

МОЛОДОЙ

ISSN 2072-0297

УЧЁНЫЙ

научный журнал

Man, being the servant and interpreter of Nature, can do and understand so much and so much only as he has observed in fact or in thought of the works of nature. Beyond this he neither knows anything nor can do anything.



11
2015
Часть I

ISSN 2072-0297

Молодой учёный

Научный журнал

Выходит два раза в месяц

№ 11 (91) / 2015

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор: Ахметова Галия Дуфаровна, доктор филологических наук

Члены редакционной коллегии:

Ахметова Мария Николаевна, доктор педагогических наук

Иванова Юлия Валентиновна, доктор философских наук

Каленский Александр Васильевич, доктор физико-математических наук

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук

Лактионов Константин Станиславович, доктор биологических наук

Сараева Надежда Михайловна, доктор психологических наук

Авдеюк Оксана Алексеевна, кандидат технических наук

Айдаров Оразхан Турсункожаевич, кандидат географических наук

Алиева Тарана Ибрагим кызы, кандидат химических наук

Ахметова Валерия Валерьевна, кандидат медицинских наук

Брезгин Вячеслав Сергеевич, кандидат экономических наук

Данилов Олег Евгеньевич, кандидат педагогических наук

Дёмин Александр Викторович, кандидат биологических наук

Дядюн Кристина Владимировна, кандидат юридических наук

Желнова Кристина Владимировна, кандидат экономических наук

Жуйкова Тамара Павловна, кандидат педагогических наук

Игнатова Мария Александровна, кандидат искусствоведения

Коварда Владимир Васильевич, кандидат физико-математических наук

Комогорцев Максим Геннадьевич, кандидат технических наук

Котляров Алексей Васильевич, кандидат геолого-минералогических наук

Кузьмина Виолетта Михайловна, кандидат исторических наук, кандидат психологических наук

Кучерявенко Светлана Алексеевна, кандидат экономических наук

Лескова Екатерина Викторовна, кандидат физико-математических наук

Макеева Ирина Александровна, кандидат педагогических наук

Матроскина Татьяна Викторовна, кандидат экономических наук

Мусаева Ума Алиевна, кандидат технических наук

Насимов Мурат Орленбаевич, кандидат политических наук

Прончев Геннадий Борисович, кандидат физико-математических наук

Семахин Андрей Михайлович, кандидат технических наук

Сенюшкин Николай Сергеевич, кандидат технических наук

Ткаченко Ирина Георгиевна, кандидат филологических наук

Яхина Асия Сергеевна, кандидат технических наук

На обложке изображен Фрэнсис Бэкон (1561–1626) — английский философ, историк, политик, основоположник эмпиризма.

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются. За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы. Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов. При перепечатке ссылка на журнал обязательна. Материалы публикуются в авторской редакции.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231. E-mail: info@moluch.ru; http://www.moluch.ru/.

Учредитель и издатель: ООО «Издательство Молодой ученый»

Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», г. Казань, ул. Академика Арбузова, д. 4

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-38059 от 11 ноября 2009 г.

Журнал входит в систему РИНЦ (Российский индекс научного цитирования) на платформе elibrary.ru.

Журнал включен в международный каталог периодических изданий «Ulrich's Periodicals Directory».

Ответственные редакторы:

Кайнова Галина Анатольевна

Осянина Екатерина Игоревна

Международный редакционный совет:

Айрян Заруи Геворковна, кандидат филологических наук, доцент (Армения)

Арошидзе Паата Леонидович, доктор экономических наук, ассоциированный профессор (Грузия)

Атаев Загир Вагитович, кандидат географических наук, профессор (Россия)

Борисов Вячеслав Викторович, доктор педагогических наук, профессор (Украина)

Велковска Гена Цветкова, доктор экономических наук, доцент (Болгария)

Гайич Тамара, доктор экономических наук (Сербия)

Данатаров Агахан, кандидат технических наук (Туркменистан)

Данилов Александр Максимович, доктор технических наук, профессор (Россия)

