Е. Г. Неверова // Молодой ученый. — Казань, 2014. — № 10 (69). — с. 14–17.
15. Колпак, Е. П. Математическая модель стачечного движения в России в начале XX века / Е. П. Колпак, А. И. Бронникова, В. Ю. Полежаев // Молодой ученый. — 2015. — № 3. — с. 4–15.
16. Колпак, Е. П. О численных методах решения эволюционных уравнений на примере математической модели «хищник-жертва» / Е. П. Колпак, И. В. Жукова, Д. С. Степанова, А. В. Крицкая // Молодой ученый. — 2014. — № 4. — с. 20–30.
17. Колпак, Е. П. Математическая модель логистической популяции на линейном ареале / Е. П. Колпак, Е. А. Горбунова, М. В. Столбовая, Ю. Е. Балыкина // Молодой ученый. — 2014. — № 3. — с. 6–14.
18. Малафеев, О. А. Динамическая нестационарная задача инвестирования проектов в условиях конкуренции / О. А. Малафеев, О. В. Пахар // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: сб. науч. трудов ПГНИУ. — Пермь, 2009. — № 41. — с. 103–108.
19. Грицай, К. Н. Задача конкурентного управления в модели многоагентного взаимодействия аукционного типа / К. Н. Грицай, О. А. Малафеев // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: сб. науч. трудов ПГНИУ. — Пермь, 2007. — № 39. — с. 36–45.
20. Малафеев, О. А. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях: учебное пособие. / О. А. Малафеев, А. Ф. Зубова. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2001. — 101 с.
21. Григорьева, К. В. Статистическая коалиционная модель инвестирования инновационных проектов / К. В. Григорьева, А. С. Иванов, О. А. Малафеев // Экономическое возрождение России. — Санкт-Петербург: Изд-во ИНИР, 2011. — № 4. — с. 90–98.
22. Гордеев, Д. А. Стохастическая модель принятия решения о выводе на рынок инновационного продукта / Д. А. Гордеев, О. А. Малафеев, Н. Д. Титова // Вестник гражданских инженеров. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГАСУ, 2011. — № 2. — с. 161–166.

23. Парфенов, А. П. Равновесие и компромиссное управление в сетевых моделях многоагентного взаимодействия / А. П. Парфенов, О. А. Малафеев // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы: сб. науч. трудов ПГНИУ. — Пермь, 2007. — № 39. — с. 154–167.
24. Малафеев, О. А. Устойчивость и некоторые численные методы в конфликтно управляемых системах / О. А. Малафеев, М. С. Троева. — Якутск: Изд-во ЯГУ, 1998. — 102 с.
25. Малафеев, О. А. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости, надежности) / О. А. Малафеев, А. Ф. Зубова. — Санкт-Петербург: Мобильность-плюс, 2006. — 1006 с.
26. Малафеев, О. А. Управляемые конфликтные системы / О. А. Малафеев. — Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2000. — 280 с.
27. Акуленкова, И. В. Проблемы реконструкции жилищно-коммунального хозяйства мегаполиса, монография / И. В. Акуленкова, Г. Д. Дроздов, О. А. Малафеев. — Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики, 2007. — 187 с.
28. Lewis, R. Tort personal injury claims statistics: Is there a compensation culture in the United Kingdom / Richard Lewis, Annette Morris, Ken Oliphant // Torts Law Journal. — 2006. — Vol. 14, no. 2. — P. 158–175.
29. Capisio, M. V. Awards of Attorneys Fees by Federal Courts, Federal Agencies and Selected Foreign Findings / Mary V. Capisio, Henry Cohen. — New York: Nova Publishers, 2002.
30. Gould, J. P. The economics of legal conflicts / John P. Gould // The Journal of Legal Studies. — 1973. — Vol. 2, no. 2. — P. 55–81.
31. Posner, R. A. An economic approach to legal procedure and judicial administration / Richard A. Posner // The Journal of Legal Studies. — 1973. — Vol. 2, no. 2. — P. 399–458.
32. Landes, W. M. An economic analysis of the court / William M. Landes // Journal of Law and Economics. — 1971. — Vol. 14, no. 1. — P. 61–107.
33. Bebchuk, L. A. Litigation and settlement under imperfect information / Lucian Arye Bebchuk // Rand Journal of Economics. — 1984. — Vol. 15, no. 3. — P. 404–415.
34. Schwab, C. Free choice of legal fee shifting rules? / Christian Schwab, Hin-Yue Benny Tang, Stefan Winter // European Journal of Law and Economics. — 2014. — Vol. 37, no. 2. — P. 229–324.

## Описание множества собственных значений одной блочной операторной матрицы размера $2 \times 2$

Мирзакобилов Равшан Норкузиевич, ассистент  
Джизакский политехнический институт (Узбекистан)

Блочно-операторные матрицы — это матрицы, элементы которых являются линейными операторами, определенными между банаховым или гильбертовым пространством. Такие операторы возникают в статистической физике, теории твердого тела, теории химических реакции, магнито-гидродинамике, квантовой механике и т. д. Недавно в монографии [1] подробно изучены абстрактные свойства ограниченных и неограниченных блочно-операторных матриц и их применения в некоторых задачах математической физики.

В настоящей работе рассматривается блочно-операторная матрица  $A$  действующая в так называемом двухчастичном обрзанном подпространстве Фоковского пространства. Описан дискретный спектр оператора  $A$  и задача состоит в обосновании этих описаний.

Отметим, что оператор  $A$  можно рассмотреть как одномерное возмущение оператора  $A_0$ , рассмотренного в работах [2, 3], где изучены пороговые явления для оператора  $A_0$ .

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  — компактное связанное множество,  $L_2(\Omega)$  — гильбертово пространство квадратично интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $\Omega$  и  $\mathbb{C}$  — одномерное комплексное пространство.

Обозначим

$$H_0 = \mathbb{C}, \quad H_1 = L_2(\Omega), \quad H = H_0 \oplus H_1.$$

Гильбертово пространство  $H$  называется *трехчастичным обрзаным подпространством* Фоковского пространства.



Рассмотрим блочно-операторную матрицу  $A$ , действующую в гильбертовом пространстве  $H$  и задающуюся как

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы  $A_{ij} : H_j \rightarrow H_i, i, j = 0,1$  определяются по формулам

$$(A_{00}f_0)_0 = \omega_0 f_0, \quad (A_{01}f_1)_0 = \int \nu_0(s) f_1(s) ds,$$

$$A_{11} = A_{11}^0 - \nu, \quad (A_{11}^0 f_1)_1(p) = w_1(p) f_1(p), \quad (\nu f_1)_1(p) = \nu_1(p) \int \nu_1(s) f_1(s) ds.$$

Здесь  $f_i \in H_i, i = 0,1, w_0$  — фиксированное вещественное число,  $\nu_i(\cdot), i = 0,1$  — вещественнозначные непрерывные (ненулевые) функции на  $\Omega$ . Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В современной математической физике оператор  $A_{01}$  называется оператором уничтожения, а оператор  $A_{01}^*$  называется оператором рождения, см. [4]. Оператор уничтожения снижает количество частиц в заданном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу, и является сопряженным к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности, в изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц.

Легко можно проверить, что оператор  $A$ , определенный операторной матрицей (1) и действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , является ограниченным и самосопряженным.

Следует отметить, что оператор типа (1) является оператором, носящим название обобщенной модели Фридрихса. Как таковая, обобщенная модель Фридрихса введена в работе [5], где были изучены ее собственные значения и «резонансы» (особенности аналитического продолжения резольвенты). А в работе [6] оно рассматривается как двухканальная молекулярно-резонансная модель.

Обозначим через  $\sigma_{ess}(\cdot)$  и  $\sigma_{disc}(\cdot)$ , соответственно, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Пусть оператор  $A_0$  действует в  $H$  как

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11}^0 \end{pmatrix}$$

Оператор возмущения  $A - A_0$  оператора  $A_0$  является ограниченным самосопряженным оператором ранга не более чем 3. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля (см. [7], теорема XIII.14) о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора  $A$  совпадает с существенным спектром оператора  $A_0$ . Известно, что

$$\sigma_{ess}(A_0) = [m; M],$$

где числа  $m$  и  $M$  определяются равенствами

$$m = \min_{p \in \Omega} \omega_1(p), \quad M = \max_{p \in \Omega} \omega_1(p).$$

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(A) = [m; M]$$

Сформулируем основные результаты работы.

**Теорема 1.** *Оператор  $A$  может иметь не более двух (не более одного) простых собственных значений, лежащих левее  $m$  (правее  $M$ ).*

Далее, для формулировки второго результата работы вводим операторы

$$A_1 \equiv A_{11} \text{ и } A_2 = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{10}^* & A_{11}^0 \end{pmatrix}.$$

Из определения операторов  $A_i, i = 1,2$ , видно, что они имеют более простую структуру чем  $A$ .

**Теорема 2.** *Если один из операторов  $A_1$  или  $A_2$  имеет собственное значение  $E \in (-\infty, m)$ , тогда оператор  $A$  имеет единственное простое собственное значение на  $(-\infty, E)$ .*

Литература:

1. C. Tretter. Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
2. Т.Х. Расулов. О существовании виртуального уровня обобщенной модели Фридрихса. Узбекский Математический Журнал. 2007, № 4, стр. 56–63.
3. Т.Х. Расулов. О собственных значениях обобщенной модели Фридрихса. Узбекский математический журнал, 2006, № 4, стр. 61–68.
4. К.О. Фридрихс. Возмущения спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1972.
5. С.Н. Лакаев. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. Труды семинара им. И.Г. Петровского, 11 (1986), 210–223.
6. A.K. Motovilov, W. Sandhas, Y.B. Belyaev. Perturbation of a lattice spectral band by a nearby resonance. J. Math. Phys., 42 (2001), 2490–2506.
7. М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики, т. 4. Анализ операторов, М.: Мир. 1982.

## Новые обобщения определения параболы

Смирнова Татьяна Александровна, магистрант;  
Колотов Михаил Евгеньевич, магистрант  
Санкт-Петербургский государственный университет

Целью работы является обобщение определения параболы в том случае, когда фокус превращается в фокальную окружность.

Парабола — геометрическое место точек, равноудалённых от данной прямой (называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы) [1, с. 85].

Каноническое уравнение параболы в прямоугольной системе координат:  $y^2 = 2px$ .

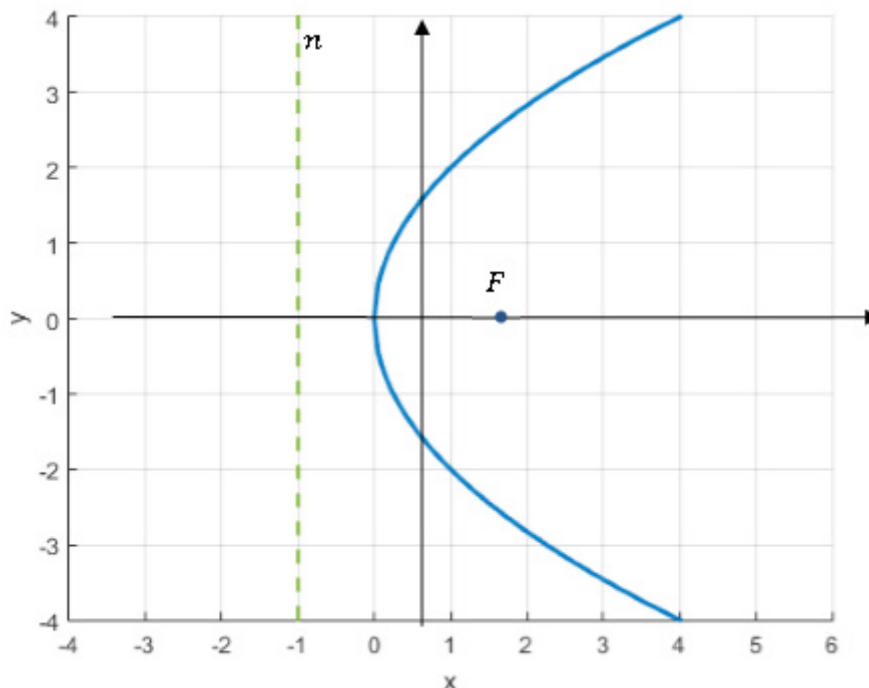


Рис. 1. Парабола

Директриса — прямая  $n$ , лежащая в плоскости конического сечения и обладающая тем свойством, что отношение расстояния от любой точки кривой до фокуса  $F$  кривой к расстоянию от той же точки до этой прямой есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

Эксцентриситет — числовая характеристика конического сечения, показывающая степень его отклонения от окружности. Для параболы эксцентриситет равен 1.

В данной работе исследуется случай, при котором вместо фокуса-точки рассматривается фокальная окружность радиуса  $r$ , центр которой находится в начале системы координат.

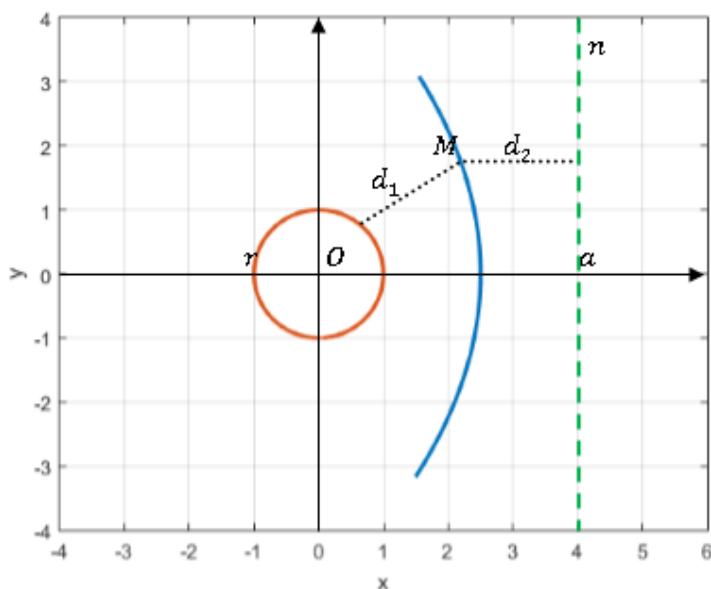


Рис. 2. Фокальная окружность

Найдем  $d_1$  и  $d_2$ , если точка  $M$  расположена вне круга:

$$\begin{cases} d_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - r; \\ d_2 = |a - x| \end{cases}$$

тогда уравнение геометрического места точек:

$$\sqrt{x^2 + y^2} - r = |a - x|. \tag{1}$$

Если же точка  $M$  расположена внутри круга, то:

$$\begin{cases} d_1 = r - \sqrt{x^2 + y^2}; \\ d_2 = |a - x| \end{cases}$$

$$r - \sqrt{x^2 + y^2} = |a - x|. \tag{2}$$

Для описания данного геометрического места точек необходимо отдельно рассмотреть следующие случаи:

1. Точка  $M$  находится вне окружности (и на ее границе):
  - a.  $x < a$  — Рассматривается участок слева от директрисы.
  - b.  $x > a$  — Рассматривается участок справа от директрисы.
  - c.  $x = a$ .
2. Точка  $M$  находится внутри окружности:
  - a.  $x < a$  — Рассматривается участок слева от директрисы.
  - b.  $x > a$  — Рассматривается участок справа от директрисы.
  - c.  $x = a$ .

Рассмотрим все случаи  $(a, b, c)$  для уравнения (1). Перенесем  $r$  в правую часть и избавимся от радикала, возведя обе части в квадрат:

$$x^2 + y^2 = r^2 + 2r|a - x| + (a - x)^2;$$

раскроем модуль для случая 1.а:

$$x^2 + y^2 = r^2 + 2ra - 2rx + (a - x)^2.$$

Сгруппировав слагаемые и вынесем общие множители, получим следующее уравнение:

$$y^2 = -2x(r + a) + (r + a)^2;$$

которое можно привести к виду  $y^2 = 2px$ :

$$y^2 = -2(r + a) \left( x - \frac{(r + a)}{2} \right).$$

Однако для построения графиков удобнее будет воспользоваться следующим видом:

$$y = \pm \sqrt{-2x(r + a) + (r + a)^2};$$

Очевидно, что обязательно подкоренное выражение не должно быть отрицательным. Рассмотрим данное неравенство подробнее.

$$\begin{cases} -2x(r + a) + (r + a)^2 \geq 0 \\ x(r + a) \leq 0.5(r + a)^2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x \leq \frac{(r + a)}{2}, & r + a > 0; \\ x \geq \frac{(r + a)}{2}, & r + a < 0; \\ x \in \mathbb{R}, & r + a = 0; \end{cases}$$

Таким образом, необходимо учитывать ряд ограничений на область определения:

$$\begin{cases} x < a \\ \begin{cases} x \leq \frac{(r + a)}{2}, & r + a > 0 \\ x \geq \frac{(r + a)}{2}, & r + a < 0; \\ x \in \mathbb{R}, & r + a = 0 \end{cases} \end{cases}$$

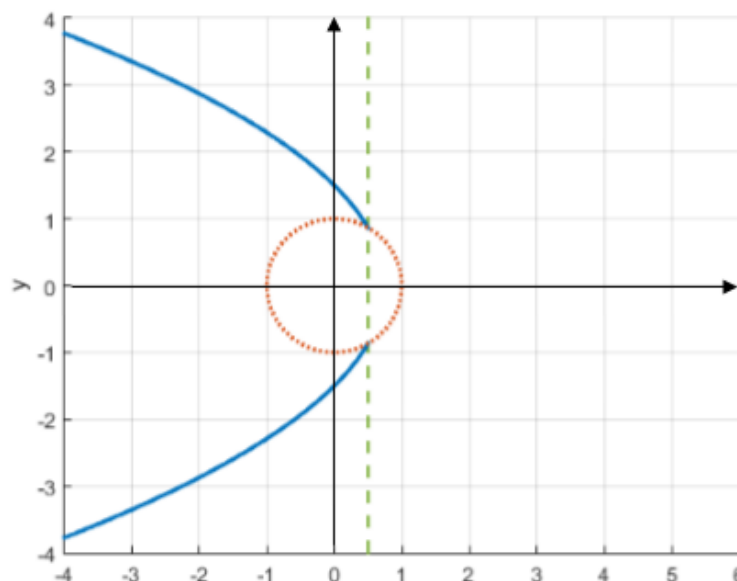


Рис. 3. ГМТ 1.а при  $a = 0.5, r = 1$ .

Рассматривая аналогичным образом случаи 1.б и 1.с, получим:

Для 1.б:

$$y = \pm\sqrt{2x(r-a) + (r-a)^2};$$

$$\begin{cases} x > a \\ x \geq \frac{(a-r)}{2}, & r-a > 0 \\ x \leq \frac{(a-r)}{2}, & r-a < 0 \\ x = \frac{(a-r)}{2}, & r-a = 0 \end{cases};$$

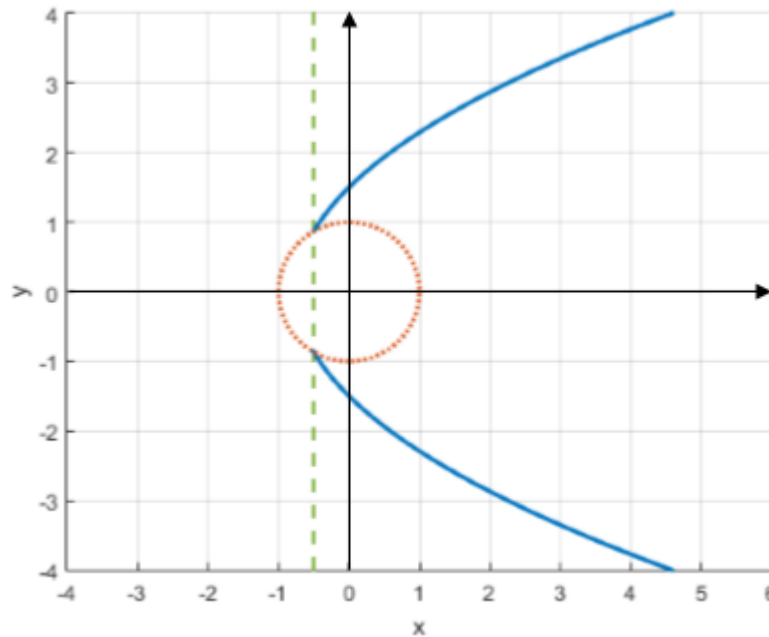


Рис. 4. ГМТ 1.б при  $\alpha = -0.5, r = 1$ .

Для 1.с:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r;$$

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

$$\xrightarrow{x=a} \begin{cases} y = \pm\sqrt{r^2 - a^2} \\ r^2 \geq a^2 \end{cases}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая 2. Так как расстояние от любой точки внутри окружности до ее границы не может превосходить радиус этой окружности ( $d_1 \leq r$ ), то логично потребовать этого же и от расстояния до прямой:  $d_2 \leq r$ . Что, в свою очередь, даст условие  $|x - a| \leq r$ . В (2) подставим условия случая 2.а:

$$r - \sqrt{x^2 + y^2} = |a - x|;$$

$$r - \sqrt{x^2 + y^2} = a - x;$$

перенесем  $r$  в правую часть и избавимся от радикала, возведя обе части в квадрат:

$$x^2 + y^2 = r^2 - 2r(a - x) + (a - x)^2;$$

возведя обе части равенства в квадрат, получим:

$$y^2 = -2x(a - r) + (r - a)^2;$$

$$y^2 = -2(a - r)\left(x - \frac{a + r}{2}\right).$$

Также на область определения накладывается условие расположения внутри окружности:  $x^2 + y^2 < r^2$ , где  $y^2$  определяется соответствующим рассматриваемому случаю уравнением ГМТ. Для случая 2.a:

$$x^2 + y^2 < r^2;$$

$$y^2 = -2x(a - r) + (r - a)^2;$$

$$x^2 + 2(r - a)x + (a^2 - 2ra) < 0.$$

Старший коэффициент параболы больше нуля, следовательно, допустимая область находится между корнями уравнения. Решим данное квадратное уравнение:

$$x_{1,2} = a - r \pm r.$$

Таким образом, в случае 2.a:

$$y = \pm\sqrt{2x(r - a) + (r - a)^2};$$

$$\begin{cases} x < a \\ x_2 < x < x_1 \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq \frac{(a - r)}{2}, & r - a < 0; \\ x \geq \frac{(a - r)}{2}, & r - a > 0 \\ x - \forall, & r - a = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

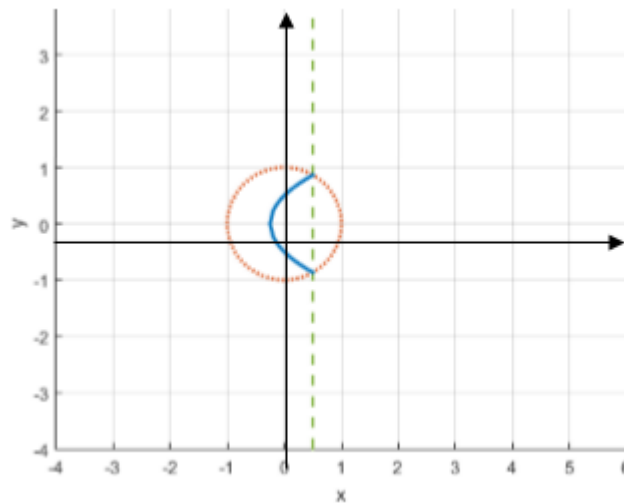


Рис. 5. ГМТ 2.a при  $a = 0.5, r = 1$ .

Перейдем к случаю 2.b. Аналогично с 2.a, получим ГМТ:

$$y = \pm\sqrt{-2x(r + a) + (r + a)^2};$$

$$\begin{cases} x > a \\ x_2 < x < x_1, x_{1,2} = r + a \pm r \\ \left[ \begin{array}{l} x \leq \frac{r + a}{2}, & r + a > 0 \\ x \geq \frac{r + a}{2}, & r + a < 0 \\ x - \forall, & r + a = 0 \end{array} \right. \end{cases}$$

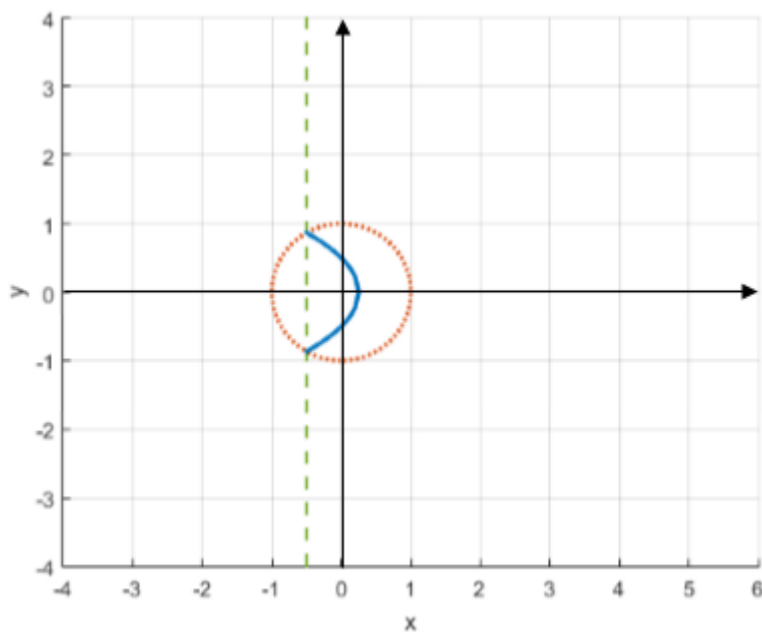


Рис. 6. ГМТ 2.б при  $\alpha = -0.5, r = 1$ .

В целом, случай 2.с аналогичен случаю 1.с:

$$x^2 + y^2 = r^2;$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \pm \sqrt{r^2 - a^2} \\ r^2 \geq a^2 \end{cases}$$

Можно сделать вывод, что при  $r < |a|$ , будет наблюдаться следующая картина:

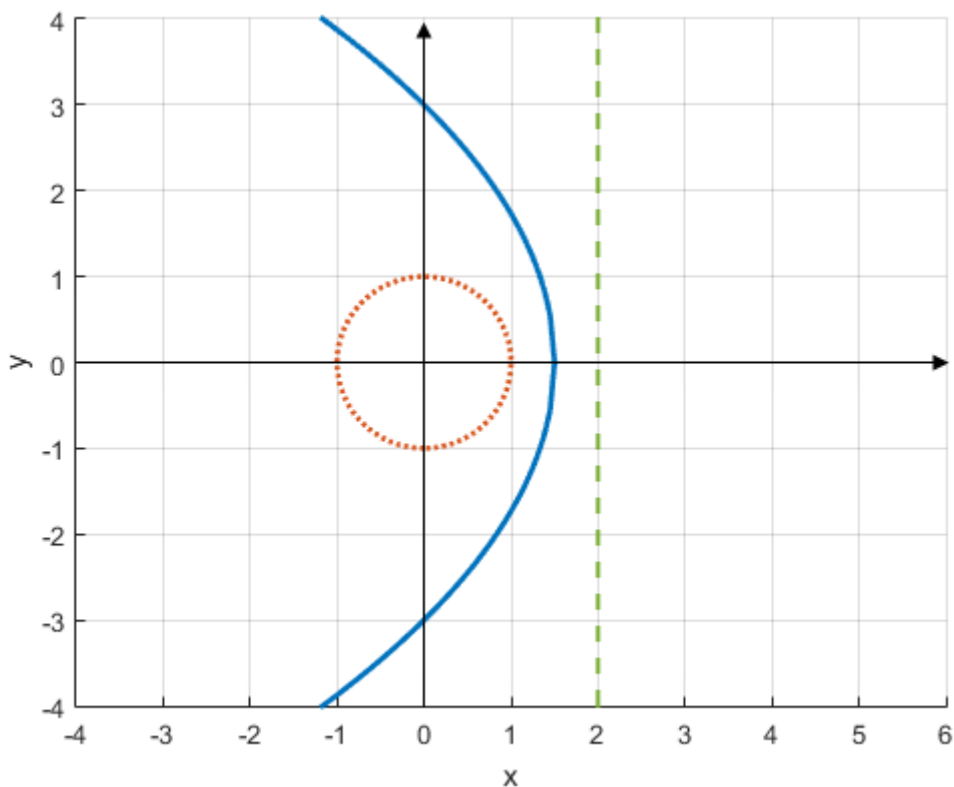


Рис. 7. Авторская парабола при  $r < |a|$ .

Иначе, при  $r \geq |\alpha|$ :

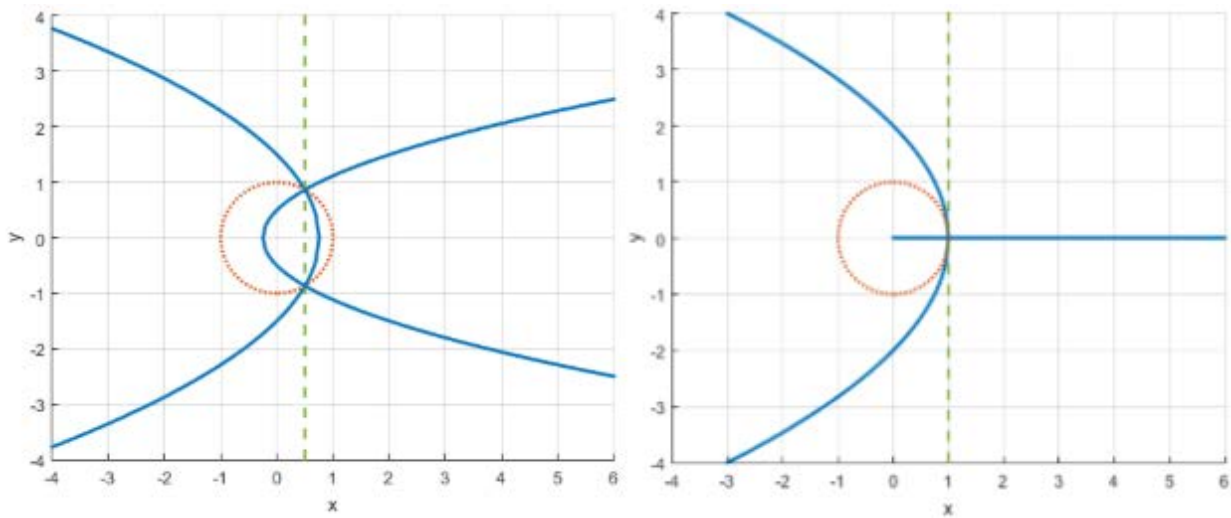


Рис. 8. Авторская парабола при  $r \geq |\alpha|$ .

В результате исследования найдены возможные обобщения параболы в случае, когда фокус превращается в фокальную окружность. Эти обобщения представлены на рисунках 6–8.

Литература:

1. Д. В. Клетеник «Аналитическая геометрия»

### Оценка погрешности кубатурных формул общего вида над фактор-пространством Соболева

Хаятов Хуршиджон Усманович, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

*В работе в пространстве  $L_2^m(S)$ -функций, заданных на сфере  $S$  и обладающих квадратично суммируемыми обобщенными производными порядка  $m$ , вычислены нормы функционала погрешности весовой кубатурной формулы с производными. А также исследовано выражение нормы функционала погрешности для двухмерной единичной сферы.*

*In the work in the space  $L_2^m(S)$  of functions given on sphere  $S$  and possessing square integrable generalized derivatives of  $m$ -th order the norm of the error functional of weight cubature formulas with derivative is calculated. Furthermore, the expression of the norm of the error functional on two dimensional unique sphere is investigated.*

Пусть функции  $f(\theta)$ , заданные на единичной сфере  $S$  принадлежат некоторому Банаховому пространству  $B$ , вложенному в пространство  $C(S)$  непрерывных функций на  $S$ . Функции  $f(\theta) \in B$  продолжим на все пространство  $R^n$ , считая их постоянными на лучах, выходящих из центра сферы  $S$  и будем обозначать через  $\bar{f}(x)$ .

Рассмотрим погрешность кубатурной формулы

$$\int_S P(\theta) f(\theta) \alpha \theta \approx \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^\lambda), \tag{1}$$

на функциях из  $B$ :

$$\ell_N^{(\alpha)}[f] = \langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle = \int_S P(\theta) f(\theta) \alpha \theta - \sum_{|\alpha| \leq l} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} f^{(\alpha)}(\theta^\lambda) = \int_{R^n} \ell_N^{(\alpha)} f(x) dx, \tag{2}$$



$$\ell_N^{(\alpha)}(x) = \delta_S(1-r)p(x) - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda^{(\alpha)} \delta^{(\alpha)}(x - \theta^{(\lambda)}),$$

$\delta_S(1-r), \delta(x - \theta^{(\lambda)})$  — дельта функции Дирака,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ ,

$$\sum_{\lambda=1}^N C_\lambda = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \widehat{P}_{0,0}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \text{ и } P(\theta) \in L(S), 0 \leq t \leq m, \widehat{P}_{0,0} -$$

нулевой коэффициент Фурье  $P(\theta)$ .

Функция  $f_0 \in B$ , для которой имеется место равенство

$$|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| \cdot \|f_0 \mid B\|,$$

называется *экстремальной функцией*.

Погрешность (2) кубатурной формулы (1), очевидно, является функционалом, заданном на  $B$  в силу предположения вложенности  $B \rightarrow C(S)$  [1], этот функционал  $\ell_N^{(\alpha)}$  будет непрерывным. Поэтому он и его норма определяются по формуле [3]

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| = \sup_{f \in B, f \neq 0} \frac{|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle|}{\|f \mid B\|}.$$

Функция  $f_0 \in B$ , для которой имеется место равенство

$$|\langle \ell_N^{(\alpha)}, f \rangle| = \left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid B^* \right\| \cdot \|f_0 \mid B\|,$$

называется *экстремальной функцией*.

Таким образом, задача оценки погрешности кубатурной формулы на функциях некоторого пространства  $B$ , равносильна вычислению значения нормы функционала погрешности в сопряжённом к  $B$  пространстве  $B^*$  или что тоже самое, нахождению экстремальной функции для данной кубатурной формулы. Для решения этой задачи в качестве  $B$  возьмём пространство  $L_2^m(S)$  — функций заданных на  $S$  и обладающих квадратично суммируемыми обобщёнными производными порядка  $m$ , норма которых определяется равенством

$$\left\| f(\theta) \mid L_2^m(S) \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m, \tag{3}$$

и предположим, что  $2m > n$ .

Справедлива следующая

**Теорема.** Норма функционала погрешности  $\ell_N^{(\alpha)}$  кубатурной формулы (1) над пространством  $L_2^{m*}(S)$  равна

$$\left\| \ell_N^{(\alpha)} \mid L_2^{m*}(S) \right\| = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \widehat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq t} \sum_{\lambda=1}^N c_\lambda^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{1/2},$$

где  $\widehat{P}_{k,\ell} = \int_S P(\theta) Y_{k,\ell}(\theta) d\theta$ .

На основании этой теоремы, функционал погрешности кубатурной формулы (1) для функций класса  $L_2^m(S)$  имеет оценку:

$$\left| \langle \ell_N^{(\alpha)}(\theta), f(\theta) \rangle \right| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} \frac{\left[ \widehat{P}_{k,\ell} - \sum_{|\alpha| \leq \ell} \sum_{\lambda=1}^N C_{\lambda}^{(\alpha)} Y_{k,\ell}^{(\alpha)}(\theta^{(\lambda)}) \right]^2}{k^m (k+n-2)^m} \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\sigma(n,k)} a_{k,\ell}^2 k^m (k+n-2)^m \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Литература:

1. Соболев, С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.:Наука, 1974. 808 с.
2. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Наука, 1950.
3. Люстерник, Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965
4. Салихов, Г.Н. Оценка погрешности кубатурных формул в пространстве  $L_2^m(S)$ . ДАН СССР, 1975 т. 223, № 6, 1318–1321.
5. Freeden, W. An application of summation formula to numerical computation of integrals over the sphere.-Computing, 1980, v. 23. № 2, p. 131–146.

## Расположение собственных значений обобщенной модели Фридрикса

Эгамбердиев Абдурауб Норбутаевич, ассистент  
Джизакский политехнический институт (Узбекистан)

В рамках проблемы нескольких тел на непрерывном пространстве и на решетке исследовано большое число задач о существовании собственных значений для систем квазичастиц, число которых сохраняется [1]. Однако имеются и

В настоящей работе рассматривается семейство обобщенной модели Фридрикса  $h_{\mu}(p)$ ,  $\mu \in (0; +\infty)$ ,  $p \in [-\pi; \pi]^3$ , действующей в двухчастичном обрезанном подпространстве фоковского пространства. Описано множество собственных значений лежащих ниже существенного спектра оператора  $h_{\mu}(p)$ .