Досманбетова Зейнегуль Рамазановна, доктор философии (PhD) по филологическим наукам (Казахстан)

Ешиев Абдыракман Молдоалиевич, доктор медицинских наук, доцент, зав. отделением (Кыргызстан)

Игисинов Нурбек Сагинбекович, доктор медицинских наук, профессор (Казахстан)

Кадыров Кутлуг-Бек Бекмуратович, кандидат педагогических наук, заместитель директора (Узбекистан)

Кайгородов Иван Борисович, кандидат физико-математических наук (Бразилия)

Каленский Александр Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор (Россия)

Козырева Ольга Анатольевна, кандидат педагогических наук, доцент (Россия)

Куташов Вячеслав Анатольевич, доктор медицинских наук, профессор (Россия)

Лю Цзюань, доктор филологических наук, профессор (Китай)

Малес Людмила Владимировна, доктор социологических наук, доцент (Украина)

Нагервадзе Марина Алиевна, доктор биологических наук, профессор (Грузия)

Нурмамедли Фазиль Алигусейн оглы, кандидат геолого-минералогических наук (Азербайджан)

Прокопьев Николай Яковлевич, доктор медицинских наук, профессор (Россия)

Прокофьева Марина Анатольевна, кандидат педагогических наук, доцент (Казахстан)

Ребезов Максим Борисович, доктор сельскохозяйственных наук, профессор (Россия)

Сорока Юлия Георгиевна, доктор социологических наук, доцент (Украина)

Узаков Гулом Норбоевич, кандидат технических наук, доцент (Узбекистан)

Хоналиев Назарали Хоналиевич, доктор экономических наук, старший научный сотрудник (Таджикистан)

Хоссейни Амир, доктор филологических наук (Иран)

Шарипов Аскар Калиевич, доктор экономических наук, доцент (Казахстан)

Художник: Шишков Евгений Анатольевич

Верстка: Бурьянов Павел Яковлевич

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

<p>Алиев С. Д., Намазов Ф. М., Алиева А. Г. О методике применения теоремы о пределе последовательности1</p> <p>Алишев А. Г., Холбеков А., Камолова А. П. Построение асимптотических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа 4</p> <p>Белорусов А. И. Интеграция информационных систем на основе стандартов XML и WEB-сервисов в сфере закупок 9</p> <p>Бодякин Е. В. Разработка элементов автоматизации сейсмического микрорайонирования с использованием ГИС технологий15</p> <p>Варыгина М. П. Вычислительный алгоритм для численного моделирования микрополярных упругих ортотропных стержней.....19</p> <p>Вогоровский Р. В. Организация взаимодействия с измерительным оборудованием при проведении испытаний бортовой аппаратуры КА22</p> <p>Вяткин А. В., Корниенко В. С. Математическое моделирование процессов формирования устойчивых образований из частиц с магнитным дипольным моментом 27</p> <p>Горохов А. А. Анализ уравнения, описывающего динамическое деформирование в слое микроразрушенной среды35</p>	<p>Ершов А. Е. Оптодинамические эффекты в системах связанных плазмонных наночастиц и их проявление в спектрах плазмонного поглощения.....39</p> <p>Ефремов А. А. Проблемы вычислений с высокой точностью при использовании графических ускорителей NVIDIA.....45</p> <p>Козлова С. В. Исследование термодиффузионного разделения многокомпонентных смесей в цилиндрической колонне49</p> <p>Колдырев А. Ю. Дифференциация учебного процесса на основе алгоритма классификации.....56</p> <p>Колпак Е. П., Горыня Е. В. Математические модели «ухода» от конкуренции.....59</p> <p>Компаниец Л. А., Липина О. А., Корсакова П. А. Анализ натуральных измерений на озере Шира в летний период 2013–2014 гг. 70</p> <p>Краснов А. А. Моделирование ударных волн сжатия в пористых металлах.....75</p> <p>Кулясов Н. В. Система распознавания интернет угроз по журналам веб-сервисов79</p> <p>Магденко Р. П., Гилева Л. В. Решение трехмерного уравнения Пуассона с использованием трикватратных эрмитовых конечных элементов83</p> <p>Метус А. М. Актуальные задачи комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории.....89</p>
---	--

Новиков А. Е.

Расчет дифференциальных уравнений химической кинетики модифицированным методом Ческино92

Пащенко З. Д., Шажко С. П.

Классификация линейных однородных систем дифференциальных уравнений с помощью жордановой нормальной формы99

Рыбков М. В.

Алгоритм интегрирования с переменным числом стадий для решения умеренно жестких задач..... 101

Смолехо И. В.

Параллельная реализация алгоритма для описания термоупругих волн в жидких кристаллах 107

Старева И. А., Еременко В. Р.

Математическое моделирование коррупционных систем и процессов (обзор)..... 113

Ченцов Е. П.

Использование дискретных моделей для исследования резонанса в сплошных средах..... 120

Шефер И. А.

Об устойчивости неизотермического микроконвективного течения в вертикальном канале 125

МАТЕМАТИКА

О методике применения теоремы о пределе последовательности

Алиев Самед Джахангир оглы, кандидат физико-математических наук, доцент;

Намазов Ф. М.

Бакинский государственный университет (Азербайджан)

Алиева А. Г.

Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (г. Баку)

В этой работе дается ряд примеров, изложение которых подчеркивает значимость теоремы Вейерштрасса о пределе последовательности.

Как известно, уравнения типа

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} = a, \tag{1}$$

где $a > 0$ — некоторое вещественное число, решаются следующим образом: возведя в квадрат обе части равенства (1), получим

$$x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}} = a^2.$$

Так как второе слагаемое совпадает с левой частью исходного уравнения, то

$$x + a = a^2.$$

Отсюда, находим единственное решение уравнения (1):

$$x = a^2 - a.$$

Пользуясь некоторыми понятиями начал анализа, решим уравнение (1) иным способом. Для этого, сначала, рассмотрим последовательность (x_n) , где

$$x_n = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_n, \quad x > 0.$$

Докажем, что последовательность (x_n) монотонна и ограничена. В курсе алгебры и начал анализа учащиеся знакомятся с теоремой Вейерштрасса: если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.

Очевидно, что

$$\sqrt{x} < \sqrt{x + \sqrt{x}} < \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} < \dots,$$

т. е. последовательность (x_n) возрастает. Далее находим

$$x_n^2 = x + \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x}}}}_{n-1} = x + x_{n-1} < x + x_n.$$

Из неравенства

$$x_n^2 - x_n - x < 0,$$

учитывая, что $x > 0$ и $x_n > 0$, получаем

$$x_n < \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2},$$

т. е. последовательность (x_n) ограничена.

Таким образом, доказано, что последовательность (x_n) сходится. Воспользуемся еще раз равенством:

$$x_n^2 = x + x_{n-1}. \quad (2)$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = p$. Переходя к пределу в равенстве (2), получим:

$$p^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (x + x_{n-1}) = x + p.$$

Отсюда

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Так как предел возрастающей последовательности с положительными членами не может быть отрицательным числом, то

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}. \quad (3)$$

Пользуясь (3), уравнение (1) перепишем в виде

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} = a$$

и находим единственное решение уравнения (1):

$$\sqrt{1 + 4x} = 2a - 1,$$

$$x = \frac{(2a - 1)^2 - 1}{4}.$$

Теперь покажем, что последовательность (y_n) , где

$$y_n = \sqrt{y + \sqrt{y^2 + \sqrt{y^4 + \dots + \sqrt{y^{2^{n-1}}}}}}, \quad y > 0 \quad (4)$$

сходится, и вычислим ее предел.