Пусть  $T^3 \equiv (-\pi; \pi]^3$  -трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $L_2(T^3)$  — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $T^3$ ,  $C$  - одномерное комплексное пространство.

Обозначим  $H_0 = C$ ,  $H_1 = L_2(T^3)$ ,  $H = H_1 \oplus H_2$ .

**Определение 1.** Гильбертово пространство  $H$  называется двухчастичным обрезанным подпространством Фоковского пространства.

Рассмотрим семейство ограниченных и самосопряженных операторов  $h_{\mu}(p)$ ,  $p \in T^3$ ,  $\mu > 0$  (семейство обобщенных моделей Фридрикса), действующих в гильбертовом пространстве  $H$  и задающихся формулой

$$h_\mu(p) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a f_0 + \sqrt{\mu} \int_{T^3} v(s) f_1(s) ds \\ \sqrt{\mu} v(q) f_0 + u(p, q) f_1(q) \end{pmatrix}, f_i \in H_i, i = 0, 1. \quad (1)$$

Где  $a$  и  $\mu$  — вещественные положительные числа,  $v(\cdot)$  -вещественно-непрерывная (отличная от нуля) функция на  $T^3$ , а функция  $u(\cdot, \cdot)$  определяется равенством:

$$u(p, q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p + q) + \varepsilon(q),$$

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p_i), p = (p_1, p_2, p_3) \in T^3.$$

Оператор возмущения  $h_\mu(p) - h_0(p)$ ,  $\mu > 0$  оператора  $h_0(p)$ ,  $p \in T^3$  является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г.Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора  $h_\mu(p)$  совпадает с существенным спектром оператора  $h_0(p)$ ,  $p \in T^3$ . Известно, что

$$\sigma_{ess}(h_0(p)) = [m(p), M(p)],$$

где числа  $m(p)$  и  $M(p)$  определяются равенствами:

$$m(p) = \varepsilon(p) + \sum_{i=1}^3 \left(1 - \cos \frac{p_i}{2}\right), M(p) = \varepsilon(p) + \sum_{i=1}^3 \left(1 + \cos \frac{p_i}{2}\right).$$

Из последних двух фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(h_\mu(p)) = [m(p), M(p)].$$

Видно, что существенный спектр оператора  $h_\mu(p)$  не зависит от  $\mu$ . В частности

$$\sigma_{ess}(h_\mu(0)) = [0, 12].$$

**Замечание 2.** Отметим, что функция  $u(\cdot, \cdot)$  записывается в виде

$$u(p, q) = \varepsilon(p) + 2 \sum_{i=1}^3 \left(1 - \cos \frac{p_i}{2} \cos(q_i - \frac{p_i}{2})\right), p, q \in (-\pi; \pi)^3.$$

Следовательно, для любого  $p \in (-\pi; \pi)^3$  функция  $u(p, \cdot)$  имеет единственный невырожденный минимум в точке  $q_0 = \frac{p}{2} \in (-\pi; \pi)^3$ .

Следующая теорема описывает число собственных значений оператора  $h_\mu(p)$ .

**Теорема 1.** Для любого  $p \in T^3$  оператор  $h_\mu(p)$  имеет не более чем по одному простых собственных значений лежащих левее и правее существенного спектра.

Положим:

$$I(p; z) = \int_{T^3} \frac{v^2(s) ds}{u(p, s) - z}, p \in T^3, z \in C \setminus [m(p); M(p)].$$

Для любых  $p, q \in T^3$  и  $z < 0$  имеет место  $u(p, q) - z > 0$ . Так как функция  $u(\cdot, \cdot)$  имеет единственный невырожденный минимум в точке  $(0, 0) \in (T^3)^2$  и  $v(\cdot)$  непрерывная функция на  $T^3$ , в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла имеем, что существует конечный интеграл

$$I(0; 0) = \lim_{z \rightarrow 0} I(0; z) = \frac{1}{2} \int_{T^3} \frac{v^2(s)}{\varepsilon(s)} ds > 0.$$

Обозначим  $\mu_0 = a \cdot I^{-1}(0; 0)$ .

Следующая теорема описывает расположение собственных значений оператора  $h_\mu(p)$ .

**Теорема 2.**

1) Для любых  $0 < \mu < \mu_0$  и  $p \in T^3$  оператор  $h_\mu(p)$  не имеет собственных значений, лежащих ниже существенного спектра;

2) Для любого ненулевого  $p \in T^3$  оператор  $h_{\mu_0}(p)$  имеет единственное собственное значение  $E_{\mu_0}(p)$  лежащее на  $(0; t(p))$ ;

3) Для любых  $\mu_0 > \mu$  и  $p \in T^3$  оператор  $h_\mu(p)$  имеет единственное собственное значение  $E_\mu(p) < t(p)$ . Более того

$$E_\mu(p) < E_{\mu_0}(p) < t(p), 0 \neq p \in T^3 \text{ и } E_\mu(0) < 0.$$

В силу теоремы 2 можно сформулировать аналогичную теорему о собственном значении оператора  $h_\mu(p)$  лежащих правее его существенного спектра.

Заметим, что теорема 2 играет важную роль при изучении структуры существенного спектра оператора

$$H_\mu = \int_{T^3} \oplus h_\mu(p) dp,$$

действующего в гильбертовом пространстве

$$\int_{T^3} \oplus (H_0 \oplus H_1) dp.$$

Здесь под знаком интеграла стоят одинаковые слои.

определенном смысле более актуальные и интересные задачи, возникающие в теории твердого тела [2], статистической физике [3], теории квантового поля [4] и теории химических реакций [5], в которых число квазичастиц не сохраняется.

Литература:

1. Ю.А. Изюмов, М.В. Медведев. Магнитный полярон в ферромагнитном кристалле. ЖЭТФ. 1970, вып. 2, № 8, с. 553–560.
2. A. T. Mogilner. Hamiltonians of solid state physics at few particle discrete Schroedinger operators: problems and results. Advances in Sov. Math. 5 (1991), 139–194.
3. V.A. Malishev and R.A. Minlos. Linear infinite-particle operators. Translations of Math. Monographs. Amer. Math. Soc. Transl. 177 (1996), № 2, 159–193.
4. К.О. Friedrichs. On the perturbation of continuous spectra. Comm. Appl. Math. 1 (1948), 361–406.
5. V. Bach, J. Froehlich, I.M. Sigal. Mathematical theory of non-relativistic matter and radiation. Lett. Math. Phys. 34 (1995), 183–201.
- 6.

## Условия существования виртуального уровня обобщенной модели Фридрикса

Элмуродова Хилола Ботировна, преподаватель  
Бухарский филиал Ташкентского института ирригации и мелиорации (Узбекистан)

В настоящей работе рассматривается обобщенная модель Фридрикса  $h$ , действующая в прямой сумме  $0$  — и  $1$  — частичных подпространств Фоковского пространства.

Такие модели обычно возникают в актуальных задачах квантовой механики, статистической механики и гидродинамики [1–3]. Пороговые резонансы для семейства модели Фридрикса с одномерным возмущением, которые ассоциированы с системой двух частиц на решетке, изучены в работах [4,5], а для двухчастичного дискретного оператора Шредингера изучены в работах [6,7]. В данной работе обсуждается случай параметра функции  $w_1(\cdot)$  специального вида. Показывается, что эта функция имеет невырожденный минимум в нескольких различных точках трехмерного тора  $T^3$ . Исследуются необходимые и достаточные условия для того, чтобы оператор  $h$  имел виртуальный уровень в точке

Пусть  $T^3$  - трехмерный тор, т. е. куб  $(-\pi, \pi]^3$  — с соответствующим отождествлением противоположных граней,  $C$  — одномерное комплексное пространство и  $L_2(T^3)$  — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на  $T^3$ . Символом  $H$  обозначается прямая сумма пространств  $H_0 = C$  и  $H_1 = L_2(T^3)$ , т. е.  $H = H_0 \oplus H_1$ . Пространства  $H_0$  и  $H_1$  называются нольчастичным и одночастичным подпространствами фокковского пространства  $F(L_2(T^3))$  по  $L_2(T^3)$ , соответственно.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрикса  $h$ , действующую в гильбертовом пространстве  $H$  и задающуюся как блочно-операторная матрица

$$h = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} \\ h_{01}^* & h_{11} \end{pmatrix},$$

где матричные элементы  $h_{ij} : H_j \rightarrow H_i, i, j = 0, 1, i \leq j$  определяются равенствами

$$h_{00}f_0 = w_0f_0, \quad h_{01}f_1 = \int v(t)f_1(t)dt, \quad (h_{11}f_1)(p) = w_1(p)f_1(p), \quad f_i \in H_i, \quad i = 0, 1.$$

При этом  $w_0$  — фиксированное вещественное число,  $v(\cdot)$  — вещественнозначная четная дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $T^3$ , функция  $w_1(\cdot)$  определена по формулам

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^3 (1 - \cos(3p^{(i)})), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in T^3,$$

где  $h_{01}^*$  сопряженный оператор к  $h_{01}$  и  $(h_{01}^*f_0)(p) = v(p)f_0, f_0 \in H_0$ .

Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования. Легко можно проверить, что оператор  $h$ , действующий в гильбертовом пространстве  $H$ , является ограниченным и самосопряженным.

Обозначим через  $\sigma(\cdot), \sigma_{\text{ess}}(\cdot)$  и  $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ , соответственно, спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

Из известной теоремы Г. Вейля [8] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что  $\sigma_{\text{ess}}(h) = [0, 6]$ .

Определим регулярную в  $C \setminus [0, 6]$  функцию (детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором  $h$ )

$$\Delta(z) = w_0 - z - \int \frac{v^2(t)dt}{w_1(t) - z}.$$

Рассмотрим точки  $P_i = (P_i^{(1)}, P_i^{(2)}, P_i^{(3)})$  из  $T^3$ , для которых  $P_i^{(k)} \in \left\{0, \pm \frac{2\pi}{3}\right\}, k = 1, 2, 3$ , причем  $P_i \neq P_j$  при  $i \neq j$ . Ясно, что число таких точек равно 27. Легко проверяется, что функция  $w_1(\cdot)$  имеет невырожденный минимум в точках  $P_i \in T^3, i = \overline{1, 27}$ . Функция  $v(\cdot)$  является непрерывной на  $T^3$ , поэтому существует конечный интеграл

$$\int \frac{v^2(t)dt}{w_1(t)}.$$

Из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что  $\Delta(0) = \lim_{z \rightarrow -0} \Delta(z)$ .

Пусть  $C(T^3)$  (соот.  $L_1(T^3)$ ) — банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на  $T^3$ .

**Определение 1.** Пусть  $w_0 \neq 0$ . Говорят, что оператор  $h$  имеет виртуальный уровень в точке  $z = 0$  (или резонанс с нулевой энергией), если число  $\lambda = 1$  является собственным значением интегрального оператора

$$(G\psi)(p) = \frac{v(p)}{w_0} \int \frac{v(t)\psi(t)dt}{w_1(t)}, \quad \psi \in C(T^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция  $\psi$  удовлетворяет условию  $\psi(P_i) \neq 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, 27\}$ .

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того чтобы, оператор  $h$  имел виртуальный уровень в точке  $z = 0$ .

**Теорема 1.** Оператор  $h$  имеет виртуальный уровень в точке  $z = 0$  тогда и только тогда, когда  $\Delta(0) = 0$  и  $v(P_i) \neq 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, 27\}$ .

**Доказательство. Необходимость.** Пусть оператор  $h_\mu$  имеет виртуальный уровень в точке  $z = 0$ . Тогда по определению 1 уравнение

$$\frac{v(p)}{w_0} \int \frac{v(t)\psi(t)dt}{w_1(t)} = \psi(p) \quad (1)$$

имеет нетривиальное решение  $\psi \in C(T^3)$ , удовлетворяющее условию  $\psi(P_i) \neq 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, 27\}$ .

Видно, что это решение равно (с точностью до константы) функции  $v(\cdot)$  и следовательно,  $\Delta(0) = 0$ .

**Достаточность.** Пусть  $\Delta(0) = 0$  и  $\varphi(P_i) \neq 0$  при некотором  $i \in \{1, \dots, 27\}$ . Тогда функция  $\varphi \in C(T^3)$  является решением уравнения (1), и следовательно, по определению 1 оператор  $h$  имеет виртуальный уровень в точке  $z = 0$ . Теорема 1 доказано.

Из доказательства теоремы 1 видно, что если оператор  $h$  имеет виртуальный уровень в точке  $z = 0$ , тогда решение уравнения  $G_\mu \psi = \psi$  равно (с точностью до константы) функции  $v(\cdot)$ .

$z = 0$  (или резонанс с нулевой энергией) в зависимости от точки минимума функции  $w_1(\cdot)$ . При этом нуль является нижней гранью существенного спектра оператора  $h$ .

Литература:

1. Фаддеев, Л. Д. О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра. Труды Мат. Инс-та АН СССР, 73 (1964), с. 292–313.
2. Минлос, Р. А., Синай Я. Г. Исследование спектров стохастических операторов, возникающих в решетчатых моделях газа. Теор. и матем. физ. 2:2 (1979), с. 230–243.
3. Дынкин, Е. М., Набако С. Н., Яковлев С. И. Граница конечности сингулярного спектра в самосопряженной модели Фридрихса. Алгебра и анализ. 3:2 (1991), с. 77–90.
4. Albeverio, S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl. 330 (2007), P. 1152–1168.
5. Albeverio, S., Lakaev S. N., Djumanova R. Kh. The Essential and Discrete Spectrum of a Model Operator Associated to a System of Three Identical Quantum Particles. Rep. Math. Phys. 63:3 (2009), P. 359–380.
6. Albeverio, S., Lakaev S. N., Makarov K. A., Muminov Z. I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians in lattice. Comm. Math. Phys. 262 (2006), P. 91–115.
7. Albeverio, S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5 (2004), P. 743–772.
8. Рид, М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4, Анализ операторов. — М., Мир, 1982.

## ФИЗИКА

### Математическое моделирование САР скорости системы «АИН ШИМ – АД» с идеализированными транзисторными ключами

Емельянов Александр Александрович, доцент;

Бесклеткин Виктор Викторович, ассистент;

Авдеев Александр Сергеевич, студент;

Габзалилов Эльвир Фиргатович, студент;

Прокопьев Константин Васильевич, студент;

Ситенков Александр Александрович, студент;

Пестеров Дмитрий Ильич, студент;

Юнусов Тимур Шамильевич, студент

Российский государственный профессионально-педагогический университет

Эта работа необходима для методических указаний к выполнению студентами лабораторных и практических работ по дисциплинам «Системы управления электроприводов» и «Математическое моделирование электромеханических систем». Эта статья является продолжением предыдущей работы [1].

Развернутая схема САР скорости «АИН ШИМ — АД» дана на рис. 2. Задание на скорость  $\omega^*$  формируется в Signal Builder (номер 1) (рис. 1).

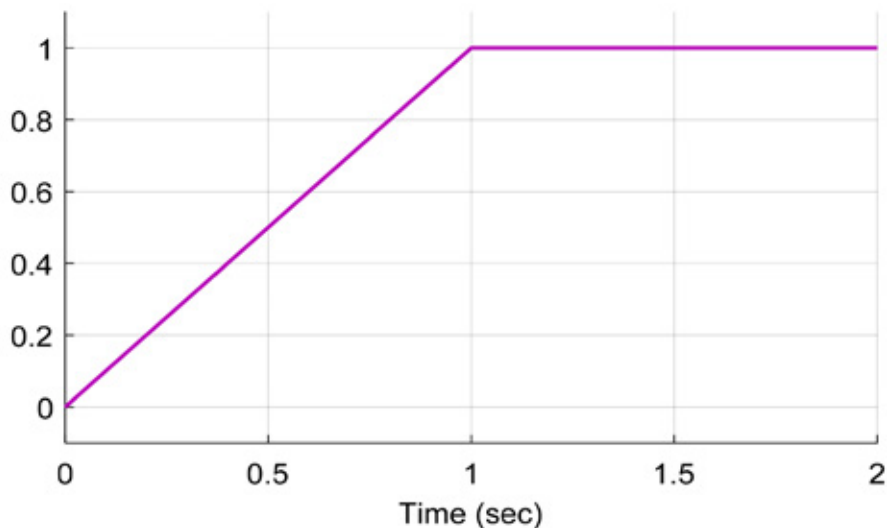


Рис. 1. Задание на скорость  $\omega^*$

Под каждым элементом развернутой схемы САР скорости указаны его номер и название. С целью уменьшения объема статьи произведем группировку некоторых элементов.

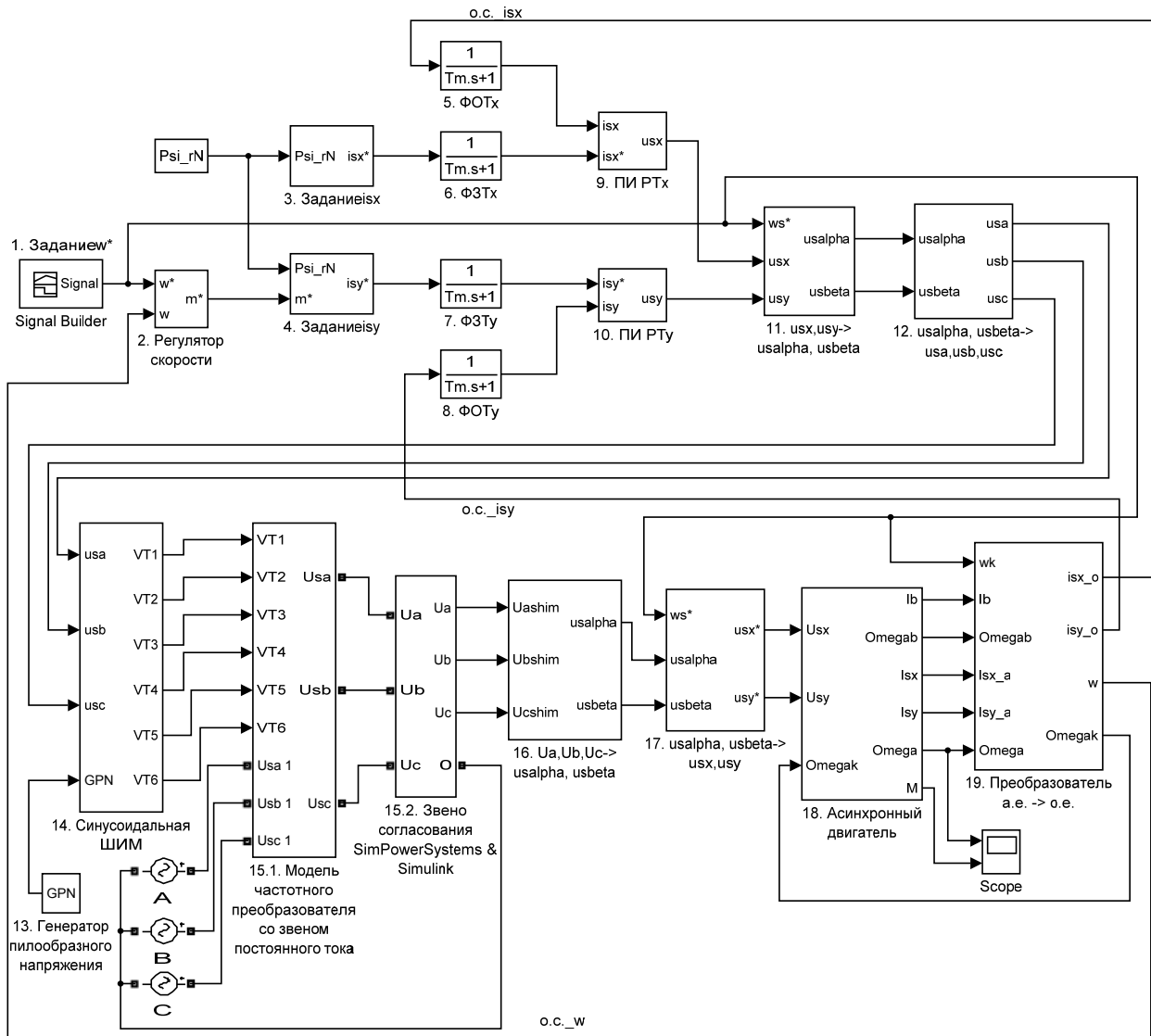


Рис. 2. Развернутая математическая модель САР скорости системы «АИН ШИМ – АД»

Математические модели регулятора скорости (номер 2), задание на проекции статорного тока по оси  $x$  (номер 3) и  $y$  (номер 4) даны на рис. 3, 4, 5.

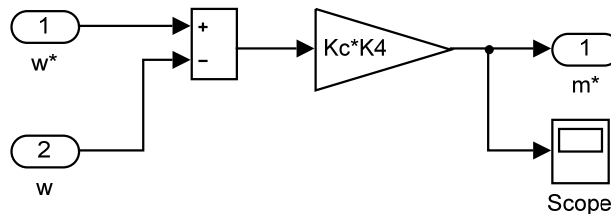


Рис. 3. Регулятор скорости

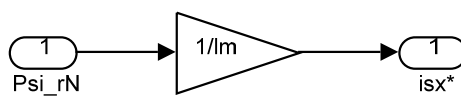


Рис. 4. Задание  $i_{sx}^*$



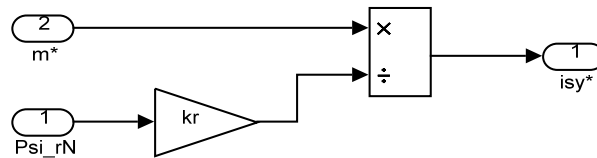


Рис. 5. Задание  $i_{sy}^*$

Фильтры под номерами 5, 6, 7, 8 имеют одинаковые передаточные функции с постоянной времени  $T_\mu = 0.005$  с. Регуляторы тока по проекциям  $x$  и  $y$  под номерами 9 и 10 даны на рис. 6 и 7 [4].

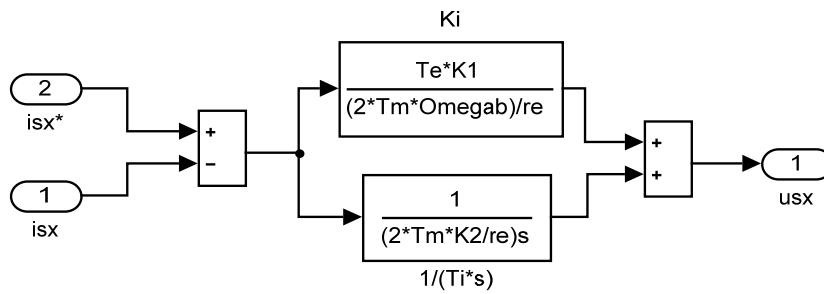


Рис. 6. Регулятор статорного тока по проекции  $x$ : ПИ-РТ $x$

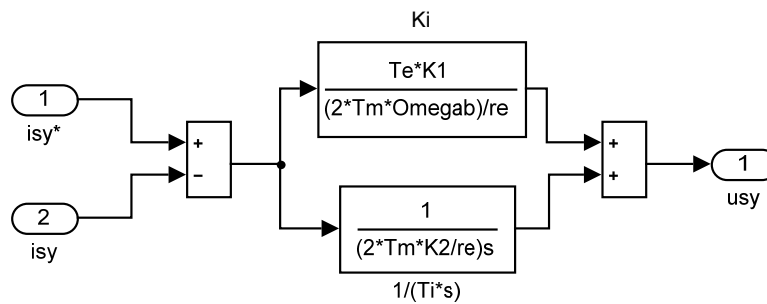


Рис. 7. Регулятор тока по проекции  $y$ : ПИ-РТ $y$

Преобразователи координат на развернутой схеме САР скорости даны под номерами 11 и 12 ( $x, y \rightarrow \alpha, \beta$  и  $\alpha, \beta \rightarrow a, b, c$ ) и приведены на рис. 8 и 9 [4], [6].

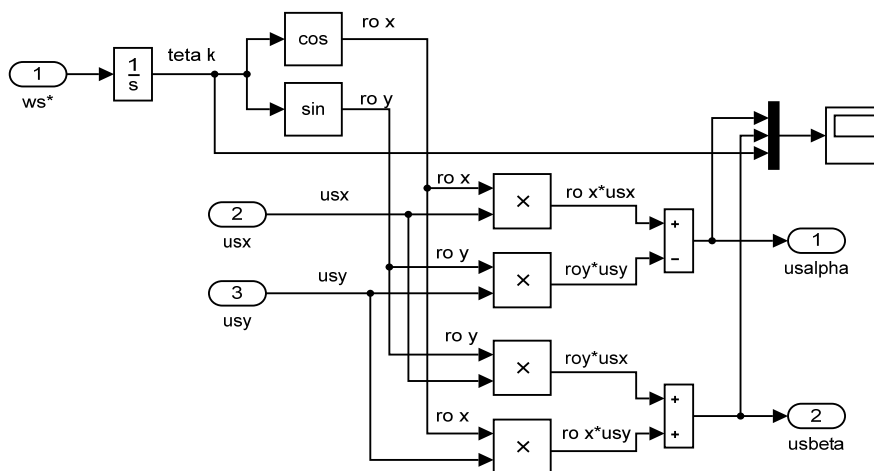


Рис. 8. Преобразователь координат:  $x, y \rightarrow \alpha, \beta$

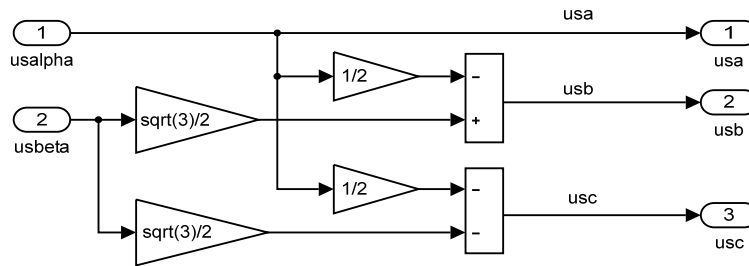


Рис. 9. Преобразователь координат:  $\alpha, \beta \rightarrow a, b, c$

Математическая модель АИН ШИМ (номер 14) вместе с генератором пилообразного напряжения GPN (номер 13) даны на рис. 10 и 11.

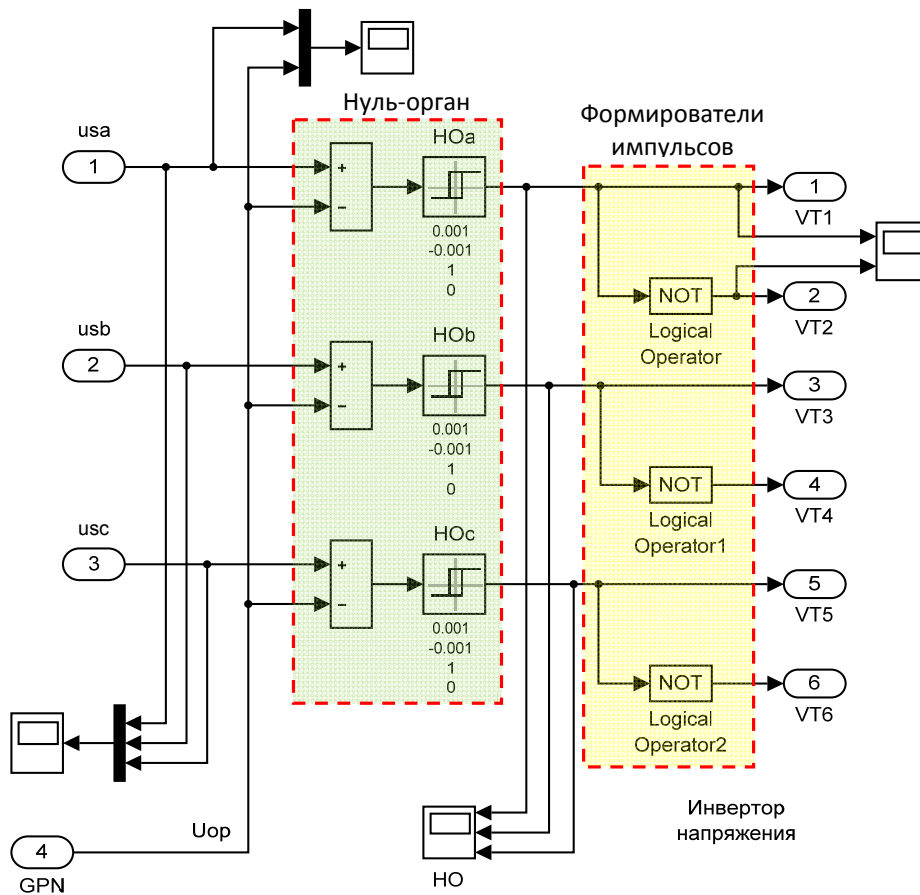


Рис. 10. Математическая модель АИН ШИМ

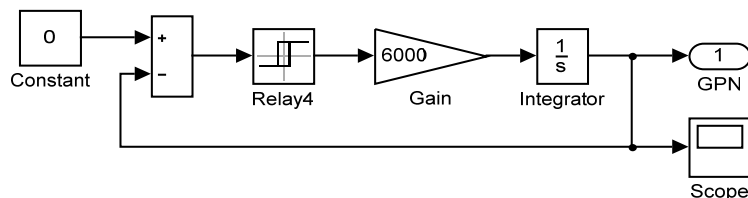


Рис. 11. Генератор пилообразного напряжения (GPN)

Модель частотного преобразователя со звеном постоянного тока (номер 15.1) представлена на рис. 12 [2], [5].

Для согласования элементов библиотеки Simulink с элементами SimPowerSystems необходимо включить в схему дополнительное звено (номер 15.2), показанное на рис. 13.

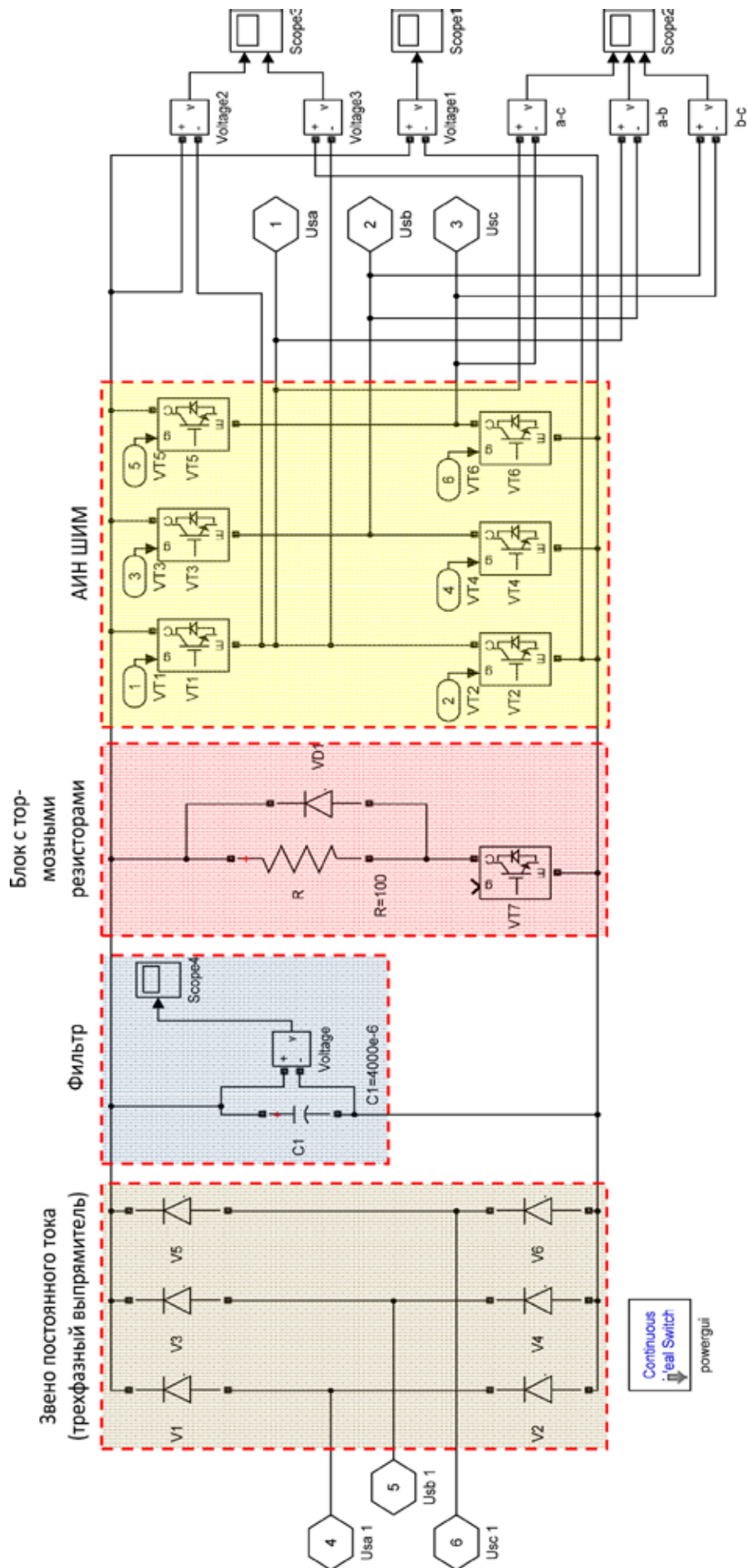


Рис. 12. Модель частотного преобразователя со звеном постоянного тока на идеализированных транзисторных ключах

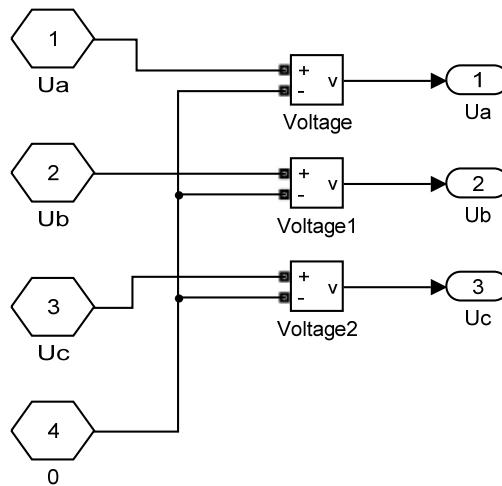


Рис. 13. Звено согласования SimPowerSystems и Simulink

Преобразователи координат под номерами 16 и 17 ( $u_{a\text{ шим}}, u_{b\text{ шим}}, u_{c\text{ шим}} \rightarrow u_{s\alpha}, u_{s\beta}$  и  $u_{s\alpha}, u_{s\beta} \rightarrow u_{sx}, u_{sy}$ ) даны на рис. 14 и 15.

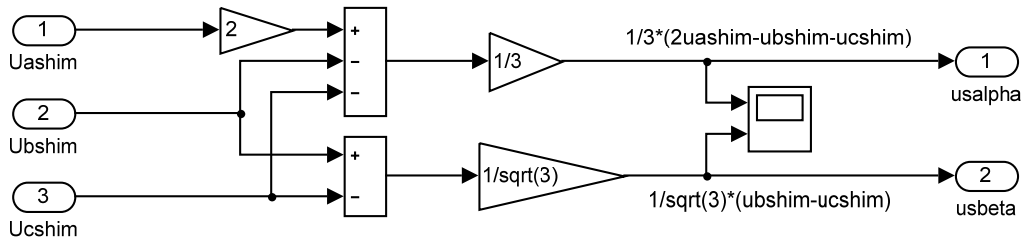


Рис. 14. Преобразователь координат:  $u_{a\text{ шим}}, u_{b\text{ шим}}, u_{c\text{ шим}} \rightarrow u_{s\alpha}, u_{s\beta}$

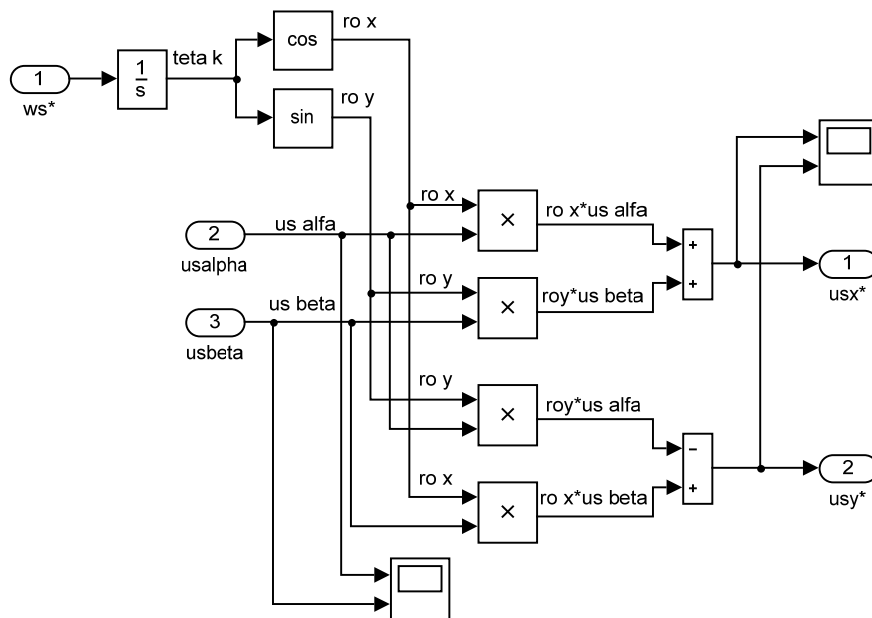


Рис. 15. Преобразователь координат:  $u_{s\alpha}, u_{s\beta} \rightarrow u_{sx}, u_{sy}$

Математическая модель двигателя (номер 18) дана на рис. 16, 17, 18 и 19.