Равенство (4) запишем так:

$$y_n = \sqrt{y} \cdot \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}}_n. \quad (5)$$

В силу (3), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}}_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Учитывая это равенство в (5), получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{y} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}}}_n = \sqrt{y} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Какое из чисел больше:

$$l = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

или

$$m = \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{8 + \dots}}}} \text{ ?}$$

Решение. На первый взгляд кажется, что $m > l$, так как для образования числа m берутся все числа натурального ряда больше 5 и единица, а для образования числа l используется только число 6. Однако если вычислить l по формуле (3) при $x = 6$ получим:

$$l = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = 3.$$

Число m оценим следующим образом:

$$m = \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{7 + \sqrt{8 + \dots}}}} < \sqrt{1 + \sqrt{6 + \sqrt{6^2 + \sqrt{6^4 + \dots}}}} = \sqrt{1 + \sqrt{6} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}} < 3.$$

Таким образом, $m < l$.

Пример. Построить график функции:

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}, \quad x \geq 0. \tag{6}$$

Решение. Легко видеть, что при $x = 0$, то $y = 0$. Если же $x > 0$, то по формуле (3) имеем:

$$y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}.$$

Из этой формулы получим, что при $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$.

Функция, заданная по формуле (6), получена с помощью арифметических операций над аргументом, извлечения корня и перехода к пределу. Однако эта функция разрывна в начале координат.

Выше мы рассматривали примеры на применение теоремы о пределе монотонной и ограниченной последовательности, отправляясь от функции \sqrt{x} . Понятно, что все рассмотренные результаты легко переносятся и на случай, когда исходной будет функция $\sqrt[m]{x}$ при $m > 2$.

Рассмотрим интересный пример, при решении которой не будем пользоваться формулой (3). При решении этого примера постараемся показать гармонию чисел и форм, геометрическое изящество математических объектов. А.Пуанкаре отмечал, что «всем истинным математикам знакомо настоящее эстетическое чувство» [1, стр.67]. В качестве задачи, иллюстрирующей эти положения рассмотрим следующий

Пример. Проверить истинность неравенства:

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}} + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 15.$$

Решение. Посмотрим, что произойдет с неравенством при изменении данных, а именно, если мы прибавим 5 к последнему числу в первом слагаемом (к 20), 4 к последнему числу во втором слагаемом (к 12) и 6 к последнему числу в третьем слагаемом (к 30). Тогда, после извлечения всех корней, получится $5 + 4 + 6 = 15$. Следовательно, без добавочного увеличения левая часть данного выражения действительно меньше 15.

Самостоятельное решение школьниками таких задач ведет к возникновению эмоционального удовлетворения. Это удовлетворение тем сильнее, чем больше усилий было затрачено на поиск решения. «Тот, кто хоть раз изведет благородную радость творческого достижения, никогда уже не пожалеет усилий, чтобы вновь ее испытать» [2, стр.153]. Стремление вновь испытать «радость творческого достижения» приводит к выработке совершенно особого отношения к творческим неудачам: ошибки не воспринимаются как поражение, а являются своеобразным «источником напряженной мысли и воли» [2, стр.153].

Литература:

1. Гнеденко, Б. В. Формирование мировоззрения учащихся в процессе обучения математике. М.: Просвещение, 1982, 144 с.

2. Хинчин, А. Я. Педагогические статьи /А. Я. Хинчин/ Под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963, 204 с.

Построение асимптотических решений системы нелинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа

Алишев Абдуманнон Гафурович, кандидат физико-математических наук, доцент;
Холбеков Арзи, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель;
Камолова Азиза Пардабоевна, преподаватель
Джизакский государственный педагогический институт (Узбекистан)

В настоящей работе рассматривается система дифференциальных уравнений нейтрального типа с переменным отклонением аргумента вида

$$A(\tau, \varepsilon) \frac{dx}{dt} = B(\tau, \varepsilon)x + C(\tau, \varepsilon)x(t - \Delta(\tau, \varepsilon)) + D(\tau, \varepsilon) \frac{dx(t - \Delta(\tau, \varepsilon))}{dt} + \varepsilon^2 f(\tau, x, \varepsilon), \quad (1)$$

где x, f — n -мерные векторы, из них x искомым, $A(\tau, \varepsilon), B(\tau, \varepsilon), C(\tau, \varepsilon), D(\tau, \varepsilon)$ — квадратные матрицы n — го порядка, допускающие разложения

$$A(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(\tau), \quad B(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_s(\tau) \\ C(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s C_s(\tau), \quad D(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s D_s(\tau), \quad (2)$$

вектор $f(\tau, x, \varepsilon)$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности точки $(\tau, x_0, 0)$, $0 \leq \tau \leq \varepsilon t \leq L$, медленное время, ε — малый положительный параметр. Предполагается, что функция $\Delta(\tau)$ неотрицательна, т. е. удовлетворяет условию $\Delta(\tau) \geq 0, \forall \tau \in (0, L)$. (3)

Как известно [1], при переменном запаздывании метод шагом может оказаться неприменим. В случае применимости, осуществление этого метода для уравнения вида (1) сопряжено со значительными трудностями, так как коэффициенты этого уравнения являются переменными. Поэтому возникает потребность в разработке метода, который бы позволял строить асимптотическое решение без использования метода шагов.

Такой метод впервые был предложен для линейных систем уравнений запаздывающего типа [2]. Позже этот метод был предложен для линейных дифференциальных уравнений с отклонением аргумента нейтрального типа.

В данной работе, в отличие от работы [2,3], рассматриваются так называемые критические случаи [4] с применением обобщенной обратной матрицы, которые облегчают применение полученных результатов на практике.

Вначале рассмотрим вопрос построения формальных решений для системы (1), а затем исследуем асимптотические свойства полученных решений. При этом, под частным условием понимать решение, соответствующее определенному корню уравнения

$$\det[\tilde{A}_0(\tau) + \lambda \tilde{B}_0(\tau)] = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } \tilde{A}_0(\tau) = B_0(\tau) + C_0(\tau), \quad \tilde{B}_0(\tau) = D_0(\tau) + A_0(\tau).$$

Пусть матрица $\tilde{A}_0(\tau)$ относительно матрицы $\tilde{B}_0(\tau)$ имеет одно нулевое собственное значение, т. е. корни уравнений удовлетворяют условию

$$\lambda_i(\tau) \equiv 0, \lambda_i(\tau) \neq \lambda_j(\tau), i \neq j, i, j = \overline{2, n}, \forall \tau \in [0, L]. \tag{5}$$

Тогда справедлива.

1. Теорема. Если матрицы $A(\tau, \varepsilon), B(\tau, \varepsilon), C(\tau, \varepsilon), D(\tau, \varepsilon)$ и скалярная функция $\Delta(\tau)$ при τ на сегменте $[0, L]$, а вектор $f(\tau, x, \varepsilon)$ в области $P(\tau, x, \varepsilon) = P(\tau, \varepsilon) \times (0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$, где $P(\tau, x, \varepsilon)$ — некоторая область пространства переменных τ, x , принадлежат к классу C^k (для достаточно больших значений k), то система (1) имеет формальное частное решение соответствующее нулевому корню уравнения (4) вида

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s u_s(\tau). \tag{6}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы надо так определить коэффициенты ряда (6), чтобы вектор $x(t, \varepsilon)$ формально удовлетворял системе (1). Поставим вектор $x(t, \varepsilon)$ в систему (1) и получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &\varepsilon A(\tau, \varepsilon) u'(\tau, \varepsilon) = \\ &= A(\tau, \varepsilon) u(\tau, \varepsilon) + C(\tau, \varepsilon) u(\tau - \varepsilon \Delta(\tau), \varepsilon) + \varepsilon D(\tau, \varepsilon) u'(\tau - \varepsilon \Delta(\tau), \varepsilon) + \\ &+ \varepsilon^2 f(\tau, u(\tau, \varepsilon), \varepsilon) \quad (' = \frac{d}{d\tau}) \end{aligned} \tag{7}$$

Разложим в формальные ряды по степеням параметра ε вектор $u(\tau - \varepsilon \Delta(\tau), \varepsilon)$:

$$U(\tau - \varepsilon \Delta(\tau), \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \sum_{r=0}^s \frac{(-\Delta(\tau))^{s-r}}{(s-r)!} \frac{d^{s-r} U_r(\tau)}{d\tau^{s-r}}. \tag{8}$$