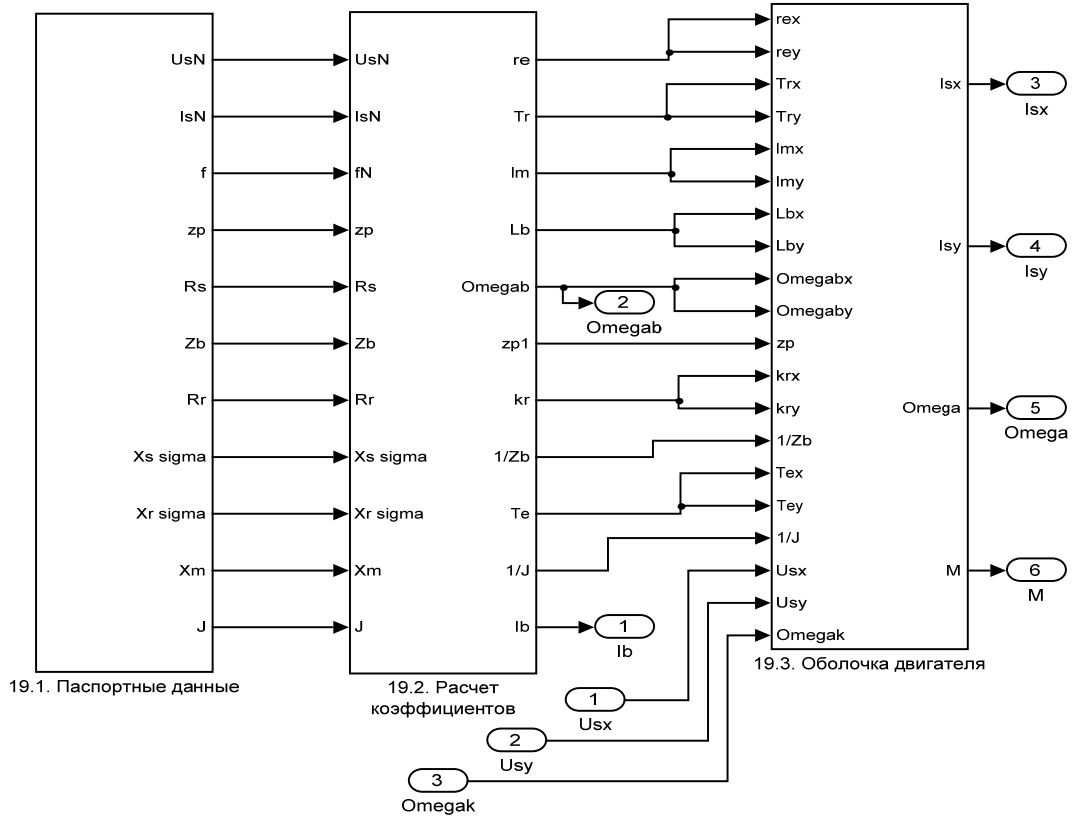


Рис. 16. Математическая модель АД с переменными  $\Psi_r - I_s$

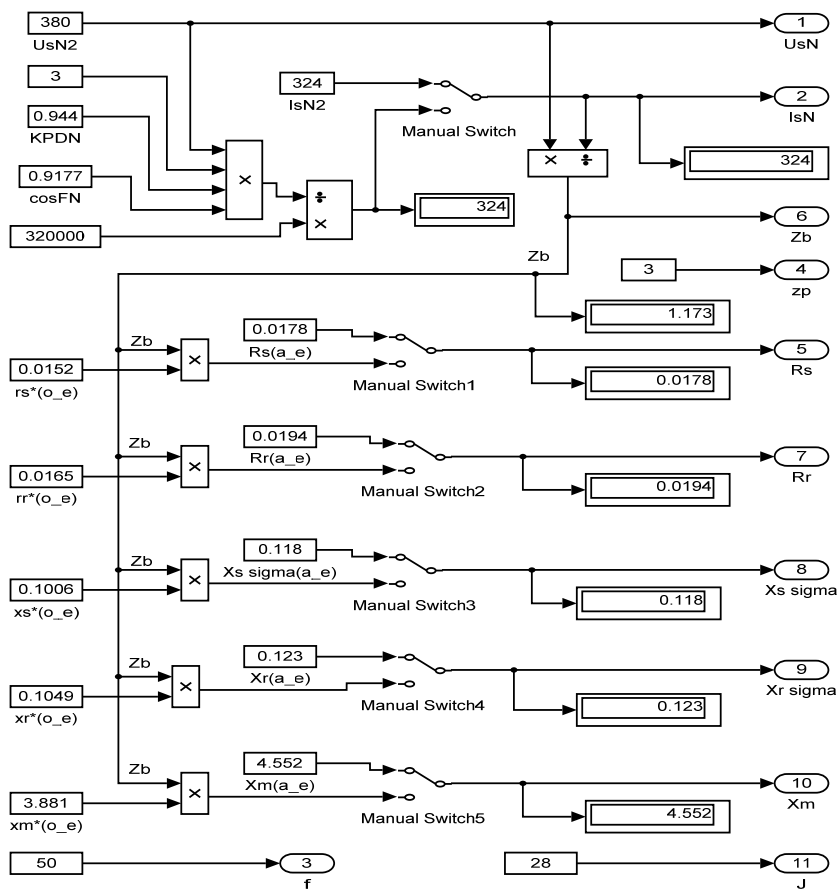


Рис. 17. Расчет коэффициентов по паспортным (справочным) данным

Преобразователь параметров из системы абсолютных единиц в относительные (номер 19) приведен на рис. 20.

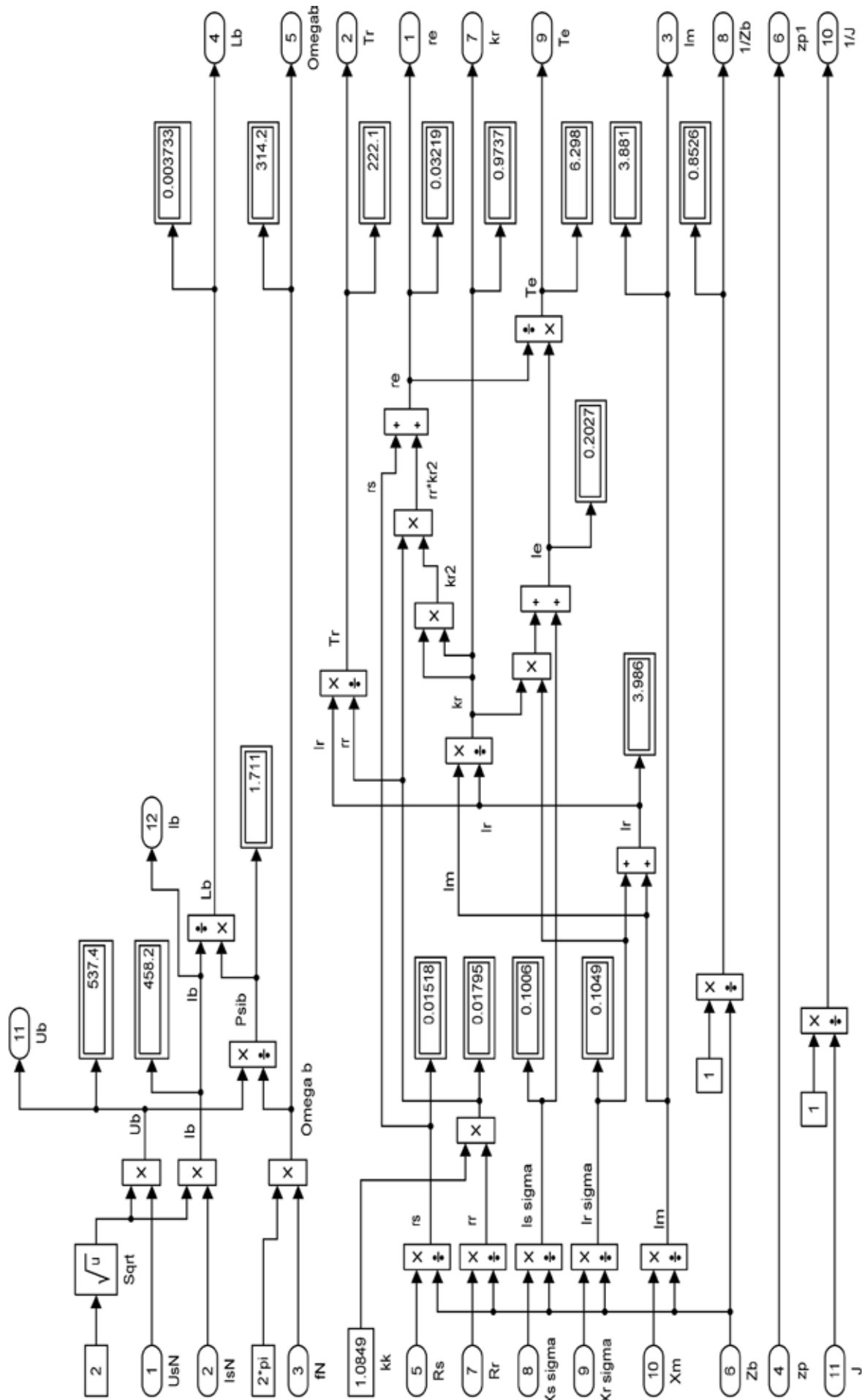


Рис. 18. Определение коэффициентов оболочки асинхронного двигателя в Simulink-Matlab

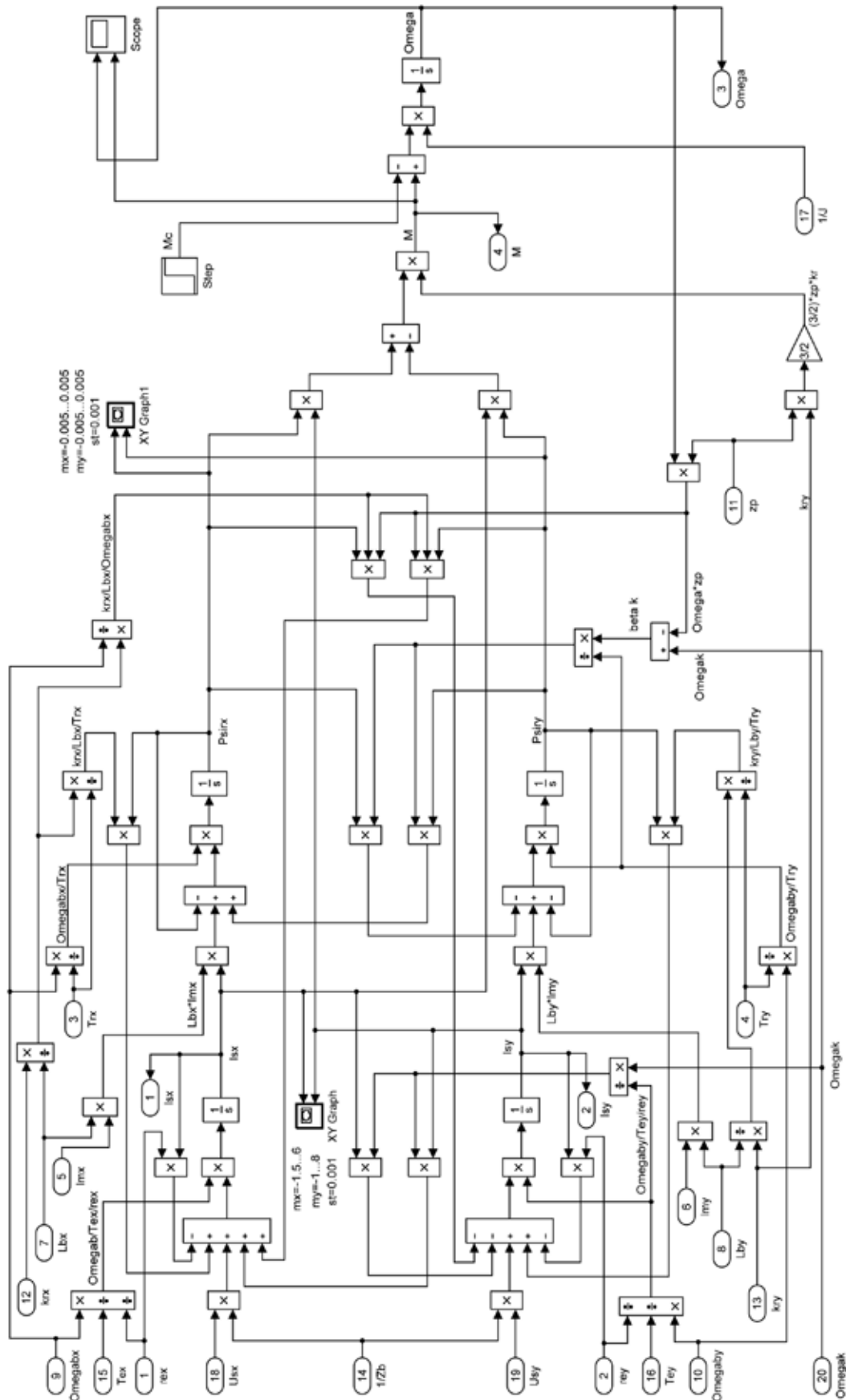


Рис. 19. Модель оболочки асинхронного двигателя с переменными  $\Psi_R - I_S$  в Simulink-Matlab на основе интегрирующих звеньев

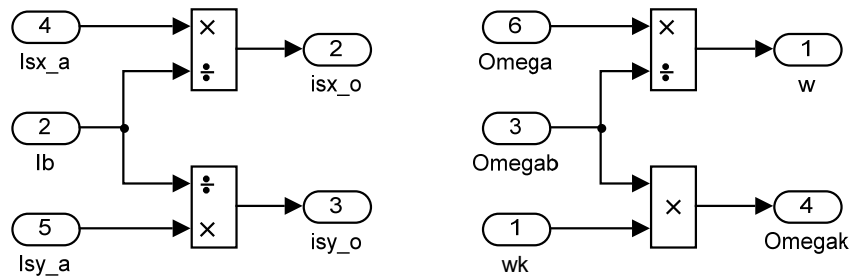


Рис. 20. Преобразователь параметров из системы абсолютных единиц в относительные

В работе [3] в главе 6 «Примеры» дан образец расчета параметров асинхронного двигателя. В наших дальнейших работах направленных на подготовку студентов к исследовательской работе, глава 6 окажет неоценимую помощь. Можно было бы по аналогии рассмотреть паспортные данные любого другого двигателя, но для проверки правильности выводов уравнений сделанных исследовательской группой самостоятельно, необходимо постоянно выходить на многие полученные результаты в работе [4]. Поэтому, этот пример расчета окажется очень полезным.

*Номинальные данные:*

Номинальный режим работы	S1;
Номинальная мощность	$P_N = 320 \text{ кВт};$
Номинальное фазное напряжение	$U_{s.N} = 380 \text{ В};$
Номинальный фазный ток	$I_{s.N} = 324 \text{ А};$
Номинальная частота	$f_N = 50 \text{ Гц};$
Номинальная синхронная скорость	$\Omega_{0.N} = 104,7 \text{ рад/с};$
Номинальная скорость ротора	$\Omega_N = 102,83 \text{ рад/с};$
Номинальный КПД	$\eta_N = 0,944;$
Номинальный коэффициент мощности	$\cos \varphi_N = 0,92;$
Число пар полюсов	$z_p = 3.$

*Параметры T-образной схемы замещения при номинальной частоте:*

Активное сопротивление обмотки статора	$R_s = 0,0178 \text{ Ом};$
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки статора	$X_{s\sigma} = 0,118 \text{ Ом};$
Активное сопротивление обмотки ротора, приведенное к статору	$R_r = 0,0194 \text{ Ом};$
Индуктивное сопротивление рассеяния обмотки ротора, приведенное к статору	$X_{r\sigma} = 0,123 \text{ Ом};$
Главное индуктивное сопротивление	$X_m = 4,552 \text{ Ом};$
Суммарный момент инерции двигателя и механизма	$J_\Sigma = 28 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$

*Базисные величины системы относительных единиц:*

Напряжение	$U_\delta = \sqrt{2}U_{s.N} = \sqrt{2} \cdot 380 = 537,4 \text{ В};$
Ток	$I_\delta = \sqrt{2}I_{s.N} = \sqrt{2} \cdot 324 = 458,2 \text{ А};$
Частота	$\Omega_\delta = \Omega_{s.N} = 2\pi f_N = 2 \cdot \pi \cdot 50 = 314,16 \text{ рад/с};$
Скорость ротора	$\Omega_{r.\delta} = \frac{\Omega_\delta}{z_p} = \frac{314,16}{3} = 104,72 \text{ рад/с};$
Сопротивление	$Z_\delta = \frac{U_\delta}{I_\delta} = \frac{537,4}{458,2} = 1,1728 \text{ Ом};$
Потокосцепление	$\Psi_\delta = \frac{U_\delta}{\Omega_\delta} = \frac{537,4}{314,16} = 1,711 \text{ В} \cdot \text{с};$



$$\text{Индуктивность } L_{\sigma} = \frac{\Psi_{\sigma}}{I_{\sigma}} = \frac{1,711}{458,2} = 3,733 \cdot 10^{-3} \text{ Гн.}$$

Используя номинальные данные двигателя, определяем:

$$M_{\sigma} = k_{\Delta} \cdot M_N = k_{\Delta} \cdot \frac{P_N}{\Omega_N},$$

где  $k_{\Delta} > 1$  – коэффициент, учитывающий различие значений электромагнитного момента и момента на валу двигателя в номинальном режиме ( $k_{\Delta} = 1,0084$ ).

$$M_{\sigma} = k_{\Delta} \cdot \frac{P_N}{\Omega_N} = 1,0084 \cdot \frac{320 \cdot 10^3}{102,83} = 3138,07 \text{ Н} \cdot \text{м.}$$

В качестве базисной мощности выбираем значение электромагнитной мощности двигателя в номинальном режиме, определяемое по следующей формуле:

$$P_{\sigma} = M_{\sigma} \cdot \Omega_{p.\sigma} = 3138,07 \cdot 104,72 = 328,62 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Относительные значения параметров схемы замещения двигателя:

$$r_s = \frac{R_s}{Z_{\sigma}} = \frac{0,0178}{1,1728} = 0,0152;$$

$$l_{s\sigma} = \frac{L_{s\sigma}}{L_{\sigma}} = \frac{X_{s\sigma}}{(\Omega_{\sigma} \cdot L_{\sigma})} = \frac{X_{s\sigma}}{Z_{\sigma}} = \frac{0,118}{1,1728} = 0,1006;$$

$$r_r = \frac{R_r}{Z_{\sigma}} = \frac{0,0194}{1,1728} = 0,0165;$$

$$l_{r\sigma} = \frac{X_{r\sigma}}{Z_{\sigma}} = \frac{0,123}{1,1728} = 0,1049;$$

$$l_m = \frac{X_m}{Z_{\sigma}} = \frac{4,552}{1,1728} = 3,881.$$

Механическая постоянная времени:

$$T_j = J_{\Sigma} \cdot \frac{\Omega_{r.\sigma}}{M_{\sigma}} = 28 \cdot \frac{104,72}{3138,07} = 0,934 \text{ с.}$$

Номинальное значение скольжения:

$$\beta_N = \frac{\Omega_{0N} - \Omega_N}{\Omega_{0N}} = \frac{104,72 - 102,83}{104,72} = 0,018.$$

Относительное значение номинальной скорости ротора:

$$\omega_N = (1 - \beta_N) = (1 - 0,018) = 0,982.$$

Нормирующий энергетический коэффициент:

$$\zeta_N = \frac{S_{s.N}}{P_{\text{элм.}N}} = \frac{3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N}}{P_{\sigma}} = \frac{3 \cdot 380 \cdot 324}{328620} = 1,124;$$

$$S_{s.N} = 3 \cdot U_{s.N} \cdot I_{s.N} = 369360 \text{ ВА};$$

$$k_s = \frac{l_m}{l_m + l_{s\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1006} = 0,9749;$$

$$k_r = \frac{l_m}{l_m + l_{r\sigma}} = \frac{3,881}{3,881 + 0,1049} = 0,9737;$$

$$l_{\sigma\sigma} = l_{s\sigma} + l_{r\sigma} + l_{s\sigma} \cdot l_{r\sigma} \cdot l_m^{-1} = 0,1006 + 0,1049 + \frac{0,1006 \cdot 0,1049}{3,881} = 0,2082.$$

При расчете режимов работы, для того чтобы  $i_{sh} = 1$ ,  $m_N = 1$ ,  $u_{sN} = 1$ ,  $\omega_{sN} = 1$  и  $\beta_N = 0,018$ , необходимо откорректировать  $r_r$ :

$$r_{rk} = \rho_N \cdot \beta_N = 0,9962 \cdot 0,018 = 0,0179,$$

где  $\rho_N = 0,9962$  – корректирующий коэффициент [3, с. 296].

$$kk = \frac{r_{rk}}{r_r} = 1,0849 - \text{коэффициент, показывающий отношение } r_{rk} \text{ к } r_r.$$

$$\alpha_r = k_r \cdot \frac{r_{rk}}{l_m} = 0,9737 \cdot \frac{0,0179}{3,881} = 0,00451;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{r\sigma} + l_{s\sigma} = 0,9737 \cdot 0,1049 + 0,1006 = 0,20274;$$

$$l_3 = k_r \cdot l_{s\sigma} = 0,9737 \cdot 0,2082 = 0,20274;$$

$$r_3 = r_s + k_r^2 \cdot r_{rk} = 0,0152 + 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,032171;$$

$$T_3 = \frac{l_3}{r_3} = \frac{0,20274}{0,032171} = 6,302;$$

$$k_r^2 \cdot r_{rk} = 0,9737^2 \cdot 0,0179 = 0,017;$$

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{0,032171} = 31,084;$$

$$T_{r\sigma} = \frac{l_{r\sigma} + k_s \cdot l_{s\sigma}}{r_{rk}} = \frac{0,1049 + 0,9749 \cdot 0,1006}{0,0179} = 11,339;$$

$$T_{s\sigma} = \frac{l_{s\sigma} + k_s \cdot l_{r\sigma}}{r_s} = \frac{0,1006 + 0,9737 \cdot 0,1049}{0,0152} = 13,338;$$

$$\frac{T_r}{k_r^2 \cdot r_{rk}} = \frac{222,676}{0,9737^2 \cdot 0,0179} = 13098,587;$$

$$\frac{k_r}{T_{s\sigma}} = \frac{0,9737}{13,338} = 0,073;$$

$$\frac{T_{s\sigma}}{k_r} = \frac{13,338}{0,9737} = 13,698;$$

$$\frac{T_{r\sigma} \cdot T_{s\sigma}}{k_r \cdot k_s} = \frac{11,339 \cdot 13,338}{0,9737 \cdot 0,9749} = 159,324;$$

$$k_r \cdot k_s \cdot T_{s\sigma}^{-1} = \frac{k_r \cdot k_s}{T_{s\sigma}} = 0,073 \cdot 0,9749 = 0,0712;$$

$$\frac{T_{r\sigma}}{\Omega_{\phi}} = \frac{11,339}{314,16} = 0,036;$$

$$\frac{T_{s\sigma}}{\Omega_{\phi}} = \frac{13,338}{314,16} = 0,0425;$$

$$\frac{T_3}{\Omega_{\phi}} = \frac{6,302}{314,16} = 0,02006;$$

$$\frac{T_r}{\Omega_{\phi}} = \frac{222,676}{314,16} = 0,7088;$$

$$\frac{\zeta_N}{l_{\sigma\sigma}} = \frac{1,124}{0,2082} = 5,3987;$$

$$\zeta_N \cdot T_r = 1,124 \cdot 222,676 = 250,29;$$

$$\frac{\Omega_{\sigma}}{r_{\sigma} \cdot T_{\sigma}} = \frac{314,16}{0,032171 \cdot 6,302} = 1549,558;$$

$$\frac{k_r}{T_r} = \frac{0,9737}{222,676} = 0,00437;$$

$$\frac{1}{r_{rk} \cdot k_r^2} = \frac{1}{0,0179 \cdot 0,9737^2} = 58,824;$$

$$\frac{r_{rk} \cdot k_r^2 \cdot \Omega_{\sigma}}{T_r} = \frac{0,0179 \cdot 0,9737^2 \cdot 314,16}{222,676} = 0,024.$$

Расчет параметров производим в Script:

%Номинальные данные

PN=320000;

UsN=380;

IsN=324;

fN=50;

Omega0N=104.7;

OmegaN=102.83;

nN=0.944;

cos\_phiN=0.92;

zp=3;

%Параметры Т-образной схемы замещения при номинальной частоте

Rs=0.0178;

Xs=0.118;

Rr=0.0194;

Xr=0.123;

Xm=4.552;

J=28;

%Базисные величины системы относительных единиц

Ub=sqrt(2)\*UsN;

Ib=sqrt(2)\*IsN;

OmegasN=2\*pi\*fN;

Omegab=OmegasN;

Omegarb=Omegab/zp;

Zb=Ub/Ib;

Psib=Ub/Omegab;

Lb=Psib/Ib;

kd=1.0084;

Mb=kd\*PN/OmegaN;

Pb=Mb\*Omegarb;

rs=Rs/Zb;

ls=Xs/Zb;

lr=Xr/Zb;

lm=Xm/Zb;

Tj=J\*Omegarb/Mb;

betaN=(Omega0N-OmegaN)/Omega0N;

wN=(1-betaN);

SsN=3\*UsN\*IsN;

zetaN=SsN/Pb;

ks=lm/(lm+ls);

```

kr=lm/(lm+lr);
lbe=ls+lr+ls*lr*lm^(-1);
roN=0.9962;
rr=roN*betaN;
alphan=kr*rr/lm;
le=kr*lbe;
re=rs+(kr^2)*rr;
Te=le/re;
Tr=(lm+lr)/rr;
Psi_rN=0.942;
Tm=0.005;
K1=1;
K2=950;
K4=0.1;
Kc=260;

```

Результаты расчетов скорости  $\Omega$  и электромагнитного момента  $M$  приведены на рис. 21.

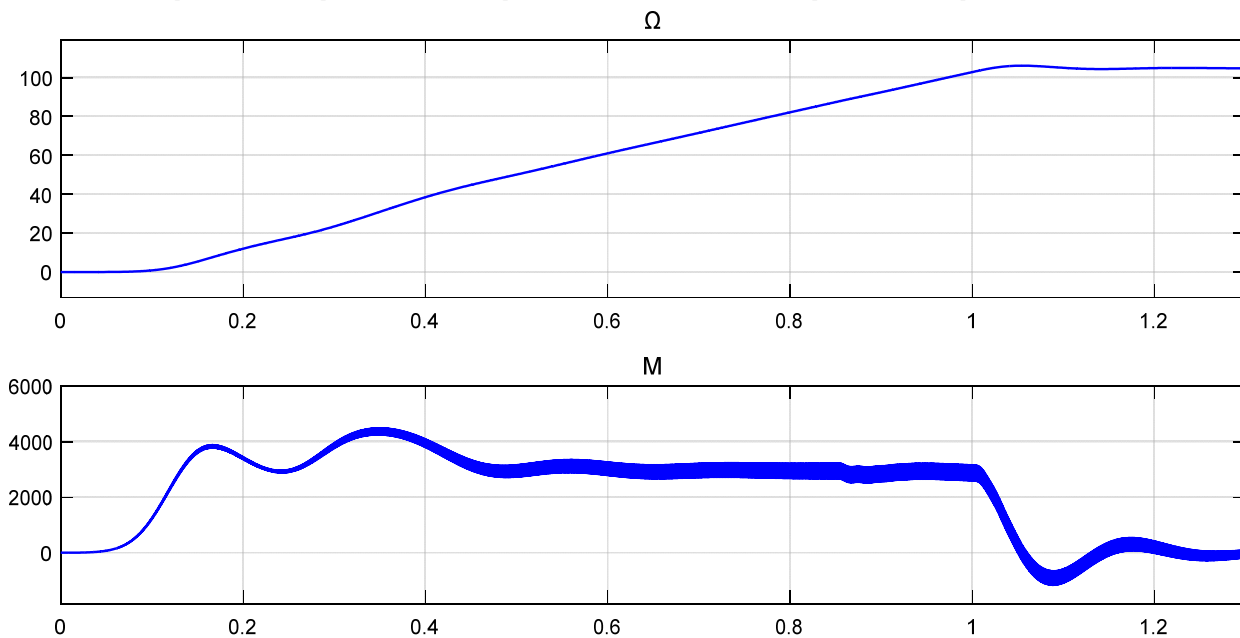


Рис. 21. Графики скорости и момента

#### Литература:

1. Емельянов, А.А., Бесклеткин В.В., Прокопьев К.В., Ситенков А.А., Бурхацкий В.В., Мальцев Н.В., Авдеев А.С., Габзалилов Э.Ф. Математическое моделирование системы «АИН ШИМ — АД» с транзисторными ключами // Молодой ученый. — 2016. — № 12. — с. 94–103.
2. Анучин, А.С. Системы управления электроприводов: учебник для вузов. — М.: Издательский дом МЭИ, 2015. — 373 с.
3. Шрейнер, Р.Т. Электромеханические и тепловые режимы асинхронных двигателей в системах частотного управления: учеб. пособие / Р.Т. Шрейнер, А.В. Костылев, В.К. Кривовяз, С.И. Шилин. Под ред. проф. д. т. н. Р.Т. Шрейнера. — Екатеринбург: ГОУ ВПО «Рос. гос. проф.-пед. ун-т», 2008. — 361 с.
4. Шрейнер, Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. — Екатеринбург: УРО РАН, 2000. — 654 с.
5. Терёхин, В.Б. Моделирование систем электропривода в Simulink (Matlab 7.0.1): учебное пособие / В.Б. Терёхин; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. — 292 с.
6. Чуев, П.В. Разработка систем векторного управления асинхронными приводами на базе специализированных сигнальных микроконтроллеров: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / П.В. Чуев. — М.: Моск. энерг. ин-т (МЭИ ТУ), 2002. — 254 с.

## Результаты лабораторной модели сушки фруктов

Ибрагимов Салим Сафарович, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Использование возобновляемых источников энергии для Республики Узбекистан очень важно для улучшения энергетической безопасности и жизненных условий населения. Основную часть возобновляемых источников энергии в нашей Республике составляет солнечная энергия.

Ввиду плана, представленного со стороны совета Всемирной энергетике, предотвращение катастрофы на нашей земле возможно только тогда, когда каждый год использование топлива не будет превышать энергии, эквивалентной 15 млрд. тонн нефтяного топлива. Для этого к 2050 году 40% расхода намеченного топлива смогут выполняться за счёт использования возобновляемых источников энергии, к примеру, образуемой биологическим способом, при помощи солнца, ветра, проточной воды.

Увеличение количества населения в мире приводит к увеличению потребности в продовольственной продукции. В процессе непрерывной и качественной доставки продовольственной продукции населению место солнечной

сушки трудно переоценить. По этому направлению в мире было проведено значительное количество научных исследований, и в настоящее время эта тема широко изучается учёными. В наши дни, наряду с развитыми странами мира, работа по использованию солнечной энергии широко поставлена и в нашей богатой солнцем Республике Узбекистан.

С целью эффективного использования солнечной энергии была разработана солнечная сушилка фруктов парникового типа. Размер сушилки составляет  $h = 0,15\text{м}$ ,  $L = 0,78\text{м}$ ,  $h/l = 0,2$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Для сушки фруктов ее можно использовать в каждой семье. В состав аппарата для солнечной сушки фруктов входит: стенки с двух сторон, с поверхностью, которая проводит три типа света, ограниченная часть корпуса и коллектор. Каркас сооружения изготовлен из дерева. Внутри корпуса с промежуточной частью, с двух сторон его, стенки, снизу установлен коллектор с посудой, куда помещаются просушивающиеся фрукты.



Рис. 1. Вид солнечной сушилки фруктов парникового типа. 1) Верхний и нижний корпус сооружения, представляющий собой деревянный каркас. 2) Стены с трёх сторон сооружения, поверхность которых проводит свет. 3) Посуда, в которую помещаются фрукты, сделанная из нержавеющей стали или из дерева. 4) Щели, которые служат для образования естественной конвекции. 5) Коллектор, который служит для ускорения естественной конвекции.

Солнечная энергия проходит через поверхность, проводящую свет в верхнюю и нижнюю части сооружения. Солнечная энергия с внешней стороны согревает нижнюю часть коллектора, которая окрашена в чёрный цвет. Стоит из щелей над посудой, где расположены фрукты в верхней части сооружения. Над просушивающимися фруктами располагается выкрашенная в чёрный цвет металлическая конструкция, имеющая щели. Ее функция — пресечение попадания на фрукты прямых солнечных лучей, потенциально могущих сжечь минералы, которые находятся в составе фруктов. После того, как просушивающимся фруктам будет дана тепловая энергия, вода,

которая находится в составе продукции, превращается в пар. При помощи коллектора, который расположен в нижней части сооружения, пар выводится через щель, расположенную в верхней части сооружения вместе с прогревающимся теплым воздухом. Причиной того, что при помощи коллектора прогревающийся тёплый воздух выходит через щели, которые находятся в верхней части сооружения, является разница температур. Температура нижней части сооружения ниже температуры верхней части. Таким образом, из щели, которая находится внизу сооружения, нижняя часть берет холодный воздух и процесс повторяется.

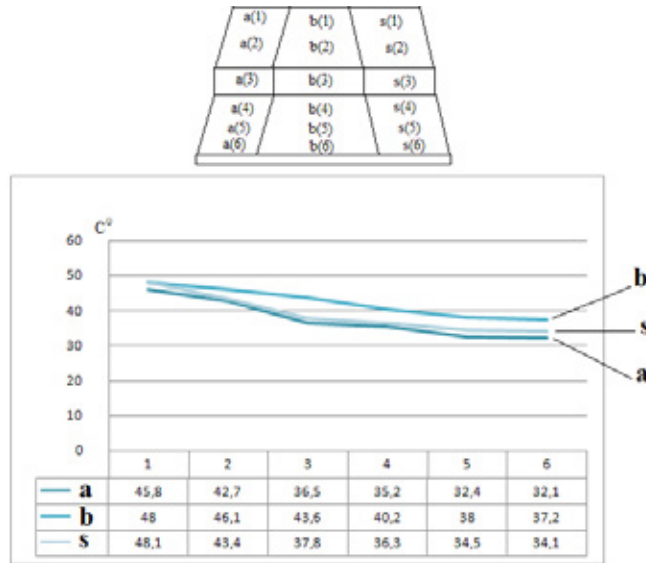


Рис. 2. Графический и табличный вид температуры внутри сооружения при условии радиация солнца равной 759 Вт/м<sup>2</sup> и внешней температуре, равной 32 °С, (схематический вид спереди)

В заключение можно отметить, что с целью эффективного использования солнечной энергии коллектор, расположенный в нижней части сооружения и ускоряющий случай естественной конвекции, повышает эффективность этого сооружения. Сооружение было создано с расчетом на простоту и экономичность, были использованы дополнительные звеньевые местные материалы. При создании

сооружения для солнечной сушки фруктов были установлены коллекторы, которые обеспечивают эффективное использование дополнительной солнечной энергии. Конструкция сооружения основана на опыте ускорения процесса сушки с целью обеспечения должного качества высушенной продукции.

Литература:

1. Якубов, Ю. Н. Аккумуляция энергии солнечного излучения. Ташкент, Издательство «ФАН» Р. Уз. 1981. 103 с.

## Двухскатная теплица с эффективным использованием солнечного излучения

Мирзаев М. С.

Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Поиски и разработки по направлению эффективного использования и аккумуляции солнечной энергии в теплицах, особенно в условиях юга Азии, где имеется изобилие солнечной радиации, безусловно, имеют большое народнохозяйственное значение [1,2].

Для теплиц могут быть традиционные или альтернативные источники энергии. Этот вопрос можно считать решенным, так как использование солнечной энергии для теплиц позволяет не только экономить природное топливо, но и способствуют охране окружающей среды.

Для региона, расположенного на 38° северной широты выбираем теплицу с двухскатными боковыми стенками  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  (рис.1), с углом  $\angle A = 52^\circ$  наклонной поверхности  $\square ABB'A'$ , который направлен на юг и с углом  $\angle C = 38^\circ$  наклонной поверхности  $\square BCC'B'$ , который направлен на север.

Длина теплицы  $AA' = BB' = CC' = L$ ; высота боковых стенок теплицы  $h$ ; высота дополнительных боковых стенок теплицы  $h_0$ ; углы  $\angle A = 52^\circ$ ,  $\angle C = 38^\circ$  и  $\angle B = 90^\circ$ .

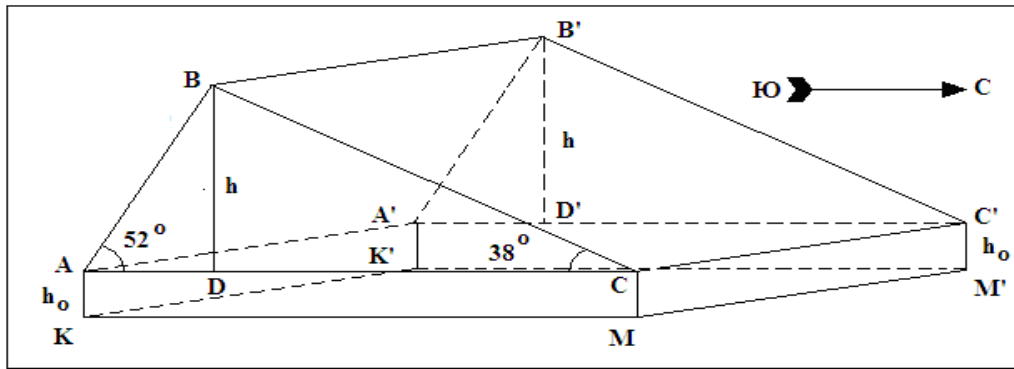


Рис. 1. Схема для вычисления

На основе исходных данных вычислим площадь поверхности  $\square ABB'A'$ ,  $\square BCC'B'$ ,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle A'B'C'$  и  $\square ACC'A'$  элементов и площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы:

Площадь поверхности (фигуры)  $\square ABB'A'$  элемента модельной конструкции -  $F_1$

$$F_1 = AB \cdot AA' = \frac{BD}{\sin 52} \cdot L = \frac{h}{\sin 52} \cdot L;$$

Площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы:

$$F_{огр} = F_1 + F_2 + F_{1б} + F_{2б} + F_{пол} + F_o =$$

$$= \frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right).$$

Отметим, что для свободного роста растений внутри теплицы необходима соответствующая высота потолка, т. е. высота стенки  $h_o$ , которая выбирается произвольно, по усмотрению обладателя теплицы. Для теплицы, предлагаемой авторами, высота дополнительной стенки выбрана  $h_o = 2\text{ м}$ .

Коэффициент использования пола определяется как отношение площади поверхности пола на площадь поверхности ограждения модельной конструкции теплицы:

$$\beta = \frac{F_{пол}}{F_{огр}} = \frac{F_{пол}}{F_1 + F_2 + F_{1б} + F_{2б} + F_{пол} + F_o} =$$

$$= \frac{hL \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}.$$

Для вычисления коэффициента использования пола  $\beta$  исходными данными принимаем:  $h = 0,1,2,3,\dots,10\text{ м}$ ;  $L = 10,20,30,40,50,60,70,80\text{ м}$ .  $h_o = 2\text{ м}$ .

Для каждой точки  $\beta_{max}$  выберем соответствующую высоту теплицы  $h$ . Выбранные и вычисленные значения высоты  $h$  соответственно длины  $L$ , объем воздуха (паровоздушной смеси) и площадь поверхности пола теплицы представлены в табл. 1.

Таблица 1. Выбранные значения высоты  $h$  соответственно длины  $L$  и объем паровоздушной смеси двухскатной теплицы

Длина теплицы	$L = 30\text{ м}$	$L = 40\text{ м}$	$L = 50\text{ м}$	$L = 60\text{ м}$	$L = 70\text{ м}$	$L = 80\text{ м}$
Высота теплицы	$h = 9\text{ м}$	$h = 8\text{ м}$	$h = 7\text{ м}$	$h = 6\text{ м}$	$h = 5\text{ м}$	$h = 4\text{ м}$
Объем теплицы	$3621\text{ м}^3$	$3962\text{ м}^3$	$3971\text{ м}^3$	$3714\text{ м}^3$	$3248\text{ м}^3$	$2643\text{ м}^3$
Площадь поверхности дна теплицы	$557.1\text{ м}^2$	$660.4\text{ м}^2$	$722\text{ м}^2$	$742\text{ м}^2$	$721.7\text{ м}^2$	$660.8\text{ м}^2$

Литература:

1. Постановление кабинета Министров Республики Узбекистан об утверждении положения о республиканской комиссии по вопросам энергоэффективности и развития возобновляемых источников энергии. (Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2015 г., № 32, ст. 433).
2. Якубов, Ю.Н. Аккумуляирование энергии солнечного излучения. Ташкент, Издательство «ФАН» Р. Уз. 1981. 103 стр.

## Способ выбора материала и определение геометрических размеров аккумулятора энергии солнечного излучения

Мирзаев М. С.

Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Поиски и разработки аккумуляирования солнечной энергии в теплицах, особенно в условиях юга Азии, где имеется избыток солнечной радиации, безусловно, имеют большое народнохозяйственное значение. Постановлением Кабинета Министров Республики Узбекистан был разработан документ «Об утверждении положения о Республиканской комиссии по вопросам энергоэффективности и развития возобновляемых источников энергии» [1,2].

Для определения тепловой потери в стенках элементов модельной конструкции теплицы автор данной статьи рекомендует использовать нововведенные коэффициенты тепловых потерь ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3'$ ,  $\beta_3''$  и  $\beta_o$ ), которые определяются следующим образом: Коэффициент тепловой потери элемента конструкции (фигуры)  $\square ABB' A' - \beta_1$

$$\beta_1 = \frac{F_1}{F_{оп}} = \frac{F_1}{F_1 + F_2 + F_{1\sigma} + F_{2\sigma} + F_{пот} + F_o} =$$

$$= \frac{\frac{h}{\sin 52} \cdot L}{\frac{h}{\sin 52} \cdot L + \frac{h}{\sin 38} \cdot L + h^2 \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + h \cdot L \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right) + 2h_o L + 2h_o h \cdot \left( \frac{1}{\text{tg} 52} + \frac{1}{\text{tg} 38} \right)}.$$

Остальные коэффициенты тепловых потерь элементов конструкции ( $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_3'$ ,  $\beta_3''$  и  $\beta_o$ ) элемента модельной конструкции (фигуры) вычисляются таким же образом.

На основе вышеизложенных данных авторами выявлены значения коэффициентов тепловых потерь каждого элемента модельной конструкции рекомендуемой теплицы (рис.1) Они имеют следующие значения:  $\beta_1 = 0,15$ ;  $\beta_2 = 0,25$ ;  $\beta_3' = \beta_3'' = 0,03$ ;  $\beta_o = 0,14$ , соответственно коэффициент  $\beta = 0,43$ .

Полученные результаты показывают, что наибольшее значение коэффициента тепловой потери приходится на наклонную поверхность, расположенную под углом  $38^\circ$  к горизонту и направленную к югу —  $\beta_2 = 0,25$ .

Для уменьшения потоков тепловых потерь авторами рекомендуется создать двухскатную блочно-щедовую теплицу, состоящую из нескольких пролетов [3]. Каждый пролет состоит из прозрачного южного ската (поверхность —  $F_1$ ), расположенного под углом  $52^\circ$  к горизонту и полупрозрачного северного ската (поверхность —  $F_2$ ), расположенного под углом  $38^\circ$  к горизонту. Внутренние поверхности теплиц, окрашенные светлой краской, хорошо отражают падающие на них солнечные лучи на поверхности пола теплицы зимой, а летом тень, образуемая от глухих элементов, будет перемещаться по поверхности растений в теплице (рис.2).

Также для уменьшения потоков тепловых потерь в теплице авторами рекомендуется часть дополнительной поверхности покрыть теплоизолирующим материалом —  $F_o$ , направленным к северу. Дополнительная поверхность уменьшает потоки тепловых потерь теплицы на значения 4 – 5%.



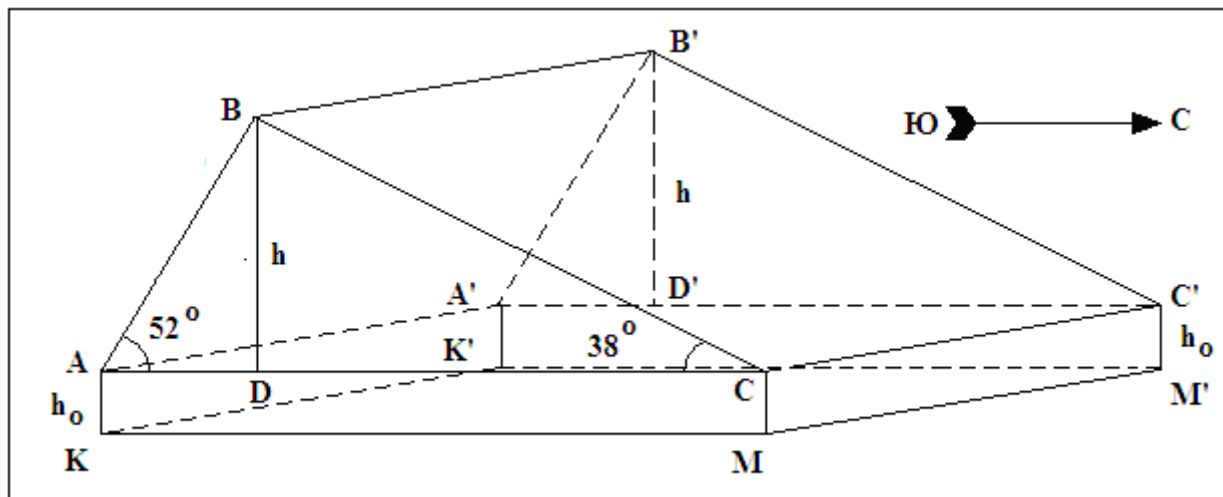
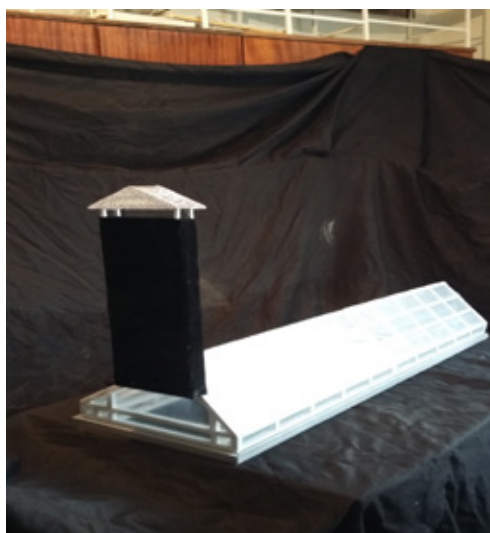


Рис. 1. Схема для вычисления



а)



б)

Рис. 4. Натуральное изображение лабораторно-экспериментальной теплицы:  
а) традиционная двухскатная теплица; б) щедовая теплица.

Литература:

1. Закон Республики Узбекистан «О рациональном использовании энергии». (Ведомости Олий Мажлиса Республики Узбекистан, 1997 г., № 4–5, ст. 118; 2003 г., № 5, ст. 67; Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2007 г., № 39, ст. 402; 2013 г., № 18, ст. 233, № 41, ст. 543).
2. Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан об утверждении положения о республиканской комиссии по вопросам энергоэффективности и развития возобновляемых источников энергии. (Собрание законодательства Республики Узбекистан, 2015 г., № 32, ст. 433).
3. Якубов, Ю.Н. Аккумуляция энергии солнечного излучения. Ташкент, Издательство «ФАН» Р. Уз. 1981. 103 стр.

## Термодинамика геотермального теплоснабжения

Рахматов Илхом Исмамович, кандидат технических наук, доцент;

Саидова Раъно Мехриевна, преподаватель  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Использование альтернативных источников энергии в народном хозяйстве — одно из актуальных задач современной энергетики. Геотермальное теплоснабжение — одно из направлений альтернативной энергетики. Термодинамика геотермального теплоснабжения изучена недостаточно хорошо. По степени водоотдачи геотермальные скважины разделяются на высокодебитные (0.02 м<sup>3</sup>/с и более), среднедебитные (0.005–0.02 м<sup>3</sup>/с) и малодебитные (менее 0.005 м<sup>3</sup>/с).

Температура отдельных геотермальных вод колеблется в довольно широких пределах. Поэтому температура как критерий для подразделения подземных вод по их качественным показателям нашла отражение во многих зарубежных и отечественных классификациях. В связи с разносторонним подходом к оценке геотермальных вод по их качественным показателям и значительной условностью при выборе температурного диапазона единой классификации пока нет.

Геотермальные воды по степени минерализации подразделяются [3] на пресные (до 1 г/л), слабосоленые (1–3 г/л), солоноватые (3–5 г/л), сильносоленые (5–10 г/л), слабосоленые (10–20 г/л), соленые (20–35 г/л), сильносоленые (35–50 г/л), слабые рассолы (50–75 г/л), рассолы (75–100 г/л) и крепкие рассолы (более 100 г/л). Для нужд теплоэнергетики могут быть использованы и высокоминерализованные воды, однако в каждом конкретном случае необходимо находить оптимальные технико-экономические решения.

Подразделение геотермальных вод по химическому признаку основано на классификации Сулина. При этом выделяются четыре типа вод: гидрокарбонатно-натриевый, сульфатно-натриевый, хлормagneиный, хлоркальциевый.

По газовому составу геотермальные воды подразделяются на агрессивные (углекислые и сероводородные) и нейтральные (азотные и метановые).

Химический и газовый состав геотермальных вод, а также минерализация наряду с энергетическим потенциалом должны учитываться при выборе схемы или системы теплоснабжения. На начальной стадии проектирования следует решить следующие вопросы:

Может ли геотермальная вода с данным химическим и газовым составом, минерализацией непосредственно подаваться в системы отопления горячего и технического водоснабжения?

Может ли данная геотермальная вода подвергаться догреву?

Какие устройства могут быть использованы для преобразования энергетического потенциала геотермальных вод?

Каковы необходимые методы водоподготовки?

По тепловому потенциалу геотермальные воды можно разбить на следующие группы: Перегретые более (100°С), Высокотермальные (60–100°С), Термальные (40–60°С), Слаботермальные (до 40°С).

Улучшение технико-экономических показателей теплоэнергетического использования геотермальных вод требует применения различных технических приспособлений и агрегатов, использующих органическое топливо, электроэнергию, химические вещества как в сфере их использования, так и утилизации. К таким агрегатам относятся, например, котельные, теплообменники, артезианские и сетевые насосы, электродвигатели, тепловые насосы, холодильные машины. Поэтому, чтобы оценить получаемую и используемую энергию геотермальных вод, целесообразно воспользоваться общим термодинамическим методом анализа — эксергетическим методом, позволяющим оценить работоспособность энергии в соответствии со вторым началом термодинамики.

Составим эксергетический график Грассмана и энергетический график Сенки для отопления [1] (рис 1). Предположим, что температура пластовой воды на сбросе 65°С, температура воды у потребителя 60°С и температура воды при сбросе 30°С. Контрольная поверхность *I* показывает потери в стволе скважины, *II* — в тепловой сети, *III* — потери со сбросом, *IV* — потери при теплообмене в отопительном отделе.

Анализ графиков показывает, что значительные потери эксергии имеют место и в стволе скважины, и в тепловой сети. Энергетический баланс дает заниженное значение потерь.

Потери эксергии в стволе зависят от разности температур воды в пласте  $t_{пл}$ , как правило, от геотермической ступени  $\Gamma$  конкретного района и глубины скважины  $H$  и определяется по формуле

$$t_{пл} = T(H) = T_0 + \frac{H - H_0}{\Gamma}$$

Где  $H_0$  — глубина залегания слоя с постоянной температурой пород на глубине нейтрального слоя;  $T(H)$  — температура горных пород на глубине  $H$ .

При достаточно больших дебитах скважин (около 0,04–0,07 м<sup>3</sup>/с) и глубинах  $H$ , равных  $H$  1500–2500 м,

Разность  $\Delta t = t_{пл} - t_y$  незначительна (1–2°С) и ряд авторов при оценке энергетического потенциала скважин этой величиной пренебрегают. При малых и средних дебитах геотермальных скважин температура воды на устье скважины в значительной мере зависит от фактического дебита и срока ее эксплуатации.



## Теплообменные процессы капиллярно смачиваемых солнечных водоопреснителей

Саидов Курбон Сайфуллоевич, кандидат физико-математических наук, доцент  
Бухарский государственный университет (Узбекистан)

Приведены результаты экспериментальных исследований по определению технических характеристик солнечного водоопреснителя, капиллярно смачиваемого и наклонной поверхностью.

Известно, что наклонное и параллельное положения рабочих поверхностей (испарения и конденсации) в солнечных водоопреснителях продуктивнее лотковых и ступенчатых [1,3]. В данном исследовании при изготовлении водоопреснителя для основания использованы сосновые образцы (рис. 1), что позволяет капиллярно поднимать влагу 10÷15см. При этом на рабочей поверхности образуется тонкий слой влаги. Испаряющая поверхность установлена под углом 30° к горизонту [2]. Нижняя часть деревянного основания опускается в емкость с солёной водой. На верхней части основания установлена установка типа «горячий ящик», который закрывается стеклянным листом.

Тепловой баланс низкотемпературной солнечной установки можно сформулировать в следующем виде.

$$\tau \varepsilon I_{\text{рад}} = Q_{\text{потер}}^{\text{конв}} + Q_{\text{потер}}^{\text{излуч}} + Q_{\text{потер}}^{\text{бок.поверх}} + Q_{\text{полз}} \quad (1)$$

где  $\tau$  – коэффициент пропускания прозрачной изоляции;  $\varepsilon$  – коэффициент поглощения поверхности теплоприёмника;  $I_{\text{рад}}$  – интенсивность солнечной радиации ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ ).

Правая часть формулы (1) представляет потери теплового потока от прозрачной поверхности в виде конвективного теплообмена и в виде излучения, а также потери от боковых поверхностей установки.

$$\tau \cdot \varepsilon I_{\text{рад}} - q_{\text{полз}} = \alpha (T_{\text{mn}} - T_{\text{проз}}) + \varepsilon_0 C_0 \left( \frac{T_{\text{mn}}}{100} \right)^4 + q_{\text{потер}}^{\text{бок.поверх}} \quad (2)$$

где:  $\alpha$  – коэффициент теплоотдачи от внутреннего воздуха установки к прозрачной поверхности ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}}$ );  $T_{\text{mn}}$  – температура теплоприёмника (для теплиц поверхности зелёного рассад) ( $^\circ\text{C}$ );  $T_{\text{проз}}$  – температура прозрачной изоляции ( $^\circ\text{C}$ );  $\varepsilon_0$  – коэффициент черноты серого материала ( $\varepsilon_0 = 0,8$ );  $C_0$  – коэффициент излучения абсолютного черного тела ( $C_0 = 5,67 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \text{K}^4}$ ).

Для основы установки мы выбрали материал по результатам измерения. В качестве материала была выбрана сосна. Сосна хорошо обрабатывается, используется в народном хозяйстве, по теплопроводности стоит в ряду теплоизоляторов, при этом дешевле других материалов. Теплопроводность сосны поперек волокна  $0,14 - 0,16 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}}$ , вдоль волокна  $0,35 - 0,37 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{K}}$ .

Исходную воду поднимают капилляры дерева, затем в паровоздушной камере превращается конденсат и концентрированную воду. Измеряя количество конденсата и соленую воду на выходе, определяем падение количества тепла за счет поступления исходной воды через капилляры.

$$Q_{\text{ост}} = m_k c(t_0 - t_k) + m_{ch} c(t_0 - t_{ch}) \quad (4)$$

здесь  $m_k$  и  $m_{ch}$  массы конденсата и концентрированной воды,  $t_k$  и  $t_{ch}$  температуры соответственно,  $t_0$  – температура исходной воды через капилляры.

Если в работе необходимо дополнительное смачивание, то в формулу (4) можно добавить падение тепла за счет дополнительного смачивания. Для упрощения расчетов обеспечивается одинаковая температура воды в основании и дополнительно вводимой.

Тогда падение тепла, связанное с дополнительным смачиванием, можно рассмотреть вместе с расходом тепла через нижнюю часть деревянного основания установки.

$$Q_{\text{ost}} = m_k c(t_0 - t_k) + m_{ch} c(t_0 - t_{ch}) + m_q c(t_0 - t_k) \quad (5)$$

Так как в паровоздушнoй камере слой воды незначителен, инерционность установки очень мала [4].

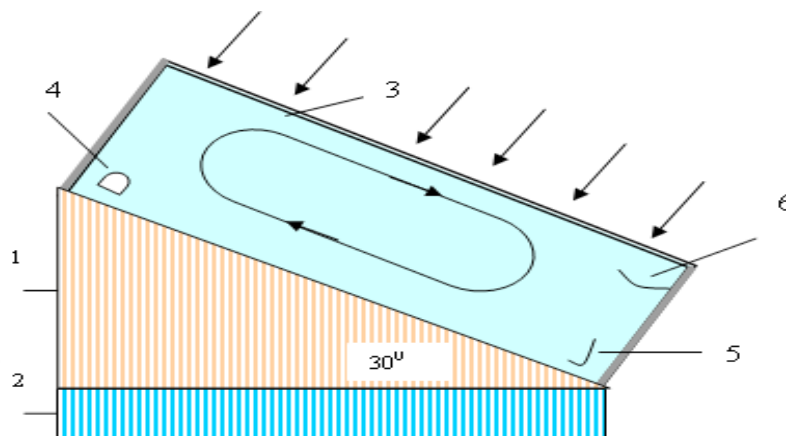


Рис. 1. Капиллярно смачиваемый солнечный водоопреснитель и направления конденсации пара: 1) Капиллярное основание установки, собранное из деревянных досок (на поверхности воды); 2) Часть деревянного основания, погруженная в воду; 3) Прозрачная поверхность; 4) Рубка для дополнительного смачивания; 5) Слив для соленой воды; 6) Слив для дистиллированной воды.

Литература:

1. Саидов, К. С., Ботиров К. Капилляр намланувчи куёш сув чучитгичи қурилмаси. ЎзР Интеллектуал мулк агентлиги Расмий ахборотномаси. 2014 йил 1 (153) с. 20–21.
2. Авезов, Р. Р., Ахатов Ж. С. Коэффициент использования тепла солнечных водоопреснительных установок с многоступенчатыми испарительно-конденсационными камерами // Гелиотехника. 2007. № 2.
3. Клычев, Ш. И., Эркинбаева Г., Бахрамов С. А., Исманжанов А. А. Теплотехнические характеристики солнечных парниковых опреснителей // Гелиотехника. 2002. № 2. с. 38–43.

## Моделирование процессов фильтрации суспензии в пористой среде

Файзиев Бекзоджон Муртазаевич, преподаватель  
Самаркандский государственный университет имени Алишера Навои (Узбекистан)

Фильтрация нашла широкое применение во многих отраслях промышленности для сгущения твердой фазы суспензии и осветления жидкостей, в том числе сбросовых вод промышленных предприятий (например, целлюлозно-бумажных, угледобывающих) и коммунального хозяйства. Начало теории фильтрации суспензии связано с [1,2,3].

В [4, 5] предложено, что осадок в пористом пространстве фильтра глобулярной структуры имеет две формы — вымываемую и невымываемую. Соответственно зоны фильтра называются активными и пассивными. Активные зоны, омываемые струйной составляющей потока, формируют вымываемый осадок с концентрацией  $\rho_a$ , пассивные зоны, являющиеся застойными, формируют невымываемый осадок с концентрацией  $\rho_n$ . Обозначим полную емкость фильтра через  $\rho_0$ . Из изложенного следуют  $\rho_0 = \rho_{a0} + \rho_{n0}$ , где  $\rho_{a0}$  и  $\rho_{n0}$  — емкости соответственно активных и пассивных зон. Указанные емкости являются динамическими характеристиками. Они зависят не только от «качества» дисперсной фазы, но и от скорости и структуры потока, а также геометрии слоя.

Кинетика осадка образования в процессе фильтрация суспензии в пористой среде, как правило определяется в виде [6]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = F(c, \rho),$$

где,  $c$  — концентрация суспензии,  $\rho$  — концентрация осадка,  $F(c, \rho)$  — функция характеризующая кинетику осадкообразования, зависит от формы глобулярной структуры.

Для невымываемого осадкообразования, где взвешенные частицы, когда-то осевшие в поровом объеме, никогда не освобождаются потоком жидкости [1,7], уравнение кинетики осаждения этого типа имеет форму  $d\rho/dt = \lambda cv$ .

Где  $\lambda$  не является постоянной в течение процесса фильтрации,  $v$  — скорость фильтрации.

Для вымываемого осадкообразования, где взвешенные частицы поочередно осаждаются и освобождаются потоком жидкости [2,8], соответствующее уравнение кинетики имеет вид  $d\rho/dt = K_a vc - K_d \rho$ , с феноменологическими коэффициентами осаждения и освобождения,  $K_a$  и  $K_d$ , определяемыми эмпирическим (опытным) путем.

В [4, 5] кинетика образования невымываемой формы осадка описывается уравнением

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \beta_n(\rho_n)c, \quad (1)$$

и аналогична моделям безотрывного фильтрования, где  $c$  — концентрация суспензии,  $\beta_n = \alpha(\rho_n)\beta_{n0}$  — коэффициент, связанный с эффектом уплотнения (старения) осадка,

$$\alpha(\rho_n) = \begin{cases} 1 & \text{для } \rho_n \leq \rho_{n1}, \\ \rho_{n1} / \rho_n & \text{для } \rho_{n1} < \rho_n < \rho_{n0}, \\ 0 & \text{для } \rho_n = \rho_{n0}. \end{cases} \quad (2)$$

Для активных зон в [4, 6] дано уравнение кинетики в виде

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \beta_a \left( c - \frac{\rho_a}{\rho_{a0}} c_0 \right), \quad (3)$$

где  $c_0$  — постоянная концентрация,  $\beta_a$  — коэффициент, характеризующий кинетику в активной зоне, совпадающий с линейной моделью фильтрация.

В [9–10] на основе вероятностного подхода предлагаются модифицированные уравнения кинетики кольтматации и суффозии. Кольтматационные и суффозионные процессы зависят от градиента давления —  $|\nabla p|$ , причем чем больше  $|\nabla p|$ , тем меньше вероятность кольтматации и тем больше вероятность суффозии [9]. Исходя из этого, кинетическое уравнение (3), характеризующее осаждение и освобождение твердых частиц в вымываемой зоне пористой среды можно представить в виде

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{\beta_a}{1 + \omega_1 |\nabla p|} c - \beta_a \frac{\rho_a (1 + \omega_2 |\nabla p|)}{\rho_{a0}} c_0, \quad (4)$$

где  $\omega_1, \omega_2$  — постоянные коэффициенты,  $|\nabla p|$  — модуль градиента давления.

Степень вымываемости осадка характеризует величина  $\gamma = \rho_{a0} / \rho_{n0}$ . Экспериментально показано [11], что  $\gamma \leq 0,1 \div 0,2$ , причем для тонкодисперсных загрузок (0,05–0,1 мм) при тех же условиях фильтрования  $\gamma$  меньше, чем для крупнозернистых (0,5–2 мм), а для пористых материалов с развитой поверхностью (керамзит) меньше, чем для материалов с гладкой поверхностью (песок). Это подтверждает, что емкость активной зоны намного меньше, чем емкость пассивной, т. е.  $\rho_{a0} \ll \rho_{n0}$ .

Рассмотрим полубесконечный однородный пласт с первоначальной пористостью  $m_0$ , заполненный однородной жидкостью (т.е. жидкостью без дисперсных частиц). В точке  $x = 0$ , начиная с  $t > 0$  в пласт поступает суспензия с концентрацией  $c_0$  со скоростью фильтрации  $v(t) = v_0 = \text{const}$ .

Система уравнений фильтрации суспензии состоит из уравнения баланса с учетом диффузии, модифицированного уравнения кинетики в активной зоне (4), уравнения (1) с учетом явления старения в пассивной зоне и закона Дарси, в одномерном случае имеет вид

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v_0 \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{\beta_a}{1 + \gamma |\nabla p|} c - \beta_a \frac{\rho_a (1 + \omega |\nabla p|)}{\rho_{a0}} c_0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \beta_n(\rho_n) c,$$

$$v_0 = K(m) |\nabla p|, \quad m = m_0 - (\rho_a + \rho_n),$$

где  $m$  — текущая пористость среды,  $K(m)$  — коэффициент фильтрации.

Для выражения  $K(m)$  используем закон Кармана-Козени  $K(m) = k_0 m^3 / (1 - m)^2$ ,  $k_0 = \text{const}$ .

Для замыкания системы (5) используем следующие начальные и граничные условия

$$c(0, t) = c_0 = \text{const}, \quad c(\infty, t) = 0, \quad c(x, 0) = 0, \quad \rho_a(x, 0) = \rho_n(x, 0) = 0. \tag{6}$$

Для решения задачи (5)-(6) применим метод конечных разностей [10].

При фильтровании суспензий образующийся осадок, как правило, является невымываемым [12], поэтому для таких загрузок можно положить  $\gamma = 0$ . Тогда система (5) в пренебрежении активной составляющей скорости формирования осадка  $\partial \rho_a / \partial t = 0$  примет вид

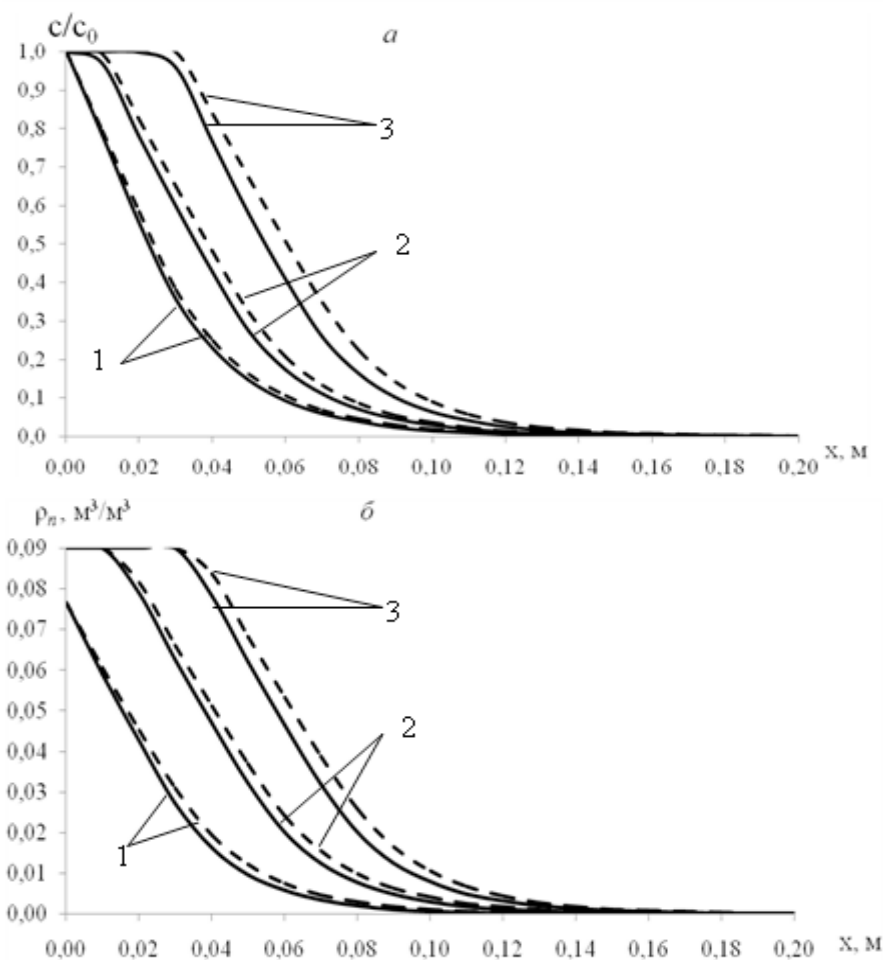


Рис. 1. Профили изменения  $c / c_0$  (а),  $\rho_n$  (б) при (---  $\partial \rho_a / \partial t = 0$ , —  $\partial \rho_a / \partial t \neq 0$ , 1 —  $t=450$  с, 2 —  $t=900$  с, 3 —  $t=1350$  с)  $\rho_0 = 0,1$ ,  $\rho_{a0} = 0,01$ ,  $\rho_{n0} = 0,09$ ,  $\rho_{n1} = 0,03$ ,  $c_0 = 0,05$ ,  $m_0 = 0,3$ ,  $v_0 = 10^{-4}$  м/с,  $\beta_{a0} = 0,005$  с $^{-1}$ ,  $\omega_1 = 0,1$  м/МПа,  $\omega_2 = 0,1$  м/МПа,  $k_0 = 0,01$  м $^2$ /(МПа·с)

$$m_0 \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \rho_n}{\partial t} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = \beta_n(\rho_n)c.$$

Решаем эту систему при условиях

$$c(0, t) = c_0, \quad c(x, 0) = 0, \quad \rho_n(x, 0) = 0. \quad (9)$$

На основе численного решения задач (5)-(6) и (7)-(8) определены поля концентраций  $c$ ,  $\rho_n$ ,  $\rho_a$ .

Из рис. 1 видно, что пренебрежение эффектами вымываемости осадка приводит к увеличению концентраций взвешенных частиц в потоке суспензии и невымываемого осадка в соответствующих точках пласта.

Литература:

1. Iwasaki, T. Some notes on sand filtration of sand filtration, Journal of American Water Works Assosation 29 (5) (1937) 1591–1602.
2. Минц, Д. М. Кинетика фильтрации малоконцентрированных водных суспензий на водоочистных фильтрах. — Докл. АН СССР, 1951, 78, № 2, с. 315–318.
3. Шехтман, Ю. М. Фильтрация малоконцентрированных суспензий. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 212 с.
4. Веницианов, Е. В., Рубинштейн Р. Н. Динамика сорбции из жидких сред. — М.: Наука, 1983. — 237 с.
5. Веницианов, Е. В., Сенявин М. М. Математическое описание фильтрационного осветления суспензий // Теорет. основы хим. технологии, 1976. 10, № 4. с. 584–591.
6. C. Tien, B. V. Ramarao, Granular Filtration of Aerosols and Hydrosols, 2nd ed., Elsevier, 2007
7. Ives, K. J., Theory of filtration. Special Lecture No. 7, in: Proceedings of the International Water Supply Association, Eight Congress, Vienna, 1969, vol. 1, pp. K3-K28.
8. Adin, A., Rebhun M., A model to predict concentration and head-loss profiles in filtration // Journal of American Water Works Association 69 (8) (1977) 444–453.
9. Хужаёров, Б. Х. Модель фильтрации суспензии с учетом коагуляции и суффозии // ИФЖ. 1992. Т. 63, № 1. С. 72–79.
10. Хужаёров, Б. Х., Давиденко М. А. О модификации модели коагуляционно-суффозионной фильтрации // ДАН РУз. 1997. № 5. С. 25–28.
11. Митин, Б. А. Исследование влияния структурно-механических свойств осадка на работу зернистых осветлительных фильтров: Автореф. дис. канд. техн. наук М.: ВНИИ ВОДГЕО, 1969, — 18 с.
12. Скворцов, Н. Г, Веницианов Е. В., Сенявин М. М. Расчет фильтрационного осветления малоконцентрированных суспензий на тонкодисперсных загрузках. — Теорет. основы хим. технологии, 1981, 15, № 1, с. 141–144.



## Химическая кинетика кластерообразования

Хожиев Шерали Тешаевич, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Институт ионно-плазменных и лазерных технологий АН Республики Узбекистан

Хожиев Шерзод Тешаевич, ассистент;  
Иброхимов Умиджон Гиёсиддин угли, студент  
Ташкентская медицинская академия (Узбекистан)

Фазуллаева Малика Гайрат кизи, студент  
Навоийский государственный педагогический институт (Узбекистан)

*В настоящей работе в рамках химической кинетики проводится анализ протекающих процессов кластерообразования. Кластеры формируются путем последовательного присоединения продуктов распыления (мономеров) к активному аниону в результате химических реакций как комбинаторный синтез.*

**Ключевые слова:** кластер, химическая кинетика, распыление, нанореактор, мономолекулярный распад

## Chemical kinetics of cluster formation

*In this paper chemical kinetics of cluster formation have been presented. By using of chemical reactions we can explain metal cluster sputtering. Clusters are formed by consecutive joining of monomers sputtering products to active O<sup>-</sup> anion as a result of pair collisions among themselves. In this case occurs combinatory synthesis.*

Под кластерами понимается — большое количество слабо связанных атомов или ионов, взаимодействующих слабыми силами Ван-дер-Ваальса. Кластерные ионы — сложные ионно-атомные комплексы, состоящие из центрального положительного или отрицательного иона и окружающих его нейтральных атомов и молекул, образующих в поле иона упорядоченную структуру. Образование кластерных ионов — процесс, характерный для многих газофазных систем, завершающий при подходящих условиях все ионно-молекулярные превращения [1]. Теория соударений основана на кинетической теории газов, в своей простейшей форме она применима только к биомолекулярным процессам в газовой фазе. Газовая фаза которая и является основной фазой, где именно происходят основные реакции. В настоящей работе методом вторично-ионной масс-спектрометрии (ВИМС) проведено исследования механизма образования и мономолекулярного распада металлических кластеров. А также дается кинетика образования кластеров как химические соединения. Ионное распыление обладает уникальными возможностями с точки зрения генерации кластеров различного состава и исследования их характеристик, поскольку позволяет подбором распыляемого материала и сорта бомбардирующих ионов получать кластеры, которые сложно синтезировать другими способами, а высокая доля заряженных и возбужденных частиц не требует дополнительных средств для их возбуждения и ионизации при исследованиях методом ВИМС. Поэтому многими исследователями предпринимались попытки обнаружения кластеров спектроскопическими методами.

Согласно современным представлениям [2], в процессе распыления кластеры покидают поверхность с колебательной энергией возбуждения и с высокой вероятностью распада на два фрагмента: заряженный и нейтральный. Распыленные кластеры имеют широкое распределение по энергиям возбуждения и широкий диапазон возможных времен жизни. Поэтому распады кластеров могут происходить от момента их эмиссии до момента регистрации. Значения константы скорости распада и характер ее изменения в зависимости от размера возбужденного иона в исследованном диапазоне времен  $10^{-9}$ – $10^{-4}$  с [2] свидетельствуют в пользу представления о фрагментации как о реакции мономолекулярного распада, протекающей после перераспределения энергии возбуждения по различным связям и выделения на конкретной связи. Вместе с тем, конкретный механизм, ответственный за возбуждение и мономолекулярный распад распыленных кластеров, до сих пор остается не выясненным. Явного преобразования энергии первичного иона в возбуждение, как и в кинетическую энергию [3] кластера, не наблюдается, а вопрос о связи внутренней энергии распыленного кластера с механизмом образования остается открытым. Целью настоящей работы является на основе экспериментальных данных полученных в течение нескольких лет в нашей лаборатории, попытаться обосновать гипотезу об образовании кластерных ионов. Кластеры образуются в газовой фазе в результате парных неупругих соударений над поверхностью атомов и молекул. При этом кластерный ион приобретает поступательную и внутреннюю энергию (колебательную и вращательную), достаточную для обратного распада, подобно тому, как это происходит при

образовании комплексных ионов в бимолекулярных газофазных реакциях [4]. Целью исследования химической кинетики является экспериментальное определение скорости реакции и выявление механизма реакции, т. е. числа стадий, протекающих во время химической реакции. Предмет химической кинетики понять нетрудно, однако строгое теоретическое рассмотрение кинетических энергетических параметров возможно лишь для очень простых систем в газовой фазе [5]. Порядок химической реакции отражает общую зависимость процесса от концентрации. Молекулярность реакции относится к одной определенной стадии суммарного процесса. Когда взаимодействуют две частицы и осуществляются элементарные реакции — то это называется — бимолекулярными реакциями. Понимание механизма реакции — означает установление молекулярности реакции, а не порядка реакции. Однако экспериментально определяется только порядок реакции. Реакция называется реакцией нулевого порядка, если ее скорость не зависит от концентрации исходных веществ. Рассмотрим реакцию нулевого порядка в общем виде:

$$(A \text{ — продукт реакции}) \text{ Скорость} = -\frac{d[A]}{dt} = k \quad (1)$$

Где  $k$  (М/с) — константа скорости реакции нулевого порядка. Преобразуя уравнение (1) получим  $d[A] = -kdt$ .

Интегрирование от  $t=0$  до  $t=t$  дает

$$\int_{[A]_0}^{[A]} d[A] = [A] - [A_0] = - \int_0^t k dt = -kt$$

$$[A] = [A]_0 - kt$$

Где  $[A_0]$  и  $[A]$  — концентрации при  $t=0$  и  $t=t$ .

Реакции нулевого порядка очень мало, большая их часть является гетерогенными реакциями, протекающими на поверхности металла. Исследования выполнялись на вторично-ионном масс-спектрометре («нанореакторе» — это та часть прибора, в котором происходят химические реакции за времена не превышающие наносекунды). Поскольку, процесс рекомбинации и активации кластерных ионов происходит за времена  $10^{-13}$ с, а время столкновения первичного иона с поверхностью мишени порядка  $10^{-15}$  с.) с двойной фокусировкой обратной геометрии. Вторичные ионы  $M_n O_m^\pm$  генерировались при бомбардировке поверхностей металлов ионами инертных газов и окислении поверхности мишени путем напуска кислорода в камеру. Энергия ионов бомбардирующих частиц составляли от 9–18 кэВ, а плотность тока равнялась 0.5–1  $mA \cdot cm^{-2}$ . Мишень бомбардировали под углом  $45^\circ$  относи-

тельно нормали при сканировании в растр размером  $1 \times 1$  мм. Распыленные вторичные ионы ускорялись до энергии  $eU_0 = 5000$  эВ, фокусировались иммерсионной линзой и поступали на входную щель масс-анализатора. Электростатический анализатор расположен позади магнитной призмы и представляет собой трехэлектродное электростатическое зеркало. Ионы выбранной массы регистрировались вторично-электронным умножителем и счетчиком ионов. В приборе есть две беспольные зоны, в которых возможна прямая регистрация распада вторичных ионов в различных временных диапазонах после эмиссии. Зона  $L_1$  — пространство между краем иммерсионного объектива и торцом магнитного анализатора (время пролета зоны  $-10^{-6}$ – $10^{-5}$ с), и зона  $L_2$  между выходной границей поля масс-анализатора и входной границей поля энергоанализатора (время пролета зоны  $-10^{-5}$ – $10^{-4}$ с). Если реакцию распада представить в виде  $M_n^\pm = m^\pm + m_0$

Где  $M_n^\pm$  — масса материнского иона,  $m^\pm$  и  $m_0$  массы заряженного и нейтрального осколков соответственно, то кинетическая энергия образующегося в зоне  $L_2$  — заряженного осколка равна

$$E = m^\pm / M_n^\pm * eU_0, \text{ обычно } eU_0 = 5000 \text{ эВ}$$

Осколочные ионы, образовавшиеся в первой беспольной зоне  $L_1$  — можно зарегистрировать путем настройки масс-анализатора на пропускание ионов с кажущейся массой  $M^* = (m^\pm)^2 / M_n^\pm$ , при одновременном настройке энергоанализатора на энергию  $E$ .

В серии экспериментов в беспольных зонах прибора  $L_1$ -и  $L_2$  были изучены стехиометрически возможные реакции распадов  $M_n O_m^\pm$  кластеров по всем направлениям. В результате бимолекулярного столкновения и мономолекулярного распада в рамках рекомбинационной модели в потоке распыленных продуктов ионизованы только атомы кислорода и соответствующего металла. Любые комплексные ионы из двух и более атомов которые наблюдаются в ВИМС при распылении кислородом или напуске кислорода являются продуктами статистической рекомбинации над поверхностью мишени независимо распыленных в единичном каскаде нейтральных атомов, молекул и инициирующих реакцию заряженный кислород или ион металла.

Процессы, происходящие в нанореакторе, протекают наподобие химических реакций, только очень короткими временами порядка  $10^{-12}$ – $10^{-6}$  с. И, как следствие, механизм комбинаторного синтеза работает как для органических, так и для неорганических соединений. Надеемся в дальнейшем продолжить эти исследования, и доказывать применимость данного механизма для других материалов.

#### Литература:

1. Хабибуллаев, П. К., Бекмуратова Э. М., Пожаров С. Л. Электростатическая модель кластерных ионов и термодинамические параметры реакций кластерообразования. Издательство «Фан». Ташкент 1984.
2. Dzhemilev, N. Kh., Goldenberg A. M., Veriovin I. V. and Verkhoturov S. V. // Int. J. Mass Spectrom. Ion Proc. 1995. V. 141. P/209.

3. Максимов, С. Е., Джемилев Н. Х., Лифанова Л. Ф., Тукфатуллин О. Ф., Хожиев Ш. Т. Поверхность. 2008. № 5. с. 54.
4. Джемилев, Н. Х. Механизм образования молекулярных кластеров при ионном распылении. Журнал Поверхность. Москва. 2012. № 8, с. 1–7.
5. Чанг, Р. Физическая химия с приложениями к биологическим системам. Издательство «Мир». Москва 1980.

## ХИМИЯ

### Исследование влияния гуминовых кислот и их модификаций на процесс электровосстановления кислорода

Бакибаев Абдигали Абдиманопович, доктор химических наук, профессор, зав. кафедрой  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Кабиева Сауле Казжановна, кандидат химических наук, доцент, зав. кафедрой  
Карагандинский государственный технический университет (Казахстан)

Воронова Олеся Александровна, кандидат химических наук, научный сотрудник;  
Плотников Евгений Владимирович, кандидат химических наук, научный сотрудник  
Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Газалиева Меруерт Арстановна, доктор медицинских наук, доцент, зав. кафедрой  
Карагандинский государственный медицинский университет (Казахстан)

Рахимберлинова Жанара Балтабаевна, кандидат химических наук, старший преподаватель;  
Такибаева Алтынарай Темирбековна, кандидат химических наук, старший преподаватель  
Карагандинский государственный технический университет (Казахстан)

*Разработан способ химического модифицирования гуминовых кислот (ГК) с известными биоактивными веществами. Приведены экспериментальные исследования влияния модифицированных ГК на процесс электровосстановления кислорода (ЭВК) методом катодной вольтамперометрии. Выявлено, что ГК проявляет меньшую каталитическую активность, по сравнению с модифицированными образцами (гуминовые кислоты, содержащие в своей структуре ион металлов).*

**Ключевые слова:** гуминовая кислота, вольтамперометрия, антиоксиданты

Гуминовые кислоты (ГК) — это самый распространенный в природе класс органических соединений, входящих в состав почв, торфа, бурого угля и сапропелей. Высокая реакционная способность гуминовых кислот обусловлена наличием в их составе макромолекул большого количества функциональных групп, прежде всего карбоксильных, гидроксильных, карбонильных, азот- и серосодержащих. Неограниченная сырьевая база для их получения, высокая реакционная способность и возможность получения продукции самого различного назначения обуславливает высокий интерес специалистов различного профиля к этим соединениям [1, с. 200].

Физиологическое действие гуминовых кислот связывают с влиянием на интенсивность фотосинтеза, активизацию кислородного, белкового, углеводного обмена растений. Проводятся попытки связать их биологическую активность с реакционной способностью по отношению к свободным радикалам. Также они обладают комплексом

ценных свойств: каталитической и биологической активностью, способностью сорбировать ионы металлов и т. д. [2, с. 5]. В рамках данной работы были получены ряд модифицированных гуминовых кислот с известными биоактивными веществами с целью усиления и расширения спектра свойств конечного продукта. Одним из важных параметров биологической активности является антиоксидантная активность, отражающая способность к нейтрализации свободных радикалов. Роль свободных радикалов доказана в патогенезе многих патологий, однако, общей проблемой является сложность определения антиоксидантной, антирадикальной, каталитической активности. Много методов в настоящее время применяются с этой целью, однако, как правило, они плохо коррелируют между собой и в их основах лежат модельные системы генерации радикалов, которые являются искусственными и не встречаются в живой природе. Искусственные радикалы зачастую не позволяют адекватно интерпретиро-

вать результаты в отношении биологически активных субстратов. Поэтому очень актуально исследование влияния гуминовых кислот на процессы электровосстановления кислорода, основного окислителя и продуцента свободных радикалов в живой природе. Однако полученные разными авторами результаты не всегда согласуются между собой из-за неоднородности химического состава и свойств гуминовых кислот, что, в значительной мере, может зависеть от исходного сырья, способов получения, очистки препаратов и методов оценки их биологической активности [3, с. 230].

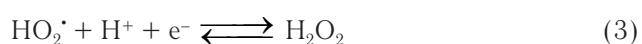
Целью данной работы явилось исследование влияния модифицированных гуминовых кислот на электрохимическое поведение кислорода и оценки способности к нейтрализации кислородных радикалов.

### Экспериментальная часть

Гуминовые кислоты (ГК) получали из окисленных углей Кумыс-Кудукского месторождения последовательной щелочной и кислотной обработкой. Элементный состав ГК, %: С — 63.2, Н — 4.0, О — 32.8; средняя эквивалентная масса 186. Технический анализ ГК (определение влажности, зольности) выполнен согласно ГОСТ 10742–71, 11022–90, 27314–91.

В ходе проведения экспериментальных исследований были получены образцы гуминовых соединений различного состава и с разными добавками, расширяющими потенциальный спектр биоактивности.

Далее активность образцов определяли, используя метод катодной вольтамперометрии, в частности процесс электровосстановления кислорода (ЭВК). Модельная реакция ЭВК, протекает на электроде по механизму, аналогичному восстановлению кислорода в тканях и клетках организма:



В данном случае рассматривается первая волна ЭВК (восстановление кислорода до пероксида водорода) с образованием активных кислородных радикалов:  $\text{O}_2^{\cdot-}$ ,  $\text{HO}_2^{\cdot}$  (выражения 1–3). Предполагается, что вещества реагируют с кислородом и его активными радикалами на поверхности индикаторного электрода, что отражается в изменении катодного тока ЭВК [4, с. 466].

Методика эксперимента заключалась в съемке вольтамперограмм катодного ЭВК с помощью вольтамперометрического анализатора, подключенного совместно с ПК [5]. Использовали постоянно-токовый режим катодной вольтамперометрии, скорость развертки потенциала  $W = 30$  мВ/с, рабочий диапазон потенциалов от 0.0

до  $-0.7$  В, время перемешивания раствора 20 сек, время успокоения 10 сек. Электрохимическая ячейка представляла собой стеклянный стаканчик с раствором фонового электролита и опущенными в него индикаторным ртутно-пленочным электродом, хлорид-серебряным электродом сравнения и хлорид-серебряным вспомогательным электродом. В качестве фонового раствора выбран фосфатный буфер с рН 6.86, близкому к физиологическому значению, объемом 10 мл [5, с. 1150].

Активность исследуемых веществ по отношению к ЭВК определяли по следующей методике: снимали вольтамперограммы тока ЭВК в отсутствие исследуемого вещества (фоновая кривая) по описанному выше способу. При отсутствии посторонних пиков фоновый раствор считался чистым. Затем в ячейку добавляли исследуемое вещество с известной концентрацией (брали объем аликвоты 0.1 мл, соответственно концентрация исследуемых растворов гуминовых кислот 1 мкг/мл) и снимали катодная вольтамперограмма ЭВК при тех же условиях. Измерения повторяли не менее 3 раз через определенный промежуток времени (180 с) и каждый раз оценивалось значение предельного тока ЭВК [6, с. 195].

Изменение тока ЭВК по своему абсолютному значению свидетельствует о том, что исследуемые образцы реагируют с кислородом и его активными радикалами, в исследуемом растворе. Степень изменения тока ЭВК являлась показателем активности исследуемого образца.

По полученным данным строили зависимость относительного изменения тока ЭВК  $\left(1 - \frac{I}{I_0}\right)$  от времени протекания процесса в присутствии одной концентрации исследуемого образца.

По линейной части графика и по тангенсу угла наклона касательной к данному участку кривой рассчитывали коэффициент активности образцов —  $K$ , мкмоль/(л·мин) по формуле:

$$K = \frac{C_{\text{O}_2}}{t} \left(1 - \frac{I_i}{I_0}\right) \quad (5)$$

где  $C_{\text{O}_2}$  — концентрация кислорода в исходном растворе без вещества, мкмоль/л;  $I_i$  — текущее значение предельного тока ЭВК, мкА;  $I_0$  — значение предельного тока ЭВК в отсутствие вещества в растворе, мкА;  $t$  — время протекания процесса, мин.

### Обсуждение результатов

Результаты оценки влияния исследованных образцов гуминовых кислот и их модификаций на ЭВК представлены в таблице. Для всех исследуемых гуминовых кислот получены однотипные вольтамперограммы, где показано увеличение катодного тока ЭВК, что свидетельствует о проявлении ими каталитической активности по отношению к данному процессу.

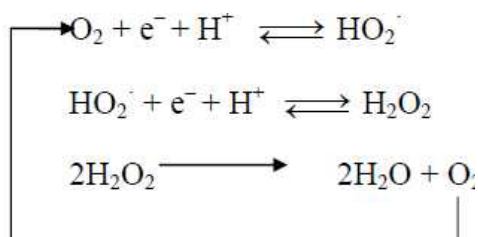
Таблица 1. Каталитическая активность исследуемых гуминовых кислот по отношению к ЭВК, (количество опытов n=5, доверительная вероятность P=0.95)

№	Образец (концентрация 1 мкг/мл в водном растворе)	K, мкмоль/л мин	Относительное стандартное отклонение
1	Гумат натрия	-0.77	0.13
2	ГК	-0.54	0.05
3	ГК+Si	-1.14	0.04
4	ГК + Ca	-0.56	0.13
5	ГК + Mg	-0.61	0.10

Все исследуемые модификации гуминовых кислот очень разные по своей структуре, однако их объединяет одно общее свойство: все они имеют в своей структуре ионы переходных металлов. По-видимому, что это свойство и обуславливает каталитический характер их влияния на процесс ЭВК.

Об эффекте взаимодействия и каталитическом влиянии говорит и сдвиг потенциала полуволны тока ЭВК в отрицательную область при добавлении исследуемых гуминовых кислот в раствор, поскольку характеризует наличие механизма ЭВК с последующей реакцией диспропорционирования продукта реакции — пероксида водорода и частичной регенерацией деполяризатора — молекулярного кислорода [7. с. 108].

Таким образом, в случае процесса ЭВК с последующей реакцией диспропорционирования пероксида водорода под воздействием гуминовых кислот схему процесса можно представить в следующем виде:



Литература:

1. Комиссаров, И.Д., Климова А.А., Логинов А.Ф. // Гуминовые препараты. Тюмень. 1971. — с. 200–212.
2. Христева, Л.А. // Гуминовые удобрения: Теория и практика их применения. Днепропетровск. 1977. Т. 6. с. 3–15.
3. Г.А. Калабин, Л.В. Каницкая, Д.Ф. Кушеарев. Количественная спектроскопия ЯМР природного органического сырья и продуктов его переработки. М.: Химия, 2000. — 407 с.
4. Korotkova, E. I., Karbainov Y. A., Avramchik O. A. Investigation of antioxidant and catalytic properties of some biologically active substances by voltammetry // Anal. Bioanal. Chem. 2003. V. 375. № 3. P. 465–468.
5. Avramchik, O. A., Korotkova E. I., Plotnikov E. V., Lukina A. N., Karbainov Y. A. Antioxidant and electrochemical properties of calcium and lithium ascorbates // J. Pharm. Biomed. Anal. 2005. V. 37. № 3. P. 1149–1154.
6. Трубецкой, О.А., Трубецкая О.Е., Резникова О.И. и др. // Известия АН. Сер. биолог. 1999. — № 2. С. — 216.
7. Plotnikov E, Korotkova E, Voronova E, Dorozhko E, Bohan N, Plotnikov S. Lithium-based antioxidants: electrochemical properties and influence on immune cells. Physiology and pharmacology. 2015; 19, 107–113

Каталитическую активность определяли, используя выражение (5), которая зависит от вида гуминовых кислот и их модификации.

Как видно из таблицы 1, образец 2 (гуминовая кислота) проявляет меньшую каталитическую активность, по сравнению с образцами 1, 3, 4, 5 (гуминовые кислоты, содержащие в своей структуре ион металлов). Что еще раз является подтверждением, что гуматы носят каталитический характер их влияния на процесс ЭВК.

#### Выводы

В ходе экспериментов, оценено влияние гуминовых кислот на процесс ЭВК, как модельный механизм генерации радикалов кислорода. Показано, что все исследованные гуминовые кислоты и их производные обладают каталитической активностью, которая зависит от их модификаций. Высокая антиоксидантная активность гуминовых кислот, позволяет использовать их в медицине и в сельском хозяйстве.

## Сравнительный анализ адсорбционных свойств различных адсорбентов

Богданова Дарья Александровна, студент;

Нургалиев Тимур Рафаэльевич, студент;

Родькин Николай Геннадьевич, студент;

Нуштаева Алла Владимировна, кандидат химических наук, доцент

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

*На примере адсорбции изоамилового спирта из раствора исследована адсорбционная способность гранулированного силикагеля, гранулированного активного угля и порошка-наполнителя фильтра «Аквафор». Экспериментально полученные изотермы поверхностного натяжения и изотермы адсорбции показали, что более высокой адсорбционной способностью обладает порошок «Аквафор». Величина адсорбции на данном порошке была в несколько раз выше, чем на угле и силикагеле.*

**Ключевые слова:** *поверхностное натяжение, адсорбент, адсорбция, поверхностно-активное вещество (ПАВ)*

Адсорбция из раствора на твердых адсорбентах имеет большое практическое значение и широко применяется для очистки воды и воздуха, в различных процессах для разделения газовых и жидких смесей, в медицинской практике для очистки организма от токсичных веществ, в гетерогенном катализе и т. д.

Адсорбция из растворов, по сравнению с газовой адсорбцией, — значительно более сложное явление. Во-первых, скорость и величина адсорбции зависят от природы и концентрации растворенного вещества (адсорбтива) и природы растворителя. Растворенное вещество может адсорбироваться на поверхности от адсорбента, только вытесняя молекулы растворителя. Во-вторых, адсорбция зависит от химического состава и удельной поверхности самого адсорбента. В качестве адсорбентов используются активированные угли, силикагели, цеолиты др.

Для характеристики адсорбента используют изотерму адсорбции — зависимость адсорбции ( $\Gamma$ , моль/см<sup>2</sup>) от концентрации растворенного вещества ( $C$ , моль/л). В случае твердых адсорбентов, если не известна точная площадь поверхности, адсорбцию рассчитывают как отношение количества адсорбированного вещества ( $x$ ) к массе адсорбента ( $m$ ):  $\Gamma = x/m$  (моль/г) [1]. Экспериментально величину адсорбции  $\Gamma = x/m$  находят по разности между начальной концентрацией раствора ( $C_0$ ) и концентрацией, установившейся при достижении адсорбционного равновесия ( $C_{\text{равн}}$ ) [1].

Целью данной работы было исследовать и сравнить адсорбционную способность некоторых твердых адсорбентов различной природы на примере адсорбции ПАВ (поверхностно-активного вещества) из раствора.

### Материалы и методы

В качестве твердых адсорбентов применялись: 1) гранулированный силикагель; 2) гранулированный активный уголь; 3) порошок-наполнитель бытового очистителя для воды марки «Аквафор».

Для оценки адсорбционной способности в качестве адсорбтива применяли изоамиловый спирт (3-метил-бу-

танол-1) —  $(\text{CH}_3)_2\text{CHCH}_2\text{CH}_2\text{OH}$  — неионогенное ПАВ с плотностью 0,81 г/см<sup>3</sup>. Изоамиловый спирт ядовит, является основным компонентом сивушного масла. Готовили растворы (с использованием дистиллированной воды) концентрацией от 0,004 до 0,2 моль/л.

Поверхностное натяжение раствора измеряли методом максимального давления в пузырьке воздуха с помощью прибора Ребиндера [2]. Величину адсорбции на поверхности жидкость/твердый адсорбент —  $\Gamma = x/m$  (моль/г) — рассчитывали по уравнению:

$$\Gamma = \frac{(C_0 - C_{\text{равн}})V}{m}$$

где  $C_0$  и  $C_{\text{равн}}$  — начальная и равновесная концентрация спирта в растворе, соответственно;  $V$  — объем раствора (25 мл);  $m$  — масса твердого адсорбента (1 г).

Размер частиц адсорбентов определяли методом оптической микроскопии с применением видеокамеры Levenhuk C510.

### Результаты

На примере адсорбции ПАВ (изоамилового спирта) из раствора исследована адсорбционная способность гранулированного силикагеля, гранулированного активного угля и порошка «Аквафор». На рис. 1 показаны микрофотографии гранул этих адсорбентов. Размер и форма гранул: 1) силикагель — сферические гранулы диаметром 3–6 мм; 2) уголь — гранулы длиной 1–2 мм и толщиной около 1 мм; 3) порошок «Аквафор» — сферические ионообменные гранулы диаметром 160–330 мкм и угольные частицы размером 300–600 мкм.

Силикагель — представляет собой пористые гидрофильные гранулы высушенного геля поликремниевых кислот  $n\text{SiO}_2 \cdot m\text{H}_2\text{O}$ . Активный уголь — пористый углерод, гидрофобный органический адсорбент, получаемый из древесного или каменного угля. Порошок «Аквафор» содержит ионообменное волокно «Аквален» и активированный кокосовый уголь [3]. Поскольку все ад-

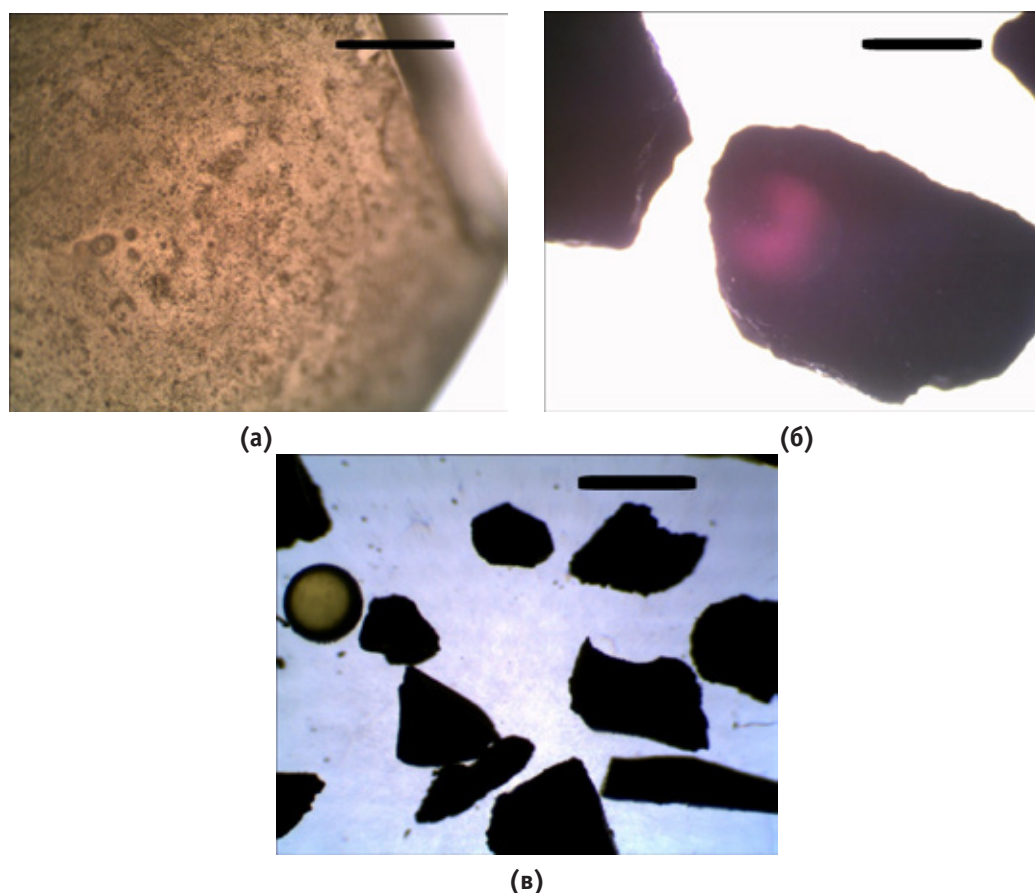


Рис. 1. Оптические микрофотографии частиц адсорбентов: а) силикагель (поверхность гранулы); б) уголь; в) порошок «Аквафор». Шкала — 500 мкм

сорбенты пористые, то размер гранул не должен заметно влиять на их адсорбционные свойства.

На рис. 2 и 3 представлены экспериментально полученные изотермы поверхностного натяжения ( $C_0$ ) и изотермы адсорбции  $\Gamma(C_{\text{равн}})$ , наглядно характеризующие адсорбционную способность исследованных адсорбентов. Чем больше поверхностное натяжение раствора после контакта с адсорбентом (рис. 2), и чем больше величина адсорбции при данной концентрации (рис. 3), тем выше адсорбционная способность вещества и, следовательно, тем эффективнее очистка воды с помощью данного адсорбента.

Как видно из кривых  $\sigma(C_0)$  и  $\Gamma(C_{\text{равн}})$ , более высокой адсорбционной способностью обладает порошок «Аквафор». Так, например, при равновесной концентрации изоамилового спирта 0,1 моль/л адсорбция на наполнителе «Аквафор», содержащем в основной массе угольные частицы (см. рис. 1), была примерно в 2,5 раза больше, чем на угле с гранулами миллиметрового размера, и примерно в 8 раз больше, чем адсорбция на силикагеле. Как уже было отмечено, все адсорбенты имели пористую структуру, поэтому большая эффективность «Аквафора» объясняется не размером гранул, а, возможно, более высокой удельной поверхностью и дегазацией поверхности.

Сравнительно меньшая адсорбционная активность силикагеля связана с гидрофильностью его поверхности в отличие от гидрофобных углей. Известно, что, чем лучше смачивание адсорбента растворителем, тем хуже адсорбция растворенного вещества на его поверхности [1].

Интересно, что в серии наших экспериментов по адсорбции красящего вещества чернил [4] лучшую адсорбционную активность проявил диатомит, не смотря на его гидрофильные свойства (состоит из оксидов кремния, алюминия, железа, кальция и магния). В этой же серии экспериментов адсорбция чернил на активированном угле мало отличалась от адсорбции на силикагеле и цеолите [4]. Адсорбирующимся веществом в этом случае был краситель, в состав которого входит метиловый фиолетовый, имеющий более разветвленную молекулярную структуру (три бензольных кольца) в отличие от изоамилового спирта. Вероятно, лучшая адсорбция красящего вещества чернил объясняется его более развитым углеводородным скелетом.

#### Заключение

Адсорбция на порошке «Аквафор» была в несколько раз выше, чем на активированном угле и силикагеле.



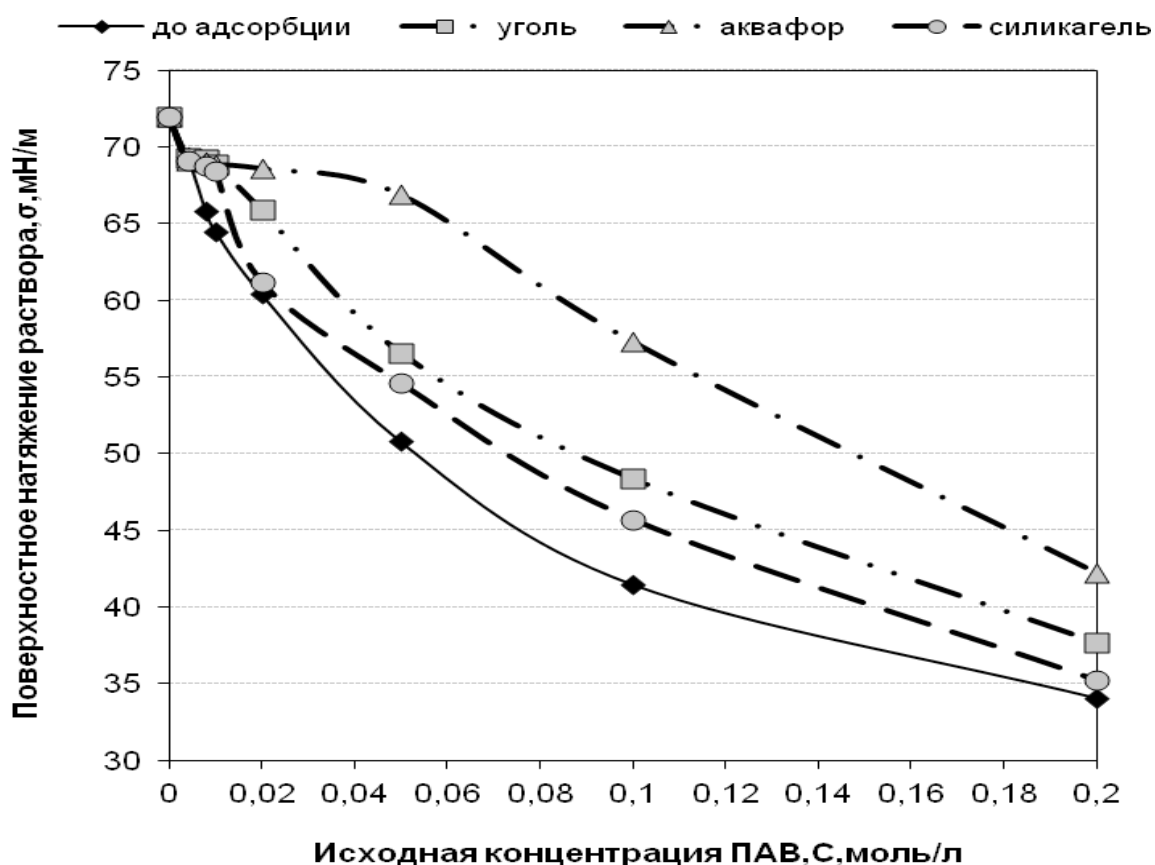


Рис. 2. Изотермы поверхностного натяжения  $\sigma(C_0)$  раствора изоамилового спирта до адсорбции (сплошная линия) и после адсорбции на твердых адсорбентах

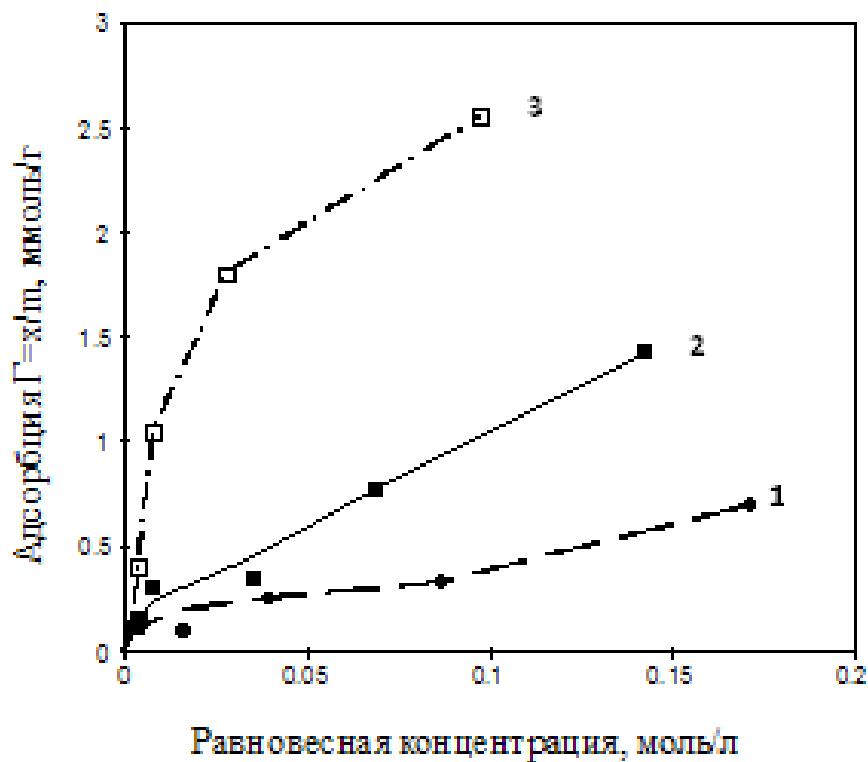


Рис. 3. Изотермы адсорбции  $\Gamma(C_{равн})$  изоамилового спирта на твердых адсорбентах: 1 — силикагель; 2 — уголь; 3 — порошок «Аквафор»

Литература:

1. Кругляков, П. М., Хаскова Т. Н. Физическая и коллоидная химия: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2010.
2. Кругляков, П. М., Нуштаева А. В., Вилкова Н. Г., Кошева Н. В. Физическая и коллоидная химия. Практикум: учеб. пособие. С.-Пб.: Лань, 2013.
3. Аквален // Аквафор / [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.aquaphor.ru/aqualen> (дата обращения 24.06.2016 г).
4. Жанабергенова, Д. Р., Мещанинова Ю. О. Определение поглотительной способности наиболее известных адсорбентов / Молодой учёный, 2015, № 11 (91), с. 492–497.

## Особенности химического и минералогического состава и существующие методы переработки рапы озер караумбет и барсакельмес

Джураева Гулнара Хуррамовна, кандидат технических наук, доцент;

Атакулова Дилфуза Турсуновна, ассистент

Каршинский инженерно-экономический институт (Узбекистан)

Как отмечал своим докладом Президент Республики Узбекистана И. Каримов на расширенном заседании Кабинета Министров, посвященном итогам социально-экономического развития страны в 2015 году и важнейшим приоритетным направлениям экономической программы на 2016 год, «главным ориентиром для нас должно быть непрерывное технологическое и техническое обновление производства, а также постоянный поиск внутренних резервов, осуществление глубоких структурных преобразований в экономике, модернизации и диверсификации промышленности» [1].

Развивающаяся экономика Республики Узбекистан потребляет все больше и больше минеральных ресурсов, в том числе сульфата натрия и хлорида магния. Хлорид магния используется в химической промышленности для получения различных видов дефолиантов, легкой, энергетической (присадка к высокосернистым мазутам), в строительстве (изготовление цементов), медицине (бальнеотерапевтическое средство), как сырье для получения металлического магния, используемого для получения сплавов, а также для термического восстановления титана и кремния, он применяется в качестве аппаратуры в текстильной промышленности и для пропитки деревянных конструкций с целью придания им огнестойкости, его растворы применяют в качестве антифриза для предупреждения замерзания стрелок на железнодорожных путях.

Для страны с развитым сельским хозяйством, ориентированным на производство хлопка, использование дешевых дефолиантов на основе местного бишофита (гексагидрата хлорида магния) позволит значительно снизить себестоимость хлопка-волокна. Применение бишофита в энергетической промышленности Узбекистана также важно в связи с высоким содержанием серы в сжигаемом мазуте. Развитая индустрия производства строительных материалов также потребляет большое количество бишо-

фита для производства различных типов магнезиального цемента.

Стекольная промышленность Республики потребляет значительные количества сульфата натрия. Однако основным потребителем сульфата натрия является целлюлозно-бумажная промышленность, которая в последнее время развивается усиленными темпами. Текстильная и кожевенная промышленность, а также цветная металлургия также нуждаются в сульфате натрия.

Таким образом, потребность народного хозяйства Республики Узбекистан в хлориде магния, сульфате натрия и хлориде натрия огромна и носит межотраслевой характер: химическая, металлургическая, стекольная, текстильная, энергетическая, фармацевтическая и другие отрасли промышленности нуждаются в этом сырье. Потребность в них удовлетворяется только за счет импорта, что связано с огромными затратами валюты. Подобные затраты на сырье в конце концов сказываются на стоимости готовой продукции, значительно увеличивая ее себестоимость и, соответственно рыночную стоимость. Высокая стоимость делает продукцию неконкурентной не только на внешнем, но и на внутреннем рынке. На настоящий момент хлорид магния и сульфат натрия в Республике не производятся, хотя и имеются запасы промышленного значения.

Наиболее приемлемым источником производства хлорида магния может служить рапа озер Караумбет и Барсакельмес. Утвержденные запасы Караумбетского озера оцениваются в 3365 тыс. т NaCl, 2181 тыс. т Na<sub>2</sub>SO<sub>4</sub>, 700 тыс. т MgCl<sub>2</sub> [2].

Накопленные на сегодняшний день данные показывают, что невозможно разработать единую энергосберегающую технологическую схему для переработки рап сульфатно-хлоридного типа. Это связано с тем, что каждый сырьевой источник отличается по своему химическому составу друг от друга. Например, высокое содержания хлорида натрия заставляет искать пути его экономичного

выведения из состава рапы. Низкое солесодержание заставляет искать экономичные способы концентрирования рапы.

Существуют различные способы переработки рап. Например, есть способ получения бишофита из океанической воды, в котором осаждение ионов магния осуществляют известью, а полученную суспензию осадка с водой подвергают карбонизации. В процессе карбонизации суспензии  $Mg(OH)_2$  магний переходит в раствор виде гидрокарбоната магния, который в присутствии хлорида магния подвергается конверсии с образованием бикарбоната натрия и раствора хлорида магния. Осадок  $NaHCO_3$  идет на кальцинацию для получения соды, а раствор хлорида магния — на получение бишофита. Однако недостатками данного способа являются использование большого количества известняка для получения реагентов ( $CaO$  и  $CO_2$ ), а также необходимость упаривания рассолов для получения соли. Этот способ также непригоден для переработки рассолов, содержащих сульфат-ионы [3].

Известен также способ получения поваренной соли (хлорида натрия), концентрированного раствора хлорида магния и высокочистого оксида магния из рассола. Процесс включает получение хлорида кальция путем взаимодействия соляной кислоты с известняком, обессульфачивание рассола хлоридом кальция, получение хлорида натрия при естественном испарении воды в солнечных ваннах, естественное упаривание образующегося рассола с осаждением карналлита и конечного раствора, переработку карналлита известными способами с получение хлорида калия, переработку конечного рассола, концентрированного по хлориду магния, прокаливание части конечного рассола после высыхания для получения оксида магния высокой чистоты и соляную кислоту, возвращаемую в голову процесса для получения хлорида кальция. Однако недостатков у данного способа больше, чем преимуществ: сложность технологического процесса, который состоит из нескольких отдельных стадий, требующих сложной аппаратуры, изготовленной из дорогостоящих коррозионно-стойких материалов; многостадийность и

длительность технологического процесса, особенно при естественных испарении и упаривании рассола для осаждения хлорида натрия и карналлита, а также конечного рассола; высокая коррозионная активность соляной кислоты, возвращаемой в начальную стадию процесса получения хлорида кальция.

По результатам проведенных геологами исследований установлено, что из минеральных солей Караумбетского месторождения возможно получение поваренной соли, сульфата натрия и бишофита [4].

Анализ материалов геологических исследований показывает следующее:

1. На Барсакельмском месторождении твердая фаза представлена, в основном, поваренной солью со средним содержанием  $NaCl$  96,32%.  $MgCl_2$  в твердой фазе отсутствует. В рапе данного месторождения наряду с другими компонентами имеется  $MgCl_2$  со средним содержанием — 4,13%.

2. На Караумбетском месторождении твердая фаза представлена 2-мя видами солей:

— галитовые со средним содержанием 95,64%  $NaCl$ ;

— смешанные соли с содержанием (%):  $NaCl$  — 18,8;  $Na_2SO_4$ —61,15;  $MgCl_2$ —15,28.

Рапа месторождения Караумбет также содержит  $MgCl_2$  в среднем 6,2–8,3% с общим содержанием  $MgCl_2$ —87,5 тыс. т.

Суммарная оценка промышленных запасов  $MgCl_2$  в твердой фазе 612,5 тыс. т.

3. Рапа Караумбетского месторождения имеет тенденцию к концентрированию, что свидетельствует о преобладании испарения воды над ее поступлением в озеро с осадками.

4. Геологами Караумбетское месторождение солей рекомендовано как сырьевая база для производства хлорида магния, сульфата натрия и хлорида натрия.

Таким образом, разработка технологии комплексной переработки рапы озера Караумбет и Барсакельмес с получением дигидрата сульфата кальция, хлорида натрия и гексагидрата хлорида магния является весьма актуальной.

#### Литература:

1. Доклад Президента Республики Узбекистан И.А. Каримова на расширенном заседании Кабинета Министров, посвященном итогом социально-экономического развития страны в 2015 году и важнейшим приоритетным направлениям экономической программы на 2016 год.
2. Мирзакулов, Х.Ч., Тожиев Р.Р., Джураева Г.Х. Испытания технологии получения бишофита, галита и гипса из рапы озер Караумбет и Барсакельмес // Актуальные проблемы инновационных технологий химической, нефтегазовой и пищевой промышленности. — 28–29 октября 2010. — Кунград, 2010. — с. 144–145
3. Кашкаров, О.Д. Расчеты испарения морской воды в промышленных бассейнах. // Сб. Технология переработки природных солей и рассолов. — М.-Л.: Химия. 1964. с. 67–75.
4. Мирзакулов, Х.Ч., Бобокулова О.С., Джураева Г.Х. Испытания технологии получения гидроксида и оксида магния из рапы озер Караумбет и Барсакельмес // Актуальные проблемы инновационных технологий химической, нефтегазовой и пищевой промышленности. — 28–29 октября 2010. — Кунград, 2010. — с. 140–141

## Влияние содержание бора и фосфора на физико-химические и каталитические свойства H-ультрасила в реакции этилирования этилбензола

Эминова Санам Фахрад гызы, аспирант;  
 Гахраманов Талех Ордухан оглы, докторант;  
 Мамедов Сабит Эйюб оглы, доктор химических наук, профессор;  
 Ахмедов Эльдар Иса оглы, доктор химических наук, зав. кафедрой  
 Бакинский государственный университет (Азербайджан)

*Изучены физико-химические и каталитические свойства H-ультрасилов, модифицированных бором, фосфором в реакции этилирования этилбензола. Установлено, что в результате химического модифицирования H-ультрасила бором, фосфором происходит существенное уменьшение концентрации сильных кислотных центров и адсорбционной емкости цеолитов, что и обуславливает повышение селективности катализатора по п-диэтилбензолу.*

**Ключевые слова:** этилирование, этилбензол, ультрасил, модифицирование

Одним из перспективных способов получения диэтилбензолов (ДЭБ) — ценного сырья для синтеза ионообменных смол является этилирование этилбензола на высококремнеземных цеолитах типа ZSM-5. Одним из возможных путей изменения каталитических и молекулярно-ситовых свойств цеолитов является направленное регулирование пор и модифицирование кислотных центров путем удаления наиболее сильных кислотных центров и изменения их природы. В этом отношении перспективным оказывается путь химического модифицирования цеолита с использованием соединений B, Mg, P, Si и других [1–6], которые оказывают пара-ориентирующее влияние на активность цеолитных катализаторов в превращениях ароматических углеводородов.

В связи с этим в настоящей работе изучено влияние модифицирования H-ультрасила гидрофосфатом аммония и борной кислотой на его физико-химические и каталитические свойства в реакции этилирования этилбензола.

### Экспериментальная часть

Для исследования использовали цеолит типа ультрасила с мольным отношением  $\text{SiO}_2/\text{Al}_2\text{O}_3=61$ , который путем ионного обмена переводили в  $\text{NH}_4$ -форму по методике, описанной ранее [3]. H-форму цеолита получали

термическим разложением  $\text{NH}_4$ -формы при  $500\text{ }^\circ\text{C}$  в течение 4 ч. Катализаторы, модифицированные 1–4.0 мас. % фосфора, получали пропиткой H-форм цеолита раствором гидрофосфата аммония при  $80\text{ }^\circ\text{C}$  в течение 6 ч. Образцы сушили на воздухе в течение 16 ч, затем 4 ч в сушильном шкафу при  $110\text{ }^\circ\text{C}$  и, наконец, прокаливали 4 ч в муфельной печи при  $550\text{ }^\circ\text{C}$ . Для исследования катализаторов применяли химический, рентгенофазовый и адсорбционный методы анализа. Кислотные свойства модифицированных цеолитов изучали методом термодесорбции аммиака по методике, описанной в работе [7]. Опыты проводили на установке проточного типа со стационарным слоем катализатора объемом  $4\text{ см}^3$  в реакторе идеального вытеснения при атмосферном давлении в присутствии водорода в интервале температур  $300\text{--}380\text{ }^\circ\text{C}$ , объемной скорости подачи сырья  $1\text{ ч}^{-1}$  и мольном отношении  $\text{C}_8\text{H}_{10}:\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ , равном 2:1. Анализ продуктов реакции осуществляли с помощью хроматографии [3].

В таблице 1 приведены данные по активности и селективности H-ультрасила в реакции этилирования этилбензола.

Температура реакции не оказывала влияния на конверсию спирта, которая составляла 92–100 %, конверсия этилбензола возрастала с увеличением температуры с 31.5 до 44,6 мас. %. Помимо толуола и ЭТ в углеводородной

Таблица 1. Состав продуктов алкилирования этилбензола этанолом на H-форме ультрасила

t, °C	Конверсия, %		Селективность по продуктам в катализате, %								Селективность по п-ДЭБ, %
	Этилбензол	Этанола	Бензола	толуола	п-ДЭБ	м-ДЭБ	о-ДЭБ	C <sub>5+</sub> алифат. углев.	Ксилолы	прочие АРУ	
300	31.5	93.8	5.4	0.3	33.7	39.5	1.8	11.8	5.8	1.6	44,9
350	39.8	100	7.1	0.8	32.4	40.6	2.9	7.1	6.7	2.0	42.3
400	44,6	100	8.6	1.7	32.8	42.5	3.4	5.0	2.2	3.1	42.1

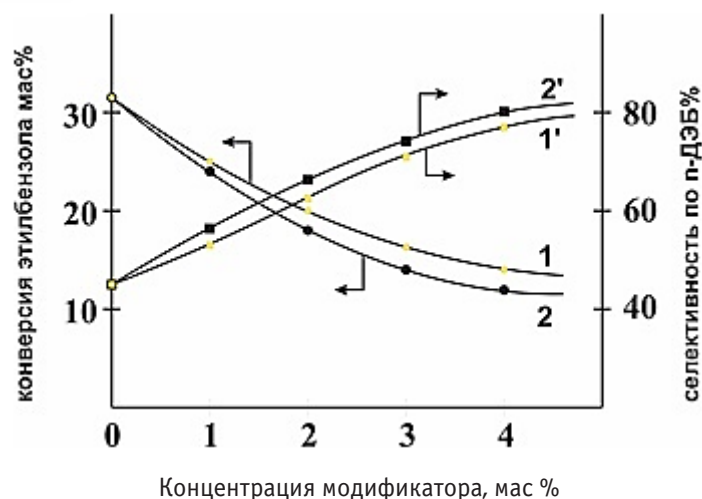


Рис. 1. Зависимость конверсии ЭБ (1,1') и (2,2') селективности по п-ДЭБ от концентрации бора и фосфора; 1,1'-В-Н- ультрасил, 2,2'-Р-Н- ультрасил

части катализатора обнаружены алифатические углеводороды  $C_{5+}$ , бензол, ксилолы, следы триметилбензолов и других ароматических углеводородов. В газообразных продуктах наблюдали предельные и непредельные углеводороды ( $C_1-C_4$ ). При низких температурах процесс в значительной степени осложнялся образованием алифатических углеводородов  $C_{5+}$ , при более высоких — увеличением выхода побочных ароматических углеводородов и снижением селективности п-ДЭБ.

Как видно из рисунка и таблицы 2, введение бора и фосфора пропиткой цеолита раствором гидрофосфата аммония и борной кислотой с последующим разложением соли при 550 °С приводит к существенному изменению каталитических и физико-химических свойства катализаторов: снижается их активность в реакциях алкилирования и диспропорционирования этилбензола и возрастает селективность образования п-ДЭБ.

Введение бора и фосфора в количестве 1.0–4.0 мас. % в состав ультрасила способствовало повышению его селективности по п-ДЭБ с 44,9% до 78,4% и 80,5% соответственно. Проявление пара-селективности бор- и фосфорсодержащих ультрасил может быть обусловлено

уменьшением силы брэнстедовских и льюсовских кислотных центров в цеолите [2,5], а также изменением размеров каналов структуры, следовательно, и адсорбционно-десорбционных и диффузионных характеристик катализаторов.

Действительно, модифицирование сопровождается химическим взаимодействием модификатора с цеолитом, что приводит к воздействию модификатора на доступность каналов структуры цеолитных катализаторов. Это подтверждается уменьшением сорбционной емкости образцов с увеличением содержания в их составе бора и фосфора (табл. 2).

Изменение активности и пара-селективности ультрасила при его модифицировании бора и фосфором вызвано также изменением концентрации и силы кислотных центров (табл. 3).

Как видно из табл. 3, с увеличением содержания бора и фосфора в образцах концентрация сильных кислотных центров снижается почти в 8 раз (528 до 92–62 мкмоль · г<sup>-1</sup>) что вероятно, является одной из основных причин изменения каталитической активности и селективности цеолитов, модифицированных фосфором.

Таблица 2. Адсорбция паров воды, н-гептана и бензола (см<sup>3</sup>/г) на Н-ультрасиле, модифицированном бором и фосфором

Цеолит	Содержание В и Р, мас. %	H <sub>2</sub> O	н-C <sub>7</sub> H <sub>16</sub>	C <sub>6</sub> H <sub>6</sub>
Н-УС*	—	0,073	0,164	0,08
1% В-Н-УС**	1,0	0,063	0,152	0,068
3% В-Н-УС	3,0	0,058	0,107	0,067
4% В-Н-УС	4,0	0,052	0,074	0,055
1% Р-Н-УС**	1,0	0,060	0,152	0,068
3% Р-Н-УС	3,0	0,055	0,092	0,062
4% Р-Н-УС	4,0	0,048	0,071	0,051

УС\* - ультрасил; В-Н-УС\*\* и Р-Н-УС\*\* Н-ультрасил модифицированный В и Р

Таблица 3. Кислотные свойства H-ультрасила, модифицированного бором и фосфором

Катализатор	Содержание В и Р, мас. %	T <sub>max</sub> <sup>°B</sup> максимума пика десорбции аммиака формы		Концентрация кислотных центров, (мкмольг <sup>-1</sup> )	
		I	II	C <sub>1</sub> <sup>*</sup>	C <sub>2</sub> <sup>*</sup>
H-УС	—	195	408	62	528
B-H-УС	1,0	188	336	302	197
B-H-УС	3,0	176	294	198	105
B-H-УС	4,0	173	269	151	92
P-H-УС	1,0	186	325	297	186
P-H-УС	3,0	172	272	174	89
P-H-УС	4,0	169	256	137	62

C<sub>1</sub><sup>\*</sup> и C<sub>2</sub><sup>\*</sup> - концентрации кислотных центров в формах (I) и (II) соответственно

В ИК-спектрах имеются полосы 3720 см<sup>-1</sup>, которые относятся к силаноленим ОН-группам анионного типа, обладающим слабоосновными свойствами. [8], и полоса 3610 см<sup>-1</sup>, которая относится к мостиковым ОН-группам и проявляет сильнокислотные свойства. При адсорбции пиридина в спектре появляются полосы 1630, 1548 и 1490 см<sup>-1</sup>, обнаружена полоса при 3705 см<sup>-1</sup>, которую можно приписать колебаниям ОН-групп, связанных с бором или фосфором [9]. Такие группировки не обладают сильными протонодонорными свойствами, так как

при взаимодействии с ними Р<sub>y</sub> не наблюдается образования иона пиридиния. Судя по интенсивности полосы поглощения 3610 см<sup>-1</sup> (рис 2), количество В-центров в модифицированном образце меньше чем на не модифицированном образце. В ИК-спектрах модифицированного образца наблюдается уменьшение интенсивности полосы 1548 см<sup>-1</sup> и 1490 см<sup>-1</sup> характеризующие В-и В+L-центры, что, вероятно, является одной из причин изменения каталитических свойств цеолитов, модифицированных бором и фосфором.

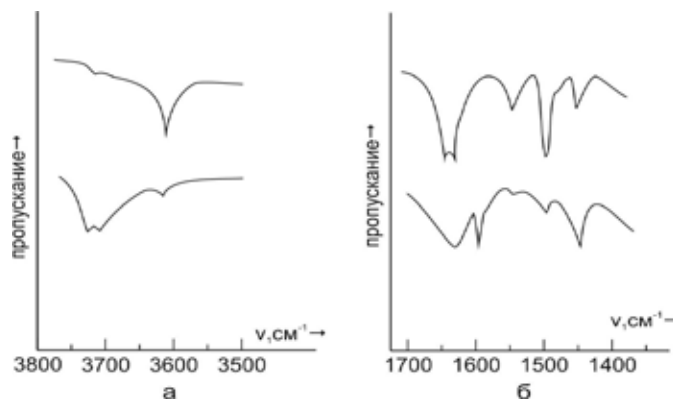


Рис. 2. ИК-спектры цеолитов в области валентных колебаний ОН-групп вакуумирование при 500°C) (а): и после адсорбции пиридина (б): 1 — H — УС; 2—3% В — НУС

Таким образом, в результате химического модифицирования H-ультрасила бором и фосфором происходит существенное уменьшение концентрации сильных кислотных центров и адсорбционной емкости цеолитов, что и обуславливает повышение селективности катализатора по п-ДЭБ.

#### Выводы

При химическом модифицировании H-ультрасила гидрофосфатом аммония и борной кислотой проис-

ходит существенное уменьшение концентрации сильных кислотных центров и сорбционной емкости цеолита. В результате в цеолите уменьшается протонная кислотность и их активность в реакции алкилирования, а также изменяются диффузионные характеристики цеолитов, что и обуславливают повышение селективности катализатора по п-диэтилбензолу.

#### Литература:

1. Romannikov, V.N., Ione K. G. Alkylation of aromatic on B-containing ZSM-5 Zeolites // Reakt. Kinet. Catal. Lett. — 1993. — v. 51. — № 1. — P. 151–154.

2. Миначев, Х. М., Дергачев А. А., Мишин И. В. Каталитическая активность и молекулярно-ситовые свойства высококремнеземных цеолитов в превращениях алкилбензолов C8 // Нефтехимия. — 1993. — Т. 33. — № 4. — с. 238–245.
3. Мамедов, С. Э., Ахмедов Э. И., Керимли Ф. Ш., Махмудова Н. И Влияние содержания фосфора на физико-химические и каталитические свойства H-пентасила в реакции изомеризации м-ксилола и метилирования толуола // ЖПХ. — 2006. — Т. 79, — Вып. 10. — с. 1741–1743.
4. Черных, С. Л., Ионе К. Г., Чекрий П. С. и др. Каталитические процессы в нефтехимии // Химия и технология топлив и масел. — 1992. — № 3. — с. 20–28.
5. Nai, Y. Chen. Personal Perspective of the Development of Para Selective ZSM-5 // Ind. Eng. Chem. Res. — 2001. — V. 40. — P. 4157–4161.
6. Bhandarkara, V., S. Bratia. Selektive formation of ethyltoluene by alkylation with ethanol over modified HZSM-5 zeolites // J. Catalysis — 1994. — V. 14. — P. 439–449.
7. Ющенко, В. В. Расчет спектров кислотности катализаторов по данным термопрограммированной десорбции аммиака // ЖФХ. 1997, т. 71, № 4, с. 628–632.
8. Казанский, Б. В., Миначев Х. Ш., Боровков В. Ю. и др. ИК-спектроскопическое изучения гидроксильных групп высококремнеземных цеолитов в широком спектральном диапазоне // Кинетика и катализ. — 1983. — Т. 24. — № 3. — с. 679–682.
9. Кубасов, А. А., Китаев Л. Е., Колдашева Е. М. Структура цеолитных катализаторов типа пентасил, модифицированных совместно соединениями бора и фосфора // Кинетика и катализ. — 1988. — Т. 29. — № 4. — с. 1016–1019.

## МЕДИЦИНА

### Факторы риска развития пневмонии и сепсиса новорожденных города Алматы

Абдрахманова Гульдарья Есеркегеновна, кандидат медицинских наук, доцент;

Мусралиева Айнура Даулеткызы, врач-резидент;

Надырова Малика Яркаевна, врач-резидент;

Ни Елена Олеговна, врач-резидент;

Рашитова Аяжан Жаскайратовна, врач-резидент;

Серикбаев Марат Асилбекович, врач-резидент

Казахский национальный медицинский университет имени С. Д. Асфендиярова

Вопросы гнойно-воспалительных заболеваний у новорожденных до настоящего времени не теряют своей актуальности. В неонатологии большой удельный вес в структуре смертности новорожденных занимают тяжелые гнойно-воспалительные заболевания. Основными причинами смерти у новорожденных практически во всех странах мира является тяжелые пневмонии и сепсис. Всего по республике Казахстан по официальным данным (данные Гос. Комитета по статистике, 2000 г.), в неонатальном периоде умерло 70,2% новорожденных от всех потерь возрасте от 0 до 5 лет. Анализ смерти новорожденных в неонатальном периоде показал, что причинами летальных исходов были врожденные пневмонии в 13,7% случаев и сепсис 6,3% случаев.

**Цель исследования:** изучение факторов риска развития пневмонии и сепсиса у новорожденных.

**Задачи исследования:**

1. Установить частоту пневмонии и сепсиса у новорожденных.
2. Определить факторы, приводящие к развитию пневмонии и сепсиса.

**Материалы и методы:**

Был проведен ретроспективный анализ 100 историй болезни детей отделения патологии новорожденных и недоношенных ДГКБ № 1: особенностей эпид. анамнеза, соматического и акушерско-гинекологического анамнеза матерей, выявление факторов внутриутробного инфицирования, обуславливающих риск реализации у новорожденных внутриутробной инфекции с поражением бронхолегочной системы, лабораторного и инструментального обследования детей: общий анализ крови, рентгенография грудной клетки, биохимическое исследование крови, результаты ИФА крови на инфекции. Гнойно-воспалительные заболевания (ГВЗ) в виде пневмонии и сепсиса были диагностированы у 38 (38,0%) детей.

При анализе 38 истории болезни новорожденных и недоношенных детей внутриутробная пневмония выявлена у 34 (90,0%) и сепсис у (4) 11,0%. У детей с пневмонией сочетание с ВЖК I–II степени было установлено в 29,0% случаев, у 9,0% — сочетание с ЦМВ инфекцией, у 6,0% — сочетание с ангиопатией сетчатки, у 6,0% — сочетание с врожденными пороками сердца (ВПС), у 3,0% — кефалогематомой, у 2,0% — с судорогами.

У детей с сепсисом отмечалось сочетание: у 50,0% — с ВЖК II–III степени, у 25,0% — с ангиопатией сетчатки, у 25,0% с внутренней гидроцефалией.

Среди детей с пневмонией и сепсисом недоношенные дети составили 68,0%. Группа крови А (II) и В (III) встречалась у 66,0% обследованных детей, тогда как О (I) и АВ (IV) — в 34,0% случаев. Девочки среди детей с пневмонией и сепсисом составили 68,0%, а мальчики 32,0% соответственно, что не согласуется литературными данными.

Большой процент детей с пневмонией и сепсисом были из Алатауского района (36,0%), тогда как из Жетису-ского (15,0%), из Ауезовского (15,0%), из Медеуского (13,0%), из Туркисибского (10,0%), из Алмалинского района (7,0%).

При анализе факторов риска реализации ГВЗ было выявлено что на учете в женской консультации состояло 89,5% женщин, из них у 83,0% имелась различная экстрагенитальная и гинекологическая патология: у 38,0% — беременность протекала на фоне хронической патологии мочеполовой системы, у 13,0% — была угроза преждевременных родов, у 2,0% — отслойка нормально расположенной плаценты, у 5,0% — эндокринопатии, у 5,0% — обострение ЦМВ инфекции, у 2,0% — ожирение, у 7,0% протекало без особенностей. 10,0% женщин на учете в женской консультации не состояли.

У 34,0% женщин роды проводились путем операции «Кесарево сечение», у 65,0% отмечались физиологиче-



ские роды. У 44,0% женщин данная беременность была первая, у 28,0% данная беременность — вторая, у 18,0% данная беременность — третья, у 5,0% данная беремен-

ность — четвертая, 2,0% данная беременность — пятая. У 55,0% женщин детей с пневмонией и сепсисом данный ребенок был от первых родов.

Таблица 1. Факторы риска ГВЗ у новорожденных

Признаки	%
Первобеременные	44,0
Первородящие	55,0
Инфекции урогенитальной области	38,0
Заболевания желудочно-кишечного тракта	5,9
Заболевания сердечно-сосудистой системы	8,8
Эндокринопатии	8,8
Анемия беременных	35,0
Внутриутробная инфекция	5,9
Преждевременная отслойка плаценты	2,9
Ожирение	2,9
Многоводие	8,8
Маловодие	2,9
Низкая плацентация	5,9
Преэклампция	8,8

Все дети поступили в отделение из роддомов на разные дни жизни. 10,0% детей среди проанализированных историй болезни в крайне тяжелом состоянии. Тяжесть состояния была обусловлена интоксикацией, дыхательной недостаточностью и неврологическими расстройствами с преобладанием синдрома угнетения центральной нервной системы.

При анализе результатов ИФА крови у 4 (10,0%) детей с пневмонией и сепсисом выявлена ЦМВ инфекция, у 4 (10,0%) детей вирус простого герпеса и у 3 (8,8%) — хламидии.

Таким образом, в результате проведенного исследования было установлено, что среди 38 историй болезни отделения патологии новорожденных и недоношенных ДГКБ № 1 пневмония диагностирована в 90,0% случаев, чаще у недоношенных детей (66,0%), чаще у девочек, а так же детей, проживающих в Алатауском районе (36,0%). У 28,0% детей с пневмонией и сепсисом выявлена ВУИ инфекция различной этиологии. У 83,0% матерей детей с пневмонией и сепсисом имелась различная экстрагенитальная и гинекологическая патология.

Литература:

1. Самсыгина, Г.А., Яцык Г.В., Сепсис новорожденных // Руководство по педиатрии. Неонатология. М., 2008 — с. 337–352.
2. Неонатология // Национальное руководство, М.: ГЭОТАР-Медиа, 2007—848 с.
3. Шабалов, Н.П. Неонатология, т. 2. М.: 1997. — 600 с.
4. Шабалов, Н.П., Иванов Д. О. Сепсис новорожденных // Педиатрия. 2003. № 5. с. 45–56.

## Медицинская информационная система для автоматизации рабочего места врача

Деньга Андрей Владимирович, студент;

Шлыков Владислав Валентинович, кандидат технических наук, доцент  
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

*В работе представлены результаты разработки медицинской информационной системы «DoctorHelper», рассмотрен один из способов автоматизации электронной медицинской карты с помощью созданной медицинской информационной системы. Подобраны оптимальные условия доступа врача к базе пациентов и их диагнозов. Разработанное программное приложение простое в использовании для просмотра и управления электронной картой пациента.*

**Ключевые слова:** электронная медицинская карта, медицинская информационная система, база данных, электронный документооборот, оптимизация, CRM, FTP

**Информационные системы в медицине.** Современные медицинские учреждения, диагностические центры, работают и накапливают огромные объемы данных. От того, насколько эффективно эта информация используется, зависит качество медицинской помощи. Информационные технологии в медицине сегодня становятся неотъемлемой составляющей здравоохранения. На смену эпохи бумажных носителей и документооборота информации пришли специализированные базы данных и информационные системы (ИС).

Любые информационные системы принято делить на типы, в зависимости от задач которые они ставят перед собой. Таким образом, можно типизировать медицинские информационные системы следующим образом:

- Системы для работы с пациентами — обеспечивают быструю обработку данных и качественную работу с пациентами;
- Системы для работы с ресурсами — используются

для планирования ресурсов медицинского учреждения, а именно ресурсов персонала и оборудования;

— Системы анализа полученных данных — позволяют запросить из банка данных результаты обследований или заболеваний, показывают общую картину здоровья пациентов.

Приведенные системы охватывают всю деятельность медицинских учреждений. Основные уровни медицинских информационных систем показаны на рисунке 1.

На данный момент при разработке программного обеспечения (ПО), которое используется в учреждениях здравоохранения, стоят такие проблемы как: создание единой структуры медицинской карточки, постоянное обновление медицинских данных, предоставление возможности анализа первичной информации для дальнейшего прогнозирования. Это объясняется сложностью структурой и организацией работы разнонаправленных медицинских учреждений. Для решения этих задач первичным

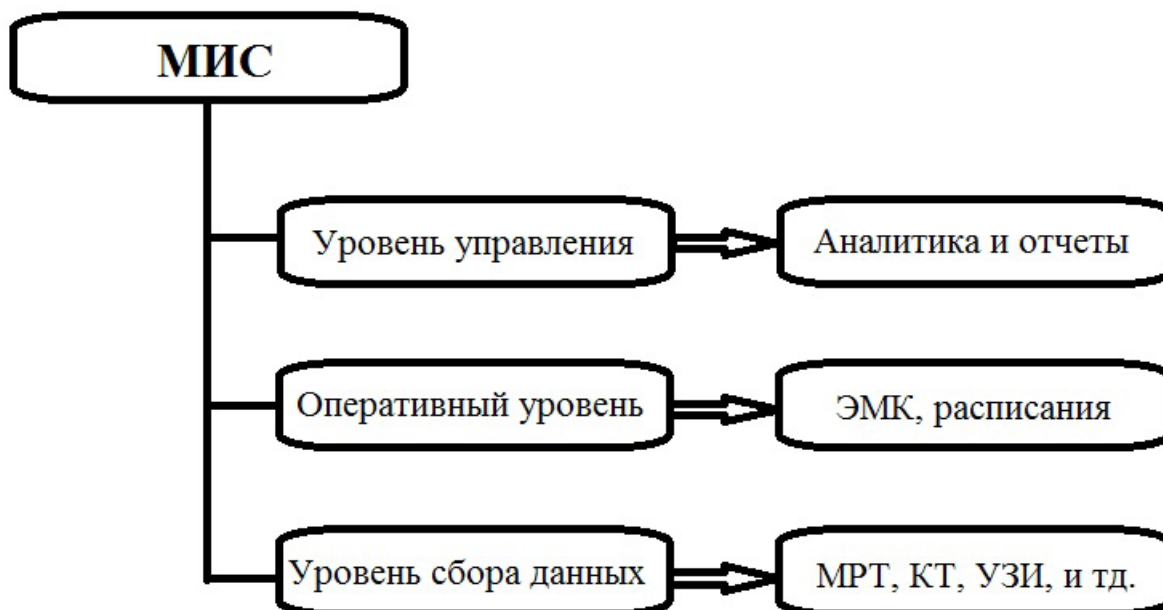


Рис. 1. Уровни медицинской информационной системы

и необходимым условием является разработка специализированного электронного документа — электронной медицинской карты (ЭМК).

Электронная медицинская карта является ресурсом информации, позволяет оперировать данными пациентов, проводить внутренний и внешний обмен между подразделениями медицинских учреждений. Вести учет и хранение медицинской информации в структурированном виде. Позволяет вести анализ, поиск необходимой информации и предоставляет другие возможности благодаря структурированности.

Принцип действия ЭМК в концепте является единственным информационным ресурсом, который позволяет оперировать личными данными пациентов, а также обмениваться такими данными с другими медицинскими учреждениями для составления, учета и хранения медицинской информации.

**Методы и средства разработки.** Программный продукт создан в среде программирования Visual Studio с помощью языка программирования C# и библиотек встроенных в .NET Framework 4.5. База данных размещается на сервере MySQL. Модель базы данных была реализована с помощью системы управления базами данных MySQL Workbench. Для реализации информационной системы «DoctorHelper» был развернут и настроен FTP Server, который функционирует совместно с базой данных и обеспечивает сохранение иллюстративного материала.

При разработке данного программного продукта было предусмотрено, что система необходима для сбора и получения собранной информации о пациенте. Таким образом, разработанное программное обеспечение является CRM-системой, которая обеспечивает управление взаимоотношениями с клиентами медицинского учреждения.

**Электронная медицинская карта.** В ходе анализа существующих медицинских систем электронного документооборота разработан программный продукт, основной задачей которого является: сбор и отображение информационных ресурсов медицинских учреждений, сохранение иллюстративного материала. ЭМК для информационной системы «DoctorHelper» складывается и хранится в автоматизированной информационной базе медицинского учреждения. Структура ЭМК позволяет применять карту в учреждениях, предоставляющих первичную, вторичную и дальнейшую помощь, с учетом характера и особенностей оказания помощи. ЭМК позволяет моделировать события и работает со следующими объектами информационной системы: электронная карточка пациента, специализированный GUI-интерфейс.

Электронная карточка пациента состоит из программных модулей:

1. Общая информация о пациенте.
2. Записи по работе с пациентом:
  - a. Анализы;
  - b. Процедуры;
  - c. Снимки заболеваний;

d. Информация о медицинском обследовании.

3. Назначение записей на прием к врачу.

Информационная система «DoctorHelper» имеет собственный GUI-интерфейс и может использоваться в учреждениях здравоохранения для следующих задач:

1. Облегчения работы врача;
2. Сбора данных о наличии или отсутствии проблем у пациентов определенной территориальной или административной единицы;
3. Предоставление доступа к карте пациента с любого больничного заведения.
4. Обработка полученного иллюстративного материала о пациенте.

Информационная CRM-система «DoctorHelper» представляет собой прикладное программное обеспечение для медицинских учреждений и предназначена для автоматизации стратегий взаимодействия с клиентами (пациентами), в частности для оптимизации маркетинга и улучшения обслуживания пациентов путём сохранения информации и истории взаимоотношений с ними, установления и улучшения бизнес-процессов и последующего анализа результатов.

Отличительной особенностью ИС «DoctorHelper» является использование внутреннего кэширования полученной информации на удаленном FTP сервере. Таким образом, предусмотрена возможность сохранять информационные файлы (рисунки) не в базе данных медицинского учреждения, а на удаленном FTP сервере. Это позволяет снизить нагрузку запросов к локальной информационной базе и не требует дополнительного программного модуля для преобразования картинок в тип данных BLOB (один из основных форматов реляционных баз данных, который предназначен для хранения изображений) и обратного преобразования при отображении данных в информационной системе.

Также для более эффективной работы с FTP сервером используется кэширование изображений. Даная технология реализована с помощью алгоритма, который позволяет хранить контрольные суммы рисунков пользователя в базе данных и в случае их совпадения с исходными данными, которые поступают от клиентской программы, не нагружать FTP сервер задачей обновления данных (изображений), а выбирать данные непосредственно из кэш-памяти клиентской программы. Данные действия позволяют однократно получать иллюстративную информацию о пациенте и хранить её локально, причем в случае добавления или изменения на FTP, контрольные суммы будут изменены и при открытии клиента произойдет обновление информации. Таким образом, можно быть уверенным в том, что будет обеспечена стабильность работы FTP сервера и получения актуальной информации по запросу.

На рисунке 2 изображены основные таблицы БД, которые позволяют удаленно работать с картинками пользователя системы (как мы можем увидеть, контрольные суммы хранятся в таблице Worker, поле PhotoValue).



Рис. 2. Реализация хранения информации в базе данных

**Заключение.** Таким образом, разработанная информационная система «DoctorHelper» обеспечивает быстрое взаимодействие при обработке данных и достоверный отклик программы на команды, а также соответствует основным правилам CRM-систем. Система сбора информации является эффективной и удобной для быстрого обслуживания пациентов медицинских учреждений.

#### Литература:

1. Гринберг, Пол. CRM со скоростью света = CRM at the speed of light. — СПб.: Символ Плюс, 2007. — [528 с.]
2. Информационные технологии в медицине: регионы тестируют инновации / Интернет ресурс <http://www.cnews.ru/reviews/free/publichealth/article/region.shtml>

## Стоматологический статус студентов второго курса железнодорожного техникума города Черновцы

Кильмухаметова Юлия Хафизовна, ассистент  
Буковинский государственный медицинский университет (Украина)

За данными ВООЗ в настоящее время нет стран, где бы не наблюдалось кариеса зубов и заболеваний тканей пародонта. Распространенность и интенсивность кариеса зубов в разных странах разные, что ставит перед службами здравоохранения различные за своим характером цели. ВООЗ был принят глобальный для всего мира критерий стоматологического здоровья, а точнее индекс КПУ должен быть не больше 3,0.

Достичь значительного снижения стоматологических заболеваний невозможно без введения программы первичной профилактики. Планирование стоматологической помощи в любых объемах, в том числе и средств по первичной профилактике должно быть построено на специфическом ситуационном анализе, который получается в результате сбора данных на протяжении 5 лет, предшествующих планированию. Для унификации методов об-

следования населения и получения сопоставленных результатов, ВООЗ рекомендует использовать комбинированную карту для стоматологического обследования.

Одним из основных методов санитарно-просветительной работы в стоматологии является гигиеническое обучение и воспитание. Различают две программы гигиенического обучения и воспитания: минимальную — обучение родителей и других взрослых, осуществляющих уход за ребенком, а также объему навыков самого ребенка по поддержанию гигиены полости рта, и максимальную — воспитание у родителей и детей сознательного отношения к гигиеническим мероприятиям на основе понятия «здоровый образ жизни». Особенно важными являются обучение с повседневым повторением рациональных приемов, личный пример взрослых, сотрудничество родителей с медицинскими работниками.

Комплексность гигиенического обучения и воспитания обеспечивают три компонента — санитарное просвещение, обучение гигиене полости рта и постоянный контроль за ее осуществлением. Непрерывность и систематичность являются вторым принципом гигиенического обучения и воспитания. Третий принцип — дифференцированность форм в зависимости от возраста и других факторов (образование, профессия, состояние здоровья). В реализации гигиенического обучения и воспитания должны участвовать не только стоматологи, но и средний медицинский персонал, а при работе с детьми и беременными — педиатр, гинеколог, педагоги, воспитатели.

Плохая гигиена ротовой полости приводит к образованию зубного налета, на поверхности которого формируется зубная бляшка, что со временем распространяется на поверхности всех зубов. Зубная бляшка имеет сложную структуру, которая может меняться под действием различных факторов. Это мягкое аморфное гранулированное отложение, которое накапливается на поверхностях зубов, на пломбах, протезах и зубном камне и плотно прилипает. Бляшку можно отделить только путем механической чистки. Отложения в малых количествах не видны, если только они не пигментированы.

Постепенная минерализация мягких зубных отложений под влиянием микрофлоры полости рта способствует формированию зубного камня. Первыми признаками наличия зубного камня являются кровоточивость десен и неприятный запах изо рта. Различают два вида зубного камня: наддесневой и поддесневой. Наддесневой образовывается на поверхности зуба и выглядит как желтоватая или белая масса твердой консистенции. Его легче заметить и вовремя удалить. Поддесневой растет вовнутрь — к корню зуба и разрушает его круговую связку, результатом чего могут быть десневой карман, гингивит, пародонтит. И полностью здоровые зубы начинают шататься и выпадают.

Распространенность заболеваний пародонта и необходимость объективной их диагностики привели к появлению большого количества индексов.

Пародонтальные индексы позволяют контролировать динамику заболевания в течение длительного времени,

оценивать глубину и распространенность патологического процесса, сопоставлять эффективность различных методов лечения.

Выделяют индексы обратимые, необратимые и сложные. При помощи обратимых индексов оценивают динамику заболевания пародонта, эффективность лечебных мероприятий. Эти индексы характеризуют выраженность таких симптомов, как воспаление и кровоточивость десен, подвижность зубов, глубина десневых и пародонтальных карманов. Наиболее распространенные из них — индекс РМА, пародонтальный индекс Рассела и др. В эту же группу можно отнести гигиенические индексы (Федорова-Володкиной, Грина-Вермильона, Рамфьорда и т. д.).

Необратимые индексы: рентгенологический, индекс десневой рецессии и др. — характеризуют выраженность таких симптомов заболеваний пародонта, как резорбция костной ткани альвеолярного отростка, атрофия десны.

При помощи сложных пародонтальных индексов дают комплексную оценку состояния тканей пародонта. Для оценки гигиенического состояния полости рта определяют индекс гигиены по методу Ю.А. Федорова и В.В. Володкиной.

Определение стоматологического и гигиенического статуса производят по: оценке состояния зубов, десен, наличия патологических зубодесневых карманов, ортодонтических аномалий, неправильного положения складок и уздечек слизистой оболочки полости рта, потребности в ортопедическом лечении, состояния слизистой оболочки полости рта, гигиенического статуса.

Гигиену ротовой полости можно проводить дома, а также проводить профессиональную гигиену. Зубы следует чистить не менее двух раз в день. Лучше всего после каждого приема пищи. Это полирует зубы, устраняет остатки пищи и предотвращает кислотную атаку. Чистка зубов также стимулирует и хорошо очищает десна. Существует несколько методов чистки зубов. Правильная ежедневная профилактика, а именно правильное использование зубной щетки и нитки помогает уменьшить риск развития стоматологических заболеваний. Эти постоянные домашние процедуры менее дорогие чем стоматологическое лечение.

Профессиональная гигиена полости рта — услуга, которая предоставляется практически во всех клиниках. Она включает в себя чистку эмали при помощи ультразвука, обработку зубов стоматологическим содоструйным аппаратом, полировку зубных рядов полировочными пастами. Следует помнить, что проведение этой процедуры является неотъемлемой частью комплекса процедур по уходу за своим здоровьем, которая позволяет предотвратить риск стоматологических заболеваний. Клинические эксперименты показывают, что накопление налета приводит к воспалению десен, а его удаление — к их выздоровлению. После проведения профессиональной чистки зубов необходимо провести реминерализующую терапию при помощи аппликаций фтора для укрепления эмали.

**Цель исследования:** определить стоматологический статус у студентов 2 курса железнодорожного техникума города Черновцы. Провести оценку их знаний гигиены ротовой полости.

**Материалы и методы исследования:** стоматологический статус — статус, который определяет состояние ротовой полости пациента.

Определение стоматологического статуса проводится следующим образом: у пациента собирается анамнез, проводится внешний осмотр больного, обследуют ротовую полость, определяют интенсивность кариеса (индекс КПУ) — среднее число пораженных кариесом и его осложнениями зубов (К), запломбированных (П) и удаленных (У), общая сумма этих констант определяется как индекс КПУ и имеет определенное цифровое значение, а именно при значениях КПУ = 0 пациент за стоматологическим статусом может быть отнесен в группу здоровых или в группу риска; при КПУ от 1 до 4 — состояние компенсированное; при значениях от 5 до 7 состояние определяют как субкомпенсированное; и выше — декомпенсированное.

Для определения стоматологического статуса нами был проведен осмотр группы людей, которые учатся на 2 курсе железнодорожного техникума города Черновцы.

В исследовании приняли участие 20 студентов в возрасте от 18 до 21 года. Было осмотрено 12 девушек и 8 парней. Было определено уровень КПУ каждого отдельно и группы вместе.

**Результаты исследования и их обсуждения.** Результаты показали, что в группе девушек КПУ составляет 40,1%, в то время, как у мальчиков 35,8%. При этом уровень удаленных зубов составил 0,01%. Опрос пациентов показал, что нижний уровень КПУ был у студентов, которым проводили первичную профилактику зубов в детстве. Кроме того, было отмечено, что у лиц проживающих в сельской местности КПУ значительно выше, чем у городских жителей, которым проводили стоматологические осмотры.

Также было отмечено, что уровень гигиены полости рта у женской половины опрошенных намного превышал уровень мужской. Большинство студенток указали, что они чистят зубы два раза в день, в то время как парни чистят зубы не более одного раза в день, а то и не чистят вообще. Только 8% из всей группы указали, что они используют зубную нить как гигиеническое средство очистки зубов. И всего 2% используют ополаскиватель для полости рта.

**Выводы.** По результатам данного исследования мы сделали вывод, что ранняя индивидуальная профилактика детей способствует лучшему стоматологическому статусу в последующем. Большинство студентов имеют удовлетворительный уровень гигиены полости рта, что говорит о том, что гигиенический статус оказывает более медленное влияние на стоматологическую заболеваемость, чем уровень резистентности твердых тканей зубов к кариесу. Несмотря на широкое обсуждение в средствах массовой информации вопросов о стоматологическом здоровье, знания по применению средств и предметов гигиены полости рта минимальны; отсутствуют навыки по правилам чистки зубов.

Таким образом, необходимо повышение эффективности проведения санитарно-просветительной работы по вопросам индивидуальной гигиены полости рта, которую следует проводить среди студентов.

Мировой опыт и научные исследования убедительно доказали, что только целенаправленная, эффективная профилактическая программа может значительно повлиять на снижение уровня стоматологической заболеваемости. Наиболее распространенным и эффективным методом предупреждения кариеса и заболеваний пародонта является рациональная гигиена полости рта. Важное значение при проведении гигиенических процедур имеет профессиональная гигиена полости рта. Что бы предотвратить образование зубных отложений, в частности зубного камня, необходимо чистить зубы два раза в день, пользоваться зубными нитками, ополаскивателями и рационально питаться.

#### Литература:

1. Леус, П. А. Эффективность профессиональной гигиены полости рта в профилактике болезней пародонта / Леус П. А., Любко С. С. // Клиническая стоматология, — 1997. — № 3. — с. 70–72.
2. Данилевский, М. Ф., Борисенко, А. В., Політун А. М., Антоненко М. Ю., Сідельнікова Л. Ф., Несин О. Ф. «Терапевтична стоматологія. Том 3. Захворювання пародонта». Київ. «Медицина». — 1993 р.
3. В. С. «Заболевание пародонта». Медицина. 1998 г.
4. Грудянов, А. И. Заболевания пародонта / А. И. Грудянов // М., 2009, — 336.

## Современная терапия цереброваскулярных заболеваний в Воронежском регионе

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой  
Воронежский государственный медицинский университет имени Н. Н. Бурденко

Сазонов Илья Эдуардович, кандидат медицинских наук, заведующий отделением  
Воронежская городская клиническая больница скорой медицинской помощи № 1

Ульянова Ольга Владимировна, кандидат медицинских наук, ассистент  
Воронежский государственный медицинский университет имени Н. Н. Бурденко

*Основными задачами медицины на современном этапе являются профилактика и снижение частоты развития сердечно-сосудистых заболеваний. На сегодняшний день сосудистая патология центральной нервной системы по-прежнему является актуальной. Инсульт занимает лидирующее место по количеству временной нетрудоспособности и инвалидности среди населения. Все пациенты с инсультом как можно в короткие сроки должны получить специализированную медицинскую помощь, а также пройти все необходимые последующие реабилитационные мероприятия.*

**Ключевые слова:** инсульт, инвалидность, сердечно-сосудистые заболевания, специализированная помощь, ранняя реабилитация

**Актуальность.** Одной из основных задач неврологической службы является снижение частоты развития сосудистых заболеваний головного мозга, а в случае развития инсульта — оказание своевременной и эффективной высокотехнологичной специализированной медицинской помощи. Вместе с тем, лечение больных в остром периоде инсульта представляет собой весьма сложную задачу. Прежде всего, учитывается общее соматическое состояние больного, определяемое при патологии многообразными расстройствами функций жизненно важных органов и систем в результате церебрального поражения, а также сопутствующими или развивающимися вследствие нарушения мозгового кровообращения соматическими нарушениями. Ведущую и определяющую роль играет разнонаправленность изменений функционального состояния интракраниальных сосудов: окклюзия и спазм артерий, снижение венозного тонуса, затруднение венозного оттока; уменьшение артериальной перфузии в зоне ишемического очага и ее избыточность в других областях мозга. Поражение осложняется еще и тем, что нередко возникает несоответствие изменений гемодинамики и метаболизма головного мозга [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12]. Под инсультом понимают клинический синдром, характеризующийся внезапно возникшими симптомами утраты локальных мозговых, а иногда общемозговых функций (подтвержденных или нет данными компьютерной томографии), длящимися более 24 ч или приводящими к смерти без иной явной причины, кроме сосудистой патологии [1, 2].

Сосудистые заболевания являются лидирующей причиной смертности и инвалидности в Российской Федерации, каждые 30 секунд происходит новый случай инсульта или инфаркта миокарда [1, 2, 9, 10]. Доля ОНМК в структуре общей смертности в нашей стране составляет 21,4–28%, уступая лишь смертности от ИБС. Среди лиц с заболеваниями нервной системы пациенты с ОНМК со-

ставляют от 15 до 24,6%. В последнее время наблюдается омоложение инсульта с увеличением его распространенности у лиц трудоспособного возраста — до 65 лет. Ранняя 30-дневная летальность после инсульта составляет 34,6%, а в течение года умирает примерно половина заболевших [1, 2, 4, 7, 9, 12].

Инсульт является одной из ведущих причин серьезной утраты функциональной состоятельности. Из всех больных, перенесших ОНМК, в постоянной посторонней помощи нуждается 31%, самостоятельно передвигаться не могут 20% пациентов, и только 8% больных способны вернуться к прежней работе. Вероятность развития инсульта увеличивается в 2 раза, если это заболевание было у кого-либо из родителей. По данным разных исследований, считается, что генетическая склонность к инсультам чаще передается по материнской линии. ОНМК накладывает особые обязательства на членов семьи больного и ложится тяжелым социально-экономическим бременем на общество [1, 2, 4, 7, 12, 15].

Цереброваскулярные заболевания наносят огромный ущерб экономике, учитывая расходы на лечение, медицинскую реабилитацию, потери в сфере производства. Стоимость лечения одного больного, перенесшего инсульт, включая стационарное, медико-социальную реабилитацию и вторичную профилактику, составляет 127 тыс. рублей в год, то есть общая сумма прямых расходов на инсульт (из расчета 450 тыс. случаев в год) составляет 57,15 млрд рублей. По данным Министерства здравоохранения Российской Федерации, суммарно прямые и непрямые затраты, связанные с инсультом в России, составляют 361 млрд. рублей в год. По данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ), за период 2005–2015 г. потеря ВВП в России из-за преждевременных смертей от сосудистых причин может составить 8,2 трлн. рублей [1, 2, 3, 4, 7, 12, 14, 15].

Ишемический инсульт (ИИ) является частой формой ОНМК. В РФ он составляет 75–80% общего числа инсультов и в 4–5 раз превышает частоту кровоизлияний. В то время, как биохимические механизмы ишемического повреждения мозга являются универсальными, существуют несколько различных причин развития инсульта: атеросклеротическое и атеротромботическое стенозирующее поражение экстракраниальных артерий; артериальная гипертензия, вазомоторные дистонии; заболевания сердца, коарктация аорты; липогиалиноз мелких сосудов, приводящий к микроангиопатическим лакунарным поражениям; заболевания эндокринной системы; болезни крови; токсические поражения сосудов мозга [2, 7, 9, 10, 11, 13].

Наиболее частыми причинами ОНМК по ишемическому типу являются тромбоз или эмболия сосудов головного мозга, приводящие к снижению перфузии мозговой ткани и формированию очага инфаркта. Доказано, что процесс ишемии мозга индивидуален и особенности его течения, включая обратимость ишемического поражения, определяются фоновым состоянием метаболизма мозга, индивидуальной устойчивостью к гипоксии, статусом и реактивностью нейроиммуноэндокринной системы. Все это позволило сформулировать положение о динамическом характере и потенциальной обратимости церебральной ишемии и о необходимости проведения неотложных мер по сочетанному восстановлению кровотока и защите головного мозга от ишемического поражения [1, 2, 3, 4, 6, 7, 15]. Отдаленный функциональный исход инсульта зависит от временного промежутка: от начала заболевания до начала проведения патогенетической терапии; контроля и коррекции физиологических показателей, влияющих на течение и исход заболевания (артериальное давление, температура тела, уровень глюкозы); распознавания и лечения интра- и экстрацеребральных осложнений. Единое понимание механизмов церебрального повреждения, патофизиологии, результатов исследований и лечебных действий могут выполнить только врачи одного дежурного блока, работающие как единая сплоченная команда, состоящая из невролога, нейрохирурга, анестезиолога и реаниматолога.

Патогенетическая терапия, должна включать в себя базисную и интенсивную терапию. Консервативное лечение должно иметь несколько направлений, а именно: стабилизация жизненно-важных функций; общие мероприятия по уходу; коррекция уровня оксигенации и сердечной деятельности; предупреждение или ограничение вторичного повреждения нейронов; борьба с отеком мозга [1, 2, 6, 7, 16, 17].

**Все эти направления могут быть успешно реализованы только при постоянном контроле в динамике.** Непрерывный мониторинг в течение 3–5 дней соматического и неврологического статуса, включая артериальное давление, температуру тела, уровень глюкозы, оксигенацию крови, показатели водно-электролитного баланса.

Отдельно следует остановиться на основных принципах лечения отека мозга. Локальный отек мозга наблю-

дается в течение первых 24–48 часов развития инсульта. У больных более молодого возраста или с обширными инфарктами в бассейне средней мозговой артерии отек мозга может приводить к повышению внутричерепного давления с риском вклинения продолговатого мозга, где находятся сосудисто-двигательный и дыхательный центры, в большое затылочное отверстие с последующим вторичным повреждением ткани мозга и нарушением витальных функций. Клинически это проявляется быстро наступающим угнетением уровня сознания и появлением симптомов вклинения головного мозга [2, 5, 6, 7, 8, 15, 16, 17].

В лечении в первую очередь необходимо предусмотреть прямое и несколько приподнятое (на 15–30°) положение головы, что позволяет улучшить венозный отток и снизить внутричерепное давление.

Назначение осмотических диуретиков [7] или гипертонических растворов [8] является наиболее распространенным методом борьбы с отеком головного мозга. Используют маннитол внутривенно — капельно в дозе 0,25–1 г/кг массы тела, каждые 3–6 часов. Необходимо помнить, что у маннитола есть феномен отдачи и маннитол не улучшает церебральный метаболизм, маннитол противопоказан к применению у больных с геморрагическими инсультами и субарахноидальными кровоизлияниями. Также используют внутривенное введение 200–400 мл 3% раствора натрия хлорида [2, 5, 6, 7, 8, 15, 16, 17]. Более медленный и продолжительный эффект дает введение 250 мл 10% глицерина внутривенно в течение более 2 часов, от 1 до 3 раз.

В последнее время для увеличения продолжительности гемодинамических эффектов была создана комбинация гипертонических растворов и коллоидных растворов. В частности, на сегодняшний день широко используется комбинация гипертонического раствора натрия с гидроксипроцерамидом [5, 8].

Используется искусственная вентиляция легких (ИВЛ) в режиме гипервентиляции, до снижения  $PaCO_2$  до 30–32 мм. рт. ст. Достижимый при этом эффект достаточно хороший, но кратковременный, не более трех часов.

Наличие двигательного возбуждения или борьба больного с аппаратом ИВЛ, приводит к повышению внутричерепного давления и давления в яремных венах, что соответственно может привести к повышению внутричерепного давления (ВЧД). Для купирования двигательного возбуждения в основном используют опиоиды и бензодиазепины.

Возникновение судорожного синдрома увеличиваем метаболизм головного мозга и способствует повышению ВЧД. Для купирования судорожного синдрома используют бензодиазепины и вальпроевую кислоту.

Гипотермия является одним из перспективных методов купирования внутричерепной гипертензии. Снижение температуры головного мозга угнетает церебральный метаболизм, что приводит к уменьшению мозгового кровотока и способствует снижению ВЧД [5, 8].



Хирургическое лечение, применяемое при неэффективности консервативной терапии включает в себя: гемикраниэктомию и хирургическую декомпрессию задней черепной ямки у больных с обширным инфарктом мозжечка, которая может предупредить необратимое повреждение ствола мозга. Патогенетическая терапия в основном существует только в случае ишемического повреждения мозговых клеток [1, 5, 7, 8].

При внутримозговом кровоизлиянии существует несколько методов лечения, но все они нейрохирургические.

1. Удаление гематомы открытым способом. Еще на древних гравюрах мы наблюдаем, как чуть ли не на базаре лекари вскрывали череп и удаляли (в первую очередь травматические) гематомы.

2. Вентрикулярное дренирование.

3. Стереотаксическое удаление гематомы.

4. Стереотаксическая эвакуация гематом посредством их растворения тромболитиками.

5. Вентрикулярный тромболитизис.

В данном случае все лечебные мероприятия должны быть направлены на предупреждение или купирование отека мозга, вторичных ишемических осложнений в результате сосудистого спазма, нарушения витальных функций.

Лечение ишемического инсульта включает в себя базисную и специфическую терапию. К специфической терапии относятся: восстановление кровотока в пораженной артерии (реканализация), антикоагулянтная и антитромбоцитарная терапии, каротидная эндартерэктомия, каротидное стентирование, транслюминальная ангиопластика со стентированием, экстрасистеральная интракраниальная микроанастомоз [1, 2, 3, 5, 6, 7, 8].

Основной терапией ИИ, является реперфузия. Проблема терапевтической реперфузии чрезвычайно сложна. Реперфузия при острой фокальной ишемии мозга наиболее эффективна в первые минуты после развития инсульта. Даже спустя 5 мин после дебюта ишемии массивное возвращение крови в зону ишемии через включившиеся коллатерали или реваскуляризованный участок артерии не приводит к полной нормализации мозгового кровотока. Возникают поэтапные нарушения перфузии церебральной ткани: в первые минуты — гиперемия, затем — постишемическая гипоперфузия, что является результатом тяжелых нарушений микроциркуляции, вызванных высвобождением из зоны ишемии вазоактивных и провоспалительных метаболитов. Чем длительнее дореперфузионный период, тем меньше шанс быстро нормализовать микроциркуляцию в зоне ишемии и тем выше риск дополнительного реперфузионного повреждения церебральной ткани: происходит развитие оксидантного стресса, обусловленного включением кислорода в процессы свободнорадикального окисления, и осмотических нарушений, вызванных нарастанием цитотоксического отека вследствие избытка воды и осмотически активных веществ, о чем утверждают и другие исследователи [1, 3, 6, 7].

По экспериментальным данным различных авторов, целесообразность терапевтической реперфузии сохраняется в пределах 3–6 ч. Затем при ее использовании значительно нарастает риск не только реперфузионного повреждения, но и геморрагических осложнений. Таким образом, реперфузия должна быть ранней, по возможности активной и кратковременной. Характер реперфузионной терапии определяется патогенетическим вариантом развития инсульта. При тромботическом или эмболическом поражении артерий среднего и крупного калибра направлением выбора является тромболитическая терапия (ТЛТ). Тромболитическая терапия — это применение специальных препаратов (тромболитиков), которые позволяют лизировать тромбы в сосудах. Что может уменьшить масштаб повреждения нервной ткани, снизить вероятность возникновения различных осложнений, уменьшить летальность. Проведение активной реперфузионной терапии возможно лишь в стационаре, после нейровизуализации (КТ и/или МРТ структур головного мозга), что позволяет исключить как геморрагический компонент поражения, так и объемные образования головного мозга, а также позволяет оценить размеры очага ишемии [1, 3, 6, 7, 9].

Единственным тромболитическим препаратом для проведения ТЛТ при ИИ, эффективность и безопасность которого была доказаны в ряде контролируемых международных исследований, является рекомбинантный тканевый активатор плазминогена (rtPA) альтеплаза. По рекомендациям Научного центра неврологии РАМН препарат вводится в дозе из расчета 0,9 мг/кг веса больного. Показаниями к проведению ТЛТ являются внезапно развившееся симптомы очагового поражения головного мозга, не более 4,5-х часов от момента развития заболевания, клиническое состояние больного (оцениваемого по шкале национального института здоровья США NIHSS) не менее 5 и не более 25 баллов, отсутствие геморрагического характера заболевания по данным КТ или МРТ головного мозга [1, 3, 6, 7].

**Материалы и методы:** Приводим опыт работы первичного неврологического отделения (ПНО) БУЗ ВО ВГК БСМП № 1 (город Воронеж). БУЗ ВО ВГК БСМП № 1 работает по принципу территориального деления и оказывает помощь больным с инсультами двум районам города и трем близлежащим районам Воронежской области (численность населения составляет 370 тыс. человек). В ПНО осуществляются следующие программы для больных с ОНМК: оказание неотложной медицинской помощи больным с ОНМК, мониторинг жизненно важных функций, лабораторных показателей больных и интенсивное их лечение в БИТР (блок интенсивной терапии и реанимации), проведение мультидисциплинарной ранней реабилитации больных, включающей методы кинезотерапии, эрготерапии (бытовой реабилитации), физиотерапевтического лечения (ФТЛ), медико-психологической, медико-педагогической (в том числе логопедической), медико-социальной коррекции.

По показаниям осуществляется перевод больных, нуждающихся в неотложной специализированной нейрохирургической, ангиохирургической и рентгенэндоваскулярной хирургической помощи, в региональный сосудистый центр (РСС). Врачи ПНО БУЗ ВО ВГК БСМП № 1 подбирают строго индивидуальную программу вторичной профилактики инсульта. Примечательно, что совместно с кафедрой психиатрии и неврологии ИДПО ГБОУ ВПО ВГМУ им. Н. Н. Бурденко проводятся учебные курсы для освоения и внедрения в клиническую практику современных методов диагностики и лечения ОНМК на основе принципов доказательной медицины и научно-технических достижений. Ведется госпитальный регистр инсульта для оценки качества оказания медицинской помощи больным, а данные регистра передаются в РСС.

Больные доставляются в БСМП скорой помощью с предварительным обязательным звонком врача скорой помощи врачу БИТР ПНО. К моменту доставки больного в БСМП в приемном отделении его встречает дежурный невролог совместно с врачом БИТР и, не тратя времени на процедуру регистрации больного, сразу транспортируют в кабинет КТ (силами сотрудников скорой помощи), где и происходит принятие решения о возможности проведения ТЛТ, происходит забор крови из вены на исследование тромбоцитов, глюкозы в периферической крови, международного нормализованного отношения (МНО), активированного частичного тромбопластинового времени (АЧТВ). По пути в БИТР ПНО больному записывают ЭКГ и делают обзорную рентгенограмму органов грудной клетки. После проведенных исследований больной в любом случае направляется в БИТР как при проведении ТЛТ, так и при наличии противопоказаний к ее проведению. Время от поступления в стационар до начала проведения ТЛТ (введение актелизе) в БУЗ ВО ВГК БСМП № 1 в среднем составляет  $35,2 \pm 1,8$  мин.

#### **Мультидисциплинарный подход к лечению и ранняя реабилитация больных, перенесших инсульт.**

В 2006 году правительством России была поставлена задача, что на период до 2016 года более 70% выживших в течении первого месяца должны быть полностью независимыми в повседневной жизни через 3 месяца после развития инсульта. Основопологающими принципами является мультидисциплинарный подход к лечению и реабилитации, раннее начало реабилитации; как можно ранняя мобилизация в первые 12–48 часов; преэмптентность всех служб [2, 4, 6, 12].

При проведении многочисленных исследований было доказано, что лечение больных с ишемическим инсультом в БИТРах по сравнению с лечением в палатах общего профиля достоверно уменьшает смертность, функциональный дефект и затраты, связанные с уходом за пациентом. В первые 24–48 ч в БИТР начинается проведение ранней реабилитации с участием мультидисциплинарной бригады в составе невролога,

терапевта, логопеда, врача-физиотерапевта, врача лечебной физкультуры (ЛФК), эрготерапевта. Далее мероприятия проводятся в неврологическом отделении на койках ранней реабилитации. В первые 72 ч в БИТР проводится многокомпонентный нейромониторинг: регулярная оценка неврологического статуса; повторное КТ головного мозга (проводится больным с ОНМК с оценкой по шкале ком Глазго  $\leq 13$  баллов в динамике через 24, 48 и 72 часа, в случае резкого ухудшения состояния — повторная КТ проводится в экстренном порядке), оценка ВЧД, инвазивное АД, прямая осмометрия, контроль газов крови ( $\text{PaO}_2$ ,  $\text{PaCO}_2$ ); проводится оценка системной гемодинамики; транскраниальная доплерография проводится в первые часы поступления больного в стационар, микродиализ, ЭЭГ, разрабатывается индивидуализированная программа вторичной профилактики (гипотензивная терапия, антитромбоцитарные препараты и антикоагулянты, контроль уровня глюкозы крови, коррекция липидного обмена).

ПНО является структурным подразделением БУЗ ВО ВГК БСМП № 1, которое оказывает помощь только больным с инсультом. В отделении работает специально подготовленный медицинский персонал, прошедшие подготовку в НИИ цереброваскулярной патологии и инсульта города Москвы и Санкт-Петербурга, являются членами Союза реабилитологов России. Такие бригады обеспечивают врачебную помощь (неврология, терапия/кардиология), помощь младшего и среднего медицинского персонала, физиотерапию, трудовую терапию, логопедическую помощь и социальную работу.

#### **Выводы:**

1. С первых же суток поступления больного в стационар им начинает заниматься мультидисциплинарная бригада в составе: невролог, логопед, психолог, врач ЛФК, врач-физиотерапевт, инструкторы ЛФК, медсестры по массажу, при необходимости — психиатр. Разрабатывается индивидуальный план реабилитации с учетом состояния и адаптации пациента.
2. В процессе реабилитации активно используются аппараты для активно пассивной механотерапии, вертикализаторы, напольные маты, ортезы для суставов.
3. Реабилитацию пациентов следует начинать как можно раньше, так как она может уменьшить число пациентов, нуждающихся в постороннем уходе после перенесенного инсульта. Интенсивность данной программы зависит от состояния больного и степени выраженности неврологического дефицита.
4. В клинических случаях, когда активная реабилитация невозможна (например, вследствие угнетения сознания), необходимо проводить пассивную реабилитацию с целью минимизации риска развития контрактур, суставных болей, возникновения пневмонии и пролежней.
5. Реабилитация должна обязательно продолжаться и после выписки больного из стационара, то есть быть непрерывной.

Литература:

1. Фадеев, П. А. Инсульт. / П. А. Фадеев. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008. — 160 с.
2. Инсульт: Руководство для врачей. / под ред. Л. В. Стаховской, С. В. Котова. — М.: ООО «Медицинское информационное агентство», 2013—400 с.: ил.
3. Алифирова, В. М. Инсульт: диагностика, лечение и профилактика: метод. рекомендации для врачей. / В. М. Алифирова, Т. А. Валикова, О. М. Антухова. — Сибирский медицинский университет (Томск). — Томск: Печатная мануфактура, 2007—126 с.
4. Гусев, Е. И. Эпидемиология инсульта в России. / Е. И. Гусев, В. И. Скворцова, Л. В. Стаховская // Инсульт. Приложение к Журналу неврологии и психиатрии им. С. С. Корсакова. — 2003. — № 8 — с. 4–9.
5. Виленский, Б. С. Неотложные состояния в неврологии. Руководство для врачей. / Б. С. Виленский. — С.-Петербург, Фолиант, 2004—512 с.
6. Суслина, З. А. Ишемический инсульт: принципы лечения в острейшем периоде. / З. А. Суслина // Атмосфера, Нервные болезни. — 2004 — № 1 — с. 14–18.
7. Инсульт: диагностика, лечение, профилактика. / под ред. З. А. Суслиной, М. А. Пирадова М.: МЕДпресс-информ, 2008. — 288 с.
8. Крылов, В. В., Петриков С. С. Нейрореанимация. Практическое руководство. / В. В. Крылов, С. С. Петриков ГЭОТАР-Медиа, 2010 г. — 176 с.
9. Куташов, В. А. Наиболее значимые предикторы кардиоэмболического инсульта, определяющие клиническую картину и исход заболевания. / В. А. Куташов, О. В. Ульянова // Вестник неврологии, психиатрии и нейрохирургии. — 2016. — № 6 — с. 51–55
10. Куташов, В. А. К вопросу о кардиогенных факторах риска возникновения ишемического инсульта у лиц молодого возраста. / В. А. Куташов, О. В. Ульянова // Кардиоваскулярная терапия и профилактика. — 2015. — 1 спец. выпуск (15): 62–63.
11. Куташов, В. А., Ульянова О. В. Исследование личностной акцентуации у пациентов с ишемической болезнью сердца коморбидной с аффективными расстройствами. / В. А. Куташов, О. В. Ульянова // Кардиоваскулярная терапия и профилактика. — 2015. — 1 спец. выпуск (15). — с. 61–62.
12. Суслина, З. А. Сосудистые заболевания головного мозга: Эпидемиология. Основы профилактики. / З. А. Суслина, Ю. Я. Варакин, Н. В. Верещагин. — М.: МЕДпресс-информ, 2009; — 352 с.
13. Применение классификационно — прогностического моделирования для выявления и анализа значимости индивидуальных факторов риска развития нервно — психических расстройств. / Будневский А. В. [и др.] // Журнал «Вестник неврологии, психиатрии и нейрохирургии». Москва. 2016. — № 3. — с. 37–43.
14. Ульянова, О. В. Современный взгляд на особенности взаимодействий в семьях, где у пациента имеются неврологические или психические расстройства. / О. В. Ульянова, В. А. Куташов // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. — 2015 — Т. 14, № 3—663–665
15. Preventing stroke: saving lives around the world. / Strong K. [et al.] // Lancet Neurol. — 2007. — Т. 6, № 2. — P. 182–187.
16. Barnett, H. J. M. Aspirin in stroke prevention. Stroke 21 (Suppl IV): IV-40, 1990. The Dutch TIA Trial Study Group. A comparison of two doses of aspirin in patients after a transient ischemic attack or minor ischemic stroke / Barnett H. J. M. // N. Engl. J. Med., 1991. — 325–1261 p.
17. Control trial of aspirin for the prevention of stroke in high-risk patients / Hass W. K. [et al] // N. Engl. J. Med. — 1989. — 321–501 p.

## О радиофобии населения в крупных городах

Мирсагатова Мовлюда Рихситиллаевна, ассистент  
Ташкентская медицинская академия (Узбекистан)

*С целью оценки степени необходимости мероприятий по обеспечению радиационной безопасности населения при эксплуатации источников ионизирующих излучений (ИИИ) в лечебно-профилактических учреждениях (ЛПУ) г. Ташкента в зоне размещения 6 крупных ЛПУ, использующих ИИИ, проведены замеры мощности дозы гамма-излучения, которые сопоставлены с величиной гамма-фона города. Для выявления фактора радиофобии проведен опрос-интервьюирование двух групп взрослого населения. Выявлено, что использование ИИИ в ЛПУ не влияет на величину гамма-фона в местах проживания населения, не представляет никакой опасности и не требует проведения специальных защитных мероприятий. У части населения города имеет место радиофобия, которая обусловлена низким уровнем радиационно-гигиенической грамотности населения и отсутствием информированности населения о радиационной обстановке как в целом по городу, так и в зоне расположения ЛПУ.*

Ионизирующие излучения относятся к числу факторов, обладающих выраженным биологическим действием. Эти излучения сопровождали большой взрыв, с которого началось существование нашей Вселенной около 20 млрд лет назад. С того времени радиация постоянно наполняет космическое пространство и даже само зарождение жизни на Земле происходило в присутствии радиационного фона окружающей среды.

Открытие ионизирующих излучений (ИИ) и овладение энергией атомного ядра вовлекло огромные контингенты людей в сферу контактов с ионизирующим излучением, что существенно увеличило риск возможного негативного воздействия на человека ионизирующей радиации.

В соответствии с Законом РУз «О радиационной безопасности» [1] «Граждане имеют право на... полную и объективную информацию о радиационном состоянии окружающей среды..., а также о дозах полученного ими облучения». В условиях широкого использования источников ионизирующих излучений (ИИИ) это положение имеет большое значение, так как значимость ИИИ для радиационной безопасности не всегда правильно оценивается населением в связи с недостатком информации. В результате среди населения может иметь место аггравация степени опасности в связи с близостью объектов, использующих ИИИ.

В Республике Узбекистан радиационная настороженность населения чаще всего обусловлена недостаточной информацией об использовании ИИИ в лечебно-профилактических учреждениях (ЛПУ). И это не случайно, так как основная часть ИИИ в РУз действительно используется в ЛПУ. По данным различных исследований, использование таких источников не создает опасности для населения [2, 3, 4, 5]. Однако в республике не проводится систематический анализ радиационной обстановки в зонах дислокации соответствующих ЛПУ, не ведется анализ ее значимости для формирования доз облучения населения, не проводится информация населения о радиационной обстановке на территории республики. Это создает условия для возникновения радиофобии среди

населения, обоснованность которой вызывает большие сомнения.

Указанные обстоятельства явились основанием для проведения настоящей работы.

**Целью** исследования явилась оценка степени необходимости мероприятий по обеспечению радиационной безопасности населения при эксплуатации источников ионизирующих излучений в ЛПУ г. Ташкента.

**Объекты и методы исследования.** На основе анализа материалов Ташкентского городского Центра Государственного санитарно-эпидемиологического надзора (ЦГСЭН) выявлены лечебно-профилактические учреждения, которые используют наиболее мощные ИИИ или наибольшее их количество. К числу таких объектов отнесены 3 онкологических учреждения и 3 научных Центра, дислоцированных в г. Ташкенте: Республиканский онкологический научный центр (РОНЦ), Городской онкологический диспансер (ГОД), Областной онкодиспансер (ОблОД), Республиканский научно-исследовательский институт эндокринологии (РНИИЭ), Республиканский научно-исследовательский институт травматологии и ортопедии (РНИИТО), Республиканский центр экстренной медицинской помощи (РЦЭМП). В зоне размещения указанных объектов намечены точки для проведения замеров мощности дозы гамма-излучения: в зоне размещения ИИИ — в соответствующей проекции на территории ЛПУ, на границе территории, на расстоянии 50, 100 м от территории и на территории ближайших жилых массивов или улиц с жилыми домами. Инструментальные исследования проведены в каждой точке двумя видами приборов: приборами ДРГ-107Ц (мр/ч) и ДКС — АТ 11—21; последний прибор прошел Госповерку в 2013 году.

Для выявления фактора радиофобии был проведен опрос-интервьюирование двух групп взрослого населения, проживающего в зоне расположения одного из наиболее значимых объектов наблюдения — РОНЦ. В первую группу лиц (18 человек) вошли технические работники РОНЦ (сторожа, санитарки, дворники, сантехники и т. д.), проживающие в близлежащем жилом массиве и знающие,

что в РОНЦ применяются ИИИ; во вторую группу (15 человек) вошли лица, проживающие на этом же массиве, но не знающие об использовании ИИИ в соседнем РОНЦ. Учитывая тот факт, что целенаправленный опрос-анкетирование вызовет ненужную настороженность населения в отношении негативного влияния радиационного фактора, мы отказались от традиционного заполнения опросных анкет. Опрос людей проведен путем непосредственного интервьюирования с исключением вопросов, напрямую связанных с возможной опасностью для них ИИИ. Оформление результатов опроса проводили непосредственно после беседы, но без участия опрошенных.

**Результаты исследования и их обсуждение.** Перед началом замеров нами были собраны данные о состоянии естественного гамма-фона на территории города Ташкента в современных условиях, так как одной из задач была оценка значимости ИИИ, используемых в ЛПУ, для величины гамма-фона. Кроме того, методом визуальных исследований фиксировались временные интервалы наибольшей нагрузки ИИИ.

Результаты проведенных измерений мощности дозы радиации на территории объектов наблюдения в непосредственной близости от мест размещения источников ионизирующих излучений в 5 из 6 случаев показали, что в период наибольшей нагрузки ИИИ рядом с помещениями в зоне проекции источников мощность дозы излучения достоверно выше, чем на остальной территории. Так, на территории РОНЦ рядом с рентгено-радиологическим корпусом эта доза составила 0,19 мкЗв/час, а на остальной территории — 0,16 мкЗв/час, в ГОД и в ОблОД эти дозы составили, соответственно, 0,19 и 0,15 мкЗв/час, в РНИИЭ — 0,18 и 0,14 мкЗв/час, в РНИИТО — 0,18 и 0,16 мкЗв/час, в РНЦЭМП — 0,18 и 0,17 мкЗв/час. Однако уже на расстоянии 50 м от зданий, в которых размещены ИИИ, ни в одном случае не установлено превышение мощности дозы над фоновой величиной. Соответственно, не выявлено никакого влияния ЛПУ на фоновые показатели на расстоянии 100 м и на территории ближайших жилых массивов. В этих условиях работники РОНЦ (не относящиеся к категории А «Персонал») получают годовые дозы внешнего облучения 1,22–1,43 мЗв/год, что

соответствует внешнему фоновому облучению населения г. Ташкента и обеспечивает относительную степень радиационной безопасности населения в соответствии с НРБ-2006. Это говорит о том, что никаких защитных мероприятий при использовании ИИИ в ЛПУ проводить не нужно.

Безопасность для населения ИИИ, используемых в исследованных ЛПУ, подтверждается и результатами опроса-интервьюирования двух групп населения. Опрос лиц, которые знают о том, что в РОНЦ используется облучение больных, выявил тот факт, что среди этих лиц имеет место 100% настороженность в отношении опасности источников излучения для населения. Однако интервьюирование второй группы лиц, которым намеренно не задавался вопрос об использовании в РОНЦ источников излучения, показал, что, несмотря на достаточно длительное (не менее 6 лет) проживание этих людей рядом с РОНЦ, они не назвали ни одной жалобы, которая свидетельствовала бы о негативном влиянии ИИИ на показатели здоровья и самочувствие опрошенных: жалобы предъявляли в основном пожилые люди, и большая часть этих жалоб связана с повышением артериального давления.

#### **Выводы:**

1. Использование ИИИ в ЛПУ, даже при их достаточно большой мощности (онкологические учреждения) не влияет на величину гамма-фона в местах проживания населения, не представляет никакой опасности для населения и не требует проведения специальных защитных мероприятий.

2. У части населения города имеет место радиофобия, которая обусловлена с одной стороны низким уровнем радиационно-гигиенической грамотности населения, а с другой стороны — отсутствием информированности населения о радиационной обстановке как в целом по городу, так и в зоне расположения ЛПУ.

3. Необходимо усиление санитарно-просветительной работы и организации информации населения о радиационной обстановке в городе. Предлагается организация цикла телепередач с разъяснением особенностей биологического действия ионизирующих излучений, их источников, использовании в ЛПУ и отсутствии их влияния на мощность дозы гамма-фона города.

#### **Литература:**

1. Закон РУз «О радиационной безопасности» 31.08.2000 г. № 120
2. Международный Чернобыльский проект. Оценка радиологических последствий и защитных мер. Доклад Международного консультативного комитета. — М., 1991, — 72 с.
3. Наркевич, Б. Я. Костылев В. А. Левчук А. В. Радиационная безопасность в медицинской радиологии. Часть 1. Проектные и организационные аспекты радиологических технологий. //Мед радиология и радиационная безопасность. — 2009, 54. — № 2. — с. 5–17
4. Терновой, С. Сеницын В. Новые технологии лучевой диагностики// Врач. — 2005. — № 4. — с. 28–32
5. Харченко, В. П. Рожкова Н. И. Состояние и перспективы развития рентгенорадиологической службы России.// Вопр. онкологии. — 2009, 55. — № 4. — с. 416–423.

## Функционирование клиничко-психологической реабилитации у пациенток с посттравматическим стрессовым расстройством

Хабарова Татьяна Юрьевна, кандидат психологических наук, доцент;  
Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой  
Воронежский государственный медицинский университет имени Н. Н. Бурденко

*Статья посвящена актуальной медико-социальной проблеме современности — посттравматическому стрессовому расстройству (ПТСР). Проведено диагностическое исследование пациенток с гинекологическими расстройствами и ПТСР. Особое внимание уделено рассмотрению роли психологических расстройств в формировании социальной декомпенсации личности. Предлагаются рациональные методы психологической коррекции. Анализ собственного опыта работы в женской консультации БУЗ ВО «Воронежская городская поликлиника № 10» позволил систематизировать собственные имеющиеся наблюдения с учетом данных литературы, что может представлять интерес как для практических психологов, психотерапевтов, социальных работников, так и для широкого круга общественности.*

**Ключевые слова:** гинекологическая патология, депрессия, личностные особенности, посттравматическое стрессовое расстройство (ПТСР), тревожность

**Актуальность.** Эффективность функционирования системы реабилитации пациенток с гинекологической патологией и ПТСР, планирующих беременность, остается низкой [1, 2, 3, 4, 5, 7]. Предполагается, что психологическое сопровождение гинекологическим пациенткам с ПТСР будет эффективным и оправданным, если психологическая помощь женщинам, планирующим беременность, будет оказываться на начальном этапе их реабилитации — до наступления беременности; а в работе будут использованы комплексные адаптированные технологии и методы оказания психотерапевтической помощи. Выделенная нами проблема наиболее полно нашла свое отражение в фундаментальных трудах [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15].

**Материал и методы исследования.** Объектами исследования являлись пациентки гинекологического профиля, планирующие беременность, имеющие выраженные симптомы ПТСР. Выборка исследования составила 60 пациенток с различным уровнем депрессии и тревожности. Критерием отнесения пациенток к определенным группам исследования являлась доля женщин с устойчивым улучшением показателей депрессии и тревожности, то есть снижение уровня депрессии ниже 20 баллов по шкале Бэка и снижение показателя тревожности ниже 31 балла по опроснику Спилберга — Ханина. Исследование проводилось на базе женской консультации БУЗ ВО «Воронежская городская поликлиника № 10». Использовались следующие методики: структурированное клиническое диагностическое интервью — СКДИ и клиническая диагностическая шкала; шкала для клинической диагностики ПТСР; методика Спилберга — Ханина; методика Бека; методика «Дополнение незаконченных предложений» [6, 11, 12, 13]. Проверка достоверности различий между эмпирическими данными осуществлялась при помощи критерия \* Фишера (угловое преобразование Фишера) [1, 6, 15].

**Полученные результаты и их обсуждение.** Выборка пациенток для исследования в 1-ой группе состояла из женщин с высшим (70%) и средним специальным образованием (30%). Давность утраты на момент участия испытуемых в исследовании составляла от 1,5 месяцев до 17 лет (в среднем —  $17 \pm 1,2$  лет). Наличие психологических травм в анамнезе до потери ребенка обнаружилось у 14 испытуемых (50%). Очевидно, что по заданным параметрам выборка была несколько неоднородной, однако и на этом материале удалось получить важные данные. Выборка пациенток для исследования во 2-ой (контрольной) группе состояла из женщин с высшим (54%) и средним специальным образованием (46%). Наличие психологических травм в анамнезе на момент обследования у испытуемых женщин не обнаружилось. Но были выявлены признаки, характеризующие состояние эмоциональной подавленности, волевой угнетенности и личностного дискомфорта.

Интерпретируя данные пациенток из 1-ой группы, полученные в ходе беседы и формализованной диагностики, мы учитывали, что никто из испытуемых до момента обращения в женскую консультацию не получал систематической психологической помощи в связи с пережитой потерей ребенка. В единичных случаях, когда попытки обращения к специалистам все же предпринимались, соответствующий опыт был очень непродолжительным и оставил, по словам женщин, весьма неоднозначные впечатления. Характерно, что все обследованные испытывали явную потребность делиться своими переживаниями и активно описывали их как в процессе беседы, так и при заполнении бланковых методик-опросников, однако почти никто не выражал желания получить консультативную или психотерапевтическую помощь («это ничего не изменит, с этим придется учиться жить»). Учитывая это и стремясь сделать процесс исследования наиболее экологичным, мы предоставляли каждой женщине неограниченную возможность рефлексии и обсуждения своего состояния во время и после окончания ди-

агностического процесса. Диагностические исследования в обеих группах проводились дважды — до работы с пациентками психотерапевтическими методиками и после них.

В классических исследованиях психических расстройств у людей, потерявших ребенка, обнаружено, что у данной категории переживающих депрессивная симптоматика выступает на первый план. Клинически выраженные депрессивные состояния сохраняются в течение года примерно у 15–20% пациентов, потерявших детей. Если депрессия протекает с психотическими симптомами, то на высоте приступа вероятно возникновение сверхценных или бредовых идей самообвинения.

У женщин феноменология самообвинения согласуется и со структурой депрессивных переживаний, в которой преобладает когнитивная составляющая. Следует учитывать и повышенную тревожность пострадавших женского пола, которая может носить фоновый характер или выступать на первый план, определяя всю картину прохождения пути ПТСР, что подтверждают данные представленные в табл. № 1. При потере ребенка реакция на стрессовую ситуацию протекает особенно остро. Чувства вины, отчаяния, беспомощности достигают пиковой интенсивности, приобретая характер всепоглощающего аффекта.

**Таблица 1. Сравнительный анализ средних значений показателей тревожности до и после работы с испытуемыми терапевтическими методиками (по опроснику Спилберга-Ханина)**

Суммарный бал по всем уровням тревожности (Реактивная тревожность (РТ) +личностная тревожность (ЛТ))	До работы с испытуемыми	После работы с испытуемыми
Низкий уровень тревожности (до 30 баллов). Общие показатели по РТ и ЛТ	0,3	0,5
Средний уровень тревожности (от 31 до 45 баллов)	0,3	0,2
Высокий уровень тревожности (от 46 баллов и выше)	0,4	0,3

Полученное эмпирическое значение  $\varphi^*$  соответствует  $\varphi^*_{эмп} = 2,0524$ ,  $p = 0,05$  и находится в зоне статистической значимости, то есть можно утверждать, что применение батареи методик № 3 в группе из 30 пациенток с ПТСР эффективно и составляет 26,1% улучшений.

Полученное эмпирическое значение  $\varphi^*$  соответствует  $\varphi^*_{эмп} = 2,6872$ ,  $p = 0,01$  и находится в зоне значимости, то есть со статистической достоверностью можно утверждать, что применение батареи методик № 2 в группе из 30 пациенток с ПТСР наиболее эффективно по сравнению с другими батареями методик и составляет 34% улучшений.

Расшифровка батарей методик: батарея методик № 1; когнитивная терапия Бека; батарея методик № 2: метод ДПДГ; когнитивная терапия Бека.

Анализ клинического интервью, беседы позволил нам получить и другие данные, характеризующие роль трудового и образовательного статуса испытуемых. Так, работающие испытуемые продемонстрировали более тяжелое течение ПТСР (особенно в части симптомов вторжения) по сравнению со студентками и работающими женщинами. Представители высокообразованной части выборки в целом переживали потерю менее остро и находили, по-видимому, более эффективные способы совладания, однако им чаще доводилось переживать депрессивные состояния различной степени тяжести. Вовлеченность в трудовую деятельность и наличие высокого образовательного уровня, по-видимому, в определенной мере способствуют конструктивному отреагированию травматических переживаний. Не случайно самые низкие показатели по шкале тревожности Спилберга — Ханина зафиксированы именно у работающих и обладающих высшим образованием; им же присуща наибольшая

сохранность функции сна, способности восстанавливаться за время ночного отдыха.

Известно, что одним из наиболее тяжелых нарушений психического здоровья, способных развиваться в данном случае, является депрессия. Следует обратить внимание на высокий процент женщин (60%), имеющих высокий суммарный бал по всем категориям шкалы депрессивных симптомов, что подтверждают эмпирические исследования, представленные в табл. № 2. Со временем соответствующие симптомы обнаруживают тенденцию к сглаживанию, однако они могут проявиться вновь спустя годы после утраты и явиться препятствием для наступления новой беременности.

Полученное эмпирическое значение  $\varphi^*$  соответствует  $\varphi^*_{эмп} = 1,3950$ , и находится в зоне незначимости, то есть со статистической достоверностью можно утверждать, что применение батареи методик № 3 в группе из 30 пациенток с признаками депрессии неэффективно и составляет 17% улучшений.

Полученное эмпирическое значение  $\varphi^*$  соответствует  $\varphi^*_{эмп} = 1,9969$ ,  $p = 0,1$  и находится в зоне незначимости, то есть со статистической достоверностью можно утверждать, что применение батареи методик № 4 в группе из 30 пациенток с признаками депрессии малоэффективно и составляет 23,5% улучшений.

Расшифровка батарей методик:

Батарея методик № 3: эмпатийное слушание; техника фиксации травмирующих переживаний в форме рисунка, метафоры;

Батарея методик № 4: эмпатийное слушание; техника фиксации травмирующих переживаний в форме рисунка, метафоры; групповая терапия; методы релаксации.

Таблица 2. Сравнительный анализ средних значений показателей до и после работы с испытуемыми терапевтическими методиками (по шкале депрессии Бека)

Суммарный бал по всем категориям шкалы депрессивных симптомов	До работы	После работы
0–9 отсутствие депрессивных симптомов	0	0,4
10–15 легкая депрессия	0	0,3
16–19 умеренная депрессия	0,2 — с проявлением соматических проявлений депрессии	0,2
20–29 выраженная депрессия	0,6 — с преобладанием когнитивно-аффективных проявлений депрессии	0,1
30–63 тяжелая депрессия	0,2 — с преобладанием когнитивно-аффективных и соматических проявлений депрессии	0

**Выводы.** У большинства испытуемых с диагнозом бесплодие, переживших потерю ребенка, диагностируется недостаточная интеграция идентичности, низкий уровень самореализации, внутренняя конфликтность и опустошенность, что приводит к блокаде ценностно-смысловых образований в мотивационно-личностной сфере (48%). Низкая самооценка и внешний локус контроля приводят к пассивной жизненной позиции (54%). Присутствие ряда признаков, свидетельствующих о наличии психологического эквивалента депрессивного состояния, позволяет диагностировать у пациенток маскированную депрессию, проявляющуюся соматическим заболеванием (67%).

1. Различия в результатах количественных и качественных методов объясняются тем, что пациентки не осознают многие проблемы в своей жизни. Соматическое заболевание является эквивалентом психологической проблемы, которая не представлена в плане сознания и проявляется лишь в проективных тестах. Это обеспечивают такие механизмы психологической защиты, как вытеснение и уход в болезнь (34%).

2. Результаты проведенного исследования свидетельствуют о том, что большинство испытуемых 1-ой группы имеют пограничную личностную организацию. Об этом свидетельствуют такие показатели, как диффузная идентичность, использование примитивных механизмов психологической защиты (расщепление, отрицание, проективная идентификация, примитивная идеализация) и снижение тестирования реальности, ре-

зультатом чего являются патология в сфере объектных отношений, манипулятивные стратегии поведения, склонность к депрессивным состояниям при потере объекта (в нашем случае ребенка). При этом имеется достаточно интегрированное Супер-Эго, на что указывают чрезвычайно сильное переживание чувства вины и депрессивное настроение (67%).

3. Большинство испытуемых имеет конфликтный смысл болезни. Заболевание не позволяет иметь желанного ребёнка, быть рядом с любимыми людьми, заниматься какой-либо деятельностью (79%).

Итак, не имея статистических оснований для убедительного описания динамического аспекта переживания потери ребенка, мы можем утверждать о структурных закономерностях, связывающих определенные составляющие ПТСР с биографическими характеристиками испытуемых женщин. В целом же, сопоставляя феноменологию течения ПТСР наших испытуемых с литературными данными, можно отметить ее сходство с ПТСР тревожного типа — 5 человек (20%), с ПТСР астенического типа — 7 человек (28%), с ПТСР соматоформного типа 15 человек (60%) по В. М. Волошину [1, 3] и нетиповой клинической картиной ПТСР по А. В. Андриященко [1, 3].

4. Основываясь на полученных эмпирических значениях  $\Phi^*_{эмп}$ , которые соответствуют разному уровню значения  $r$ , статистически достоверно можно утверждать об эффективности применения только комбинированных психотерапевтических методик по отношению к пациенткам с ПТСР.

#### Литература:

1. Андриященко, А. В. К построению модели ПТСР при ситуациях утраты объекта экстраординарной значимости / А. В. Андриященко // Съезд психиатров России, 13-й: Матер. М., 2000. — с. 45–51.
2. Психосоматические заболевания: полный справочник / Е. В. Бочанова [и др.] // под ред. Ю. Ю. Елисеева. М.: Эксмо, 2003. — с. 486.
3. Волошин, В. М. Типология хронического посттравматического стрессового расстройства / В. М. Волошин // Журнал неврологии и психиатрии им. С. С. Корсакова. — 2004. — № 1. — с. 17–23.
4. Особенности психотерапии посттравматического стресса / Е. С. Калмыкова [и др.] // Психологический журнал. — 2001. — Т. 22. — № 4. — с. 70–80.
5. Карвасарский, Б. Д. Психотерапия / Б. Д. Карвасарский — СПб: Питер, 2000. — с. 289–298.



6. Статистика в медицинских исследованиях. Монография. / В. А. Куташов [и др.] — Воронеж, 2005—200 с.
7. Куташов, В. А. Особенности психоэмоционального состояния женщин в период беременности / В. А. Куташов, Л. С. Немых, А. А. Карпенко // Прикладные информационные аспекты медицины. Воронеж. — 2014. — Т. 17. — № 1. — с. 81—84
8. Куташов, В. А. Помощь лицам с кризисными состояниями и суицидальным поведением. Монография / В. А. Куташов, В. А. Кунин, Л. А. Куташова. — Воронеж, 2013. — 224 с.
9. Куташов, В. А. Современный взгляд на особенности взаимодействий в семьях, где у пациента имеются неврологические или психические расстройства / В. А. Куташов, О. В. Ульянова // Системный анализ и управление в биомедицинских системах. — 2015. — Т. — 14. — № 3. — с. 663—665.
10. Хабарова, Т. Ю. Организация процедуры исследования медико-социально-психологических и неврологических характеристик больных с аффективными расстройствами / Т. Ю. Хабарова, В. А. Куташов, О. В. Ульянова // Системный анализ и управление в биомедицинских системах, 2015 — Т. 14 — № 3. — с. 588—592.
11. Менделевич, В. Д. Клиническая и медицинская психология / Менделевич В. Д. — М: МЕДпресс, 1998. — 324 с.
12. Менделевич, Д. М., Менделевич В. Д. Гинекологическая психиатрия / Д. М. Менделевич, В. Д. Менделевич // Журнал Неврологический вестник. — 1993. — № 1—2. — с. 96—102.
13. Миско, Е. А. Представления о жизненной перспективе у лиц, переживших травматический стресс / Е. А. Миско // Современная психология: состояния и перспектива. Тезисы доклада на юбилейной научной конференции ИП РАН М.: Институт психологии РАН, 2002. — Том 1. — с. 286.
14. Применение классификационно — прогностического моделирования для выявления и анализа значимости индивидуальных факторов риска развития нервно — психических расстройств / А. В. Будневский [и др.] // Журнал «Вестник неврологии, психиатрии и нейрохирургии». Москва, 2016. — № 3. — с. 37—43.
15. Тарабрина, Н. В. Практикум по психологии посттравматического стресса / Н. В. Тарабрина — СПб., 2001. — 272 с.

## Уровень контроля над бронхиальной астмой у детей города Алматы

Чой Светлана Валентиновна, кандидат медицинских наук, доцент;  
 Абдилдаева Лаура Турлыбақызы, врач-резидент;  
 Айторе Алма Нурланқызы, врач-резидент;  
 Бакытбек Мадина, врач-резидент;  
 Дулатбаева Гульсара Раушановна, врач-резидент;  
 Карабалаева Ажар Куанышбековна, врач-резидент  
 Казахский национальный медицинский университет имени С. Д. Асфендиярова

Бронхиальная астма представляет собой глобальную проблему. Согласно обобщенным данным распространенность бронхиальной астмы в разных странах мира колеблется от 1 до 18%. Бронхиальная астма является причиной около 250 тыс. смерти населения. Главной целью лечения больных бронхиальной астмой является достижение и поддержание контроля над заболеванием. На сегодняшний день астма контролируется полностью лишь у 5% больных [1, 2].

**Цель исследования:** определение уровня контроля над бронхиальной астмой у детей г. Алматы.

### Задачи исследования:

1. Проанализировать истории болезни детей с бронхиальной астмой для описания медико-демографического профиля.
2. Определить уровень контроля над бронхиальной астмой у детей г. Алматы.
3. Проанализировать обеспеченность детей с бронхиальной астмой г. Алматы средствами контроля (пикфлоуметрами).

### Материалы и методы:

Был проведен ретроспективный анализ 260 историй пациентов, находившихся в отделении аллергодерматологии за октябрь, ноябрь, декабрь 2015 года. Из них было отобрано 53 истории болезни детей с бронхиальной астмой. Полученные данные (жалобы, анамнез, результаты клинического и лабораторно-инструментального обследования) заносились в созданную электронную базу данных на основе программы Microsoft Excel. Отобранные дети были проанкетированы по телефону с помощью опросников «Тест по контролю над астмой» (для детей 12 лет и старше) и «Тест по контролю над астмой у детей» (для детей от 4 до 12 лет) с целью определения уровня контроля над бронхиальной астмой и определения обеспеченностью средствами контроля (пикфлоуметрами). «Тест по контролю над астмой у детей» (от 4 до 12 лет) состоит из 7 вопросов: на 4 вопроса отвечает ребенок. Если ребенку трудно самостоятельно прочитать или понять вопрос, ему

помогает родитель, но ответ ребенок должен выбрать сам. И выбирает наиболее подходящий ответ. На оставшиеся три вопроса (с 5-го по 7 — ой) отвечает родитель, при этом ответы ребенка не должны влиять на ответ родителя. Баллы суммируются, если ребенок набрал 19 баллов или меньше, это означает что астма контролируется недостаточно эффективно. Если ребенок набрал 20 баллов и больше, то астму удастся эффективно контролировать.

«Тест по контролю над астмой» (12 лет и старше) состоит из 5 вопросов, ответы на которые представлены в виде пятибалльной оценочной шкалы. Результат тестирования зависит от суммы баллов, набранной пациентом. В каждом вопросе ребенок выбирает ответ, который наиболее ему подходит и обводит соответствующую цифру. Ответы суммируются, если ребенок набирает менее 20 баллов, ему не удастся контролировать астму, от 20 до 24 баллов — астма контролируется не полностью, 25 баллов — астма контролируется.

### Результаты исследования:

При распределении обследованных детей по полу преобладали мальчики — 64,0% и девочки — 36,0% соответственно. При распределении обследованных детей по возрасту преобладали дети 7–11 лет (49,1%) и 12 и старше (23,6%). Среди обследованных больных дети 1–3 года составили 8,2% и 4–6 лет — 7,2%.

Анализ распределения обследованных детей по району проживания позволил установить, что дети с бронхиальной астмой преимущественно поступали из Алатауского (27,0%), Ауэзовского (19,0%) и Бостандыкского районов (15,0%) г. Алматы.

Отягощенную аллергологическую наследственность имели 75,0% обследованных детей: по линии матери — 27,3%, по линии отца — 14,5% и по линии обоих родителей — 15,0%, по линии дедушек и бабушек — 30,9%, других родственников — 2,72%. Отягощение наследственности по БА имели 18,0% обследованных детей. Указанные данные косвенно свидетельствуют о важной роли наследственной предрасположенности в возникновении бронхиальной астмы.

Возникновению бронхиальной астмы у детей предшествовали такие заболевания, как лекарственная аллергия (25,9%), пищевая аллергия (38,8%), аллергия на пыльцу растений (11,8%), аллергия на запахи (7,1%), аллергия на перхоть кошек и собак (4,7%), аллергия на клещи, домашнюю пыль (3,5%), аллергия на плесень (3,5%), аллергия на запах табака (2,4%). Проживание в неблагоприятных условиях (подвал, заводы, ТЭЦ и др.) отмечалось у 12,0% обследованных детей.

У обследованных детей с бронхиальной астмой диагностировалась сопутствующая патология, в основном в виде заболеваний ЛОР-органов (риниты, риносинуситы, гаймориты, хронические тонзиллиты) — 36% в виде ринитов, риносинуситов, хронических тонзиллитов, кист гайморовой пазухи, этмоидитов, острая респираторно ви-

русная инфекция (25,5%), пневмония (3,6%), бронхиты (20,0%).

С практической точки зрения наиболее востребована классификация бронхиальной астмы по степени тяжести заболевания, что очень важно, так как определяет современную стратегию ее терапии [3]. Выделяют 4 степени тяжести болезни: легкая интермиттирующая, легкая персистирующая, среднетяжелая, тяжелая. У обследованных нами детей персистирующая бронхиальная астма средней степени тяжести диагностировалась у 76,0%, тяжелая персистирующая у — 24,0%, а интерметтирующая и персистирующая бронхиальная астма легкой степени не диагностировалась.

Главной целью лечения больных бронхиальной астмой является достижение и поддержание контроля над заболеванием [4]. В результате исследования было установлено, что в возрастной группе детей от 4 до 11 лет у 76,9% больных астма контролируется недостаточно эффективно и только у 23,1% детей астму удается эффективно контролировать. В группе детей старше 12 лет процент детей с полностью контролируемой астмой — 28,6%, частично контролируемая отмечается у 9,5% и у 61,9% больных отмечается неконтролируемая бронхиальная астма.

Пикфлоуметр — это портативный прибор, который служит для измерения пиковой скорости выдоха (ПСВ), т. е. максимальной скорости воздушного потока при форсированном выдохе и позволяет контролировать течение заболевания не только в условиях стационара, но и в домашних условиях. При анкетировании детей с бронхиальной астмой об обеспеченности средствами контроля (пикфлоуметрами) и их использовании в амбулаторных условиях было установлено, что пикфлоуметром пользуются 5,5% обследованных детей, знают, но не пользуются — 54,5% детей с бронхиальной астмой, не знают о приборе 40,0% больных.

Таким образом, в результате проведенного исследования было установлено, что бронхиальная астма чаще диагностируется у мальчиков (36,0%), у детей в возрасте 7–11 лет (49,1%), преимущественно проживающих в Алатауском районе г. Алматы (27,0%). **Отягощенную аллергологическую наследственность имели 75,0% обследованных детей с бронхиальной астмой.** Неконтролируемая бронхиальная астма встречается у 61,9% детей до 12 лет и 76,9% обследованных детей в возрасте 12 лет и старше. Пикфлоуметрию для контроля над заболеванием используют всего 5,5% обследованных детей с бронхиальной астмой. Полученные результаты исследования диктуют необходимость расширения популяризации знаний о бронхиальной астме среди детей с БА и их родителей. Что позволяет рекомендовать проведение «Астма школы» не только в условиях стационара, но и на уровне первичной медико-санитарной помощи с целью повышения информированности детей с бронхиальной астмой и их родителей о применении средств контроля (пикфлоуметров) и применении анкет «Тест по контролю над астмой» и «Тест по контролю над астмой у детей» в амбулаторных условиях.

Литература:

1. Desfougeres, J. L. Has asthma control improved since AIRE? // Results of a survey in 5 European countries: Abstract presented within oral presentation session «Towards controlling severe asthma» at ERS congress on 17 September 2007.
2. Reddel, H. K. European Respiratory Society Statement: asthma control and exacerbations standardizing endpoints for clinical asthma trials and clinical practice // *Am. J. Respir. Crit. Care Med.* — 2009. — Vol. 180. — P. 59–99.
3. Аллергология и иммунология / под ред. А. А. Баранова и Р. М. Хаитова: Союз педиатров России. — 2-е изд., испр. и доп. — М., 2010. — 252 с.
4. Глобальная стратегия лечения и профилактики бронхиальной астмы — Global Initiative for Asthma. — 2014. — с. 73.

# Молодой ученый

Международный научный журнал  
Выходит два раза в месяц

№ 13 (117) / 2016

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

**Главный редактор:**

Ахметов И. Г.

**Члены редакционной коллегии:**

Ахметова М. Н.  
Иванова Ю. В.  
Каленский А. В.  
Куташов В. А.  
Лактионов К. С.  
Сараева Н. М.  
Абдрасилов Т. К.  
Авдеюк О. А.  
Айдаров О. Т.  
Алиева Т. И.  
Ахметова В. В.  
Брезгин В. С.  
Данилов О. Е.  
Дёмин А. В.  
Дядюн К. В.  
Желнова К. В.  
Жуйкова Т. П.  
Жураев Х. О.  
Игнатова М. А.  
Калдыбай К. К.  
Кенесов А. А.  
Коварда В. В.  
Комогорцев М. Г.  
Котляров А. В.  
Кузьмина В. М.  
Кучерявенко С. А.  
Лескова Е. В.  
Макеева И. А.  
Матвиенко Е. В.  
Матроскина Т. В.  
Матусевич М. С.  
Мусаева У. А.  
Насимов М. О.  
Паридинова Б. Ж.  
Прончев Г. Б.  
Семахин А. М.  
Сенцов А. Э.  
Сенюшкин Н. С.  
Титова Е. И.  
Ткаченко И. Г.

Фозилов С. Ф.

Яхина А. С.

Ячинова С. Н.

**Международный редакционный совет:**

Айрян З. Г. (Армения)  
Арошидзе П. Л. (Грузия)  
Атаев З. В. (Россия)  
Ахмеденов К. М. (Казахстан)  
Бидова Б. Б. (Россия)  
Борисов В. В. (Украина)  
Велковска Г. Ц. (Болгария)  
Гайич Т. (Сербия)  
Данатаров А. (Туркменистан)  
Данилов А. М. (Россия)  
Демидов А. А. (Россия)  
Досманбетова З. Р. (Казахстан)  
Ешиев А. М. (Кыргызстан)  
Жолдошев С. Т. (Кыргызстан)  
Игисинов Н. С. (Казахстан)  
Кадыров К. Б. (Узбекистан)  
Кайгородов И. Б. (Бразилия)  
Каленский А. В. (Россия)  
Козырева О. А. (Россия)  
Колпак Е. П. (Россия)  
Куташов В. А. (Россия)  
Лю Цзюань (Китай)  
Малес Л. В. (Украина)  
Нагервадзе М. А. (Грузия)  
Прокопьев Н. Я. (Россия)  
Прокофьева М. А. (Казахстан)  
Рахматуллин Р. Ю. (Россия)  
Ребезов М. Б. (Россия)  
Сорока Ю. Г. (Украина)  
Узаков Г. Н. (Узбекистан)  
Хоналиев Н. Х. (Таджикистан)  
Хоссейни А. (Иран)  
Шарипов А. К. (Казахстан)

**Руководитель редакционного отдела:** Кайнова Г. А.

**Ответственные редакторы:** Осянина Е. И., Вейса Л. Н.

**Художник:** Шишков Е. А.

**Верстка:** Бурьянов П. Я., Голубцов М. В., Майер О. В.

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются.

За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы.

Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.

При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Материалы публикуются в авторской редакции.

**АДРЕС РЕДАКЦИИ:**

**почтовый:** 420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231;

**фактический:** 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, д. 25.

E-mail: [info@moluch.ru](mailto:info@moluch.ru); <http://www.moluch.ru/>

**Учредитель и издатель:**

ООО «Издательство Молодой ученый»

ISSN 2072-0297

Подписано в печать 27.07.2016. Тираж 500 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», 420029, г. Казань, ул. Академика Кирпичникова, 25