Приравняв в (7) выражения при одинаковых степенях параметра ε , получим следующую бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов ряда (6):

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_0(\tau) = 0, \tag{9}$$

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_1(\tau) = T_1(\tau) u_0'(\tau) - T_2(\tau) u_0(\tau), \tag{10}$$

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_2(\tau) = T_1(\tau) u_1'(\tau) - T_2(\tau) u_1(\tau) + F_0(\tau), \tag{11}$$

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_3(\tau) = T_1(\tau) u_2'(\tau) - T_2(\tau) u_2(\tau) + F_1(\tau), \tag{12}$$

где

$$T_1(\tau) = A_0(\tau) + \Delta(\tau) C_0(\tau) D_0(\tau),$$

$$T_2(\tau) = B_1(\tau) + C_0(\tau),$$

$$F_0(\tau) = A_1(\tau) u_0'(\tau) - B_2(\tau) u_0(\tau) - \frac{\Delta^2(\tau)}{2!} C_0 u_0 - \Delta(\tau) C_1(\tau) u_0'(\tau) -$$

$$-C_2(\tau) u_0'(\tau) + \Delta(\tau) D_0(\tau) u_0''(\tau) - D_1(\tau) u_0'(\tau) - f(\tau, u_0),$$

$$F_1(\tau) = A_1(\tau) u_0'(\tau) + A_2(\tau) u_0(\tau) - B_2(\tau) u_1(\tau) - B_3(\tau) u_0(\tau) -$$

$$-C_0(\tau) \left(\frac{\Delta(\tau)}{2!} u_1''(\tau) - \frac{\Delta^3(\tau)}{3!} u_0'''(\tau) \right) - C_1(\tau) \left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2!} u_0''(\tau) - \Delta(\tau) u_1'(\tau) \right) -$$

$$-C_2(\tau) \left(u_1(\tau) - \Delta(\tau) u_0'(\tau) \right) - C_3(\tau) u_0(\tau) -$$

$$-D_0(\tau) \left(\frac{\Delta^2(\tau)}{2!} u_0''(\tau) - \Delta(\tau) \Delta'(\tau) u_0'''(\tau) - \Delta'(\tau) u_1'(\tau) - \Delta(\tau) u_0''(\tau) \right) -$$

$$-D_1(\tau) \left(u_1'(\tau) - \Delta'(\tau) u_0'(\tau) - \Delta(\tau) u_0''(\tau) \right) - D_2(\tau) u_0'(\tau) - f_u(\tau) u_1(\tau) - f_1(\tau).$$

Рассмотрим первые из уравнений полученные по системе (9)-(12). Уравнение (9) согласно [5] имеет решение вида

$$u_0(\tau) = \varphi q_0(\tau), \quad (13)$$

где φ — собственный вектор матрицы $\widetilde{A}_0(\tau)$, в которой первые координаты равны единице, а остальные нулю, $q_0(\tau)$ — на отрезке $[0, L]$ отличная от нуля неизвестная функция определяется на следующем шаге.

Уравнение (10) учитывая (13) запишем в виде

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_1(\tau) = T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau), \quad (14)$$

определитель система (14) равен нулю, т. е. $\det \widetilde{A}_0(\tau) = 0$. В этом случае, как известно [2], для существования решения неоднородной системы (14) необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогональна ко всем векторам, дающим решением соответствующей однородной союзной системы. Следовательно, условие ортогональности имеет вид

$$\left(\psi, \left(T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau) \right) \right) = 0, \forall \tau \in [0, L], \quad (15)$$

где ψ — вектор — решение однородной союзной системы, в котором n -ой координаты равно единица оставленный равный нулю.

Из равенства (15) учитывая что

$$\left(\psi, T_1(\tau) \varphi \right) \neq 0, \forall \tau \in [0, L], \quad (16)$$

получаем относительно неизвестной функции $q_0(\tau)$ однородное линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$q_0'(\tau) = \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} q_0(\tau) \quad (17)$$

Интегрируя уравнение (17) определим неизвестную функцию $q_0(\tau)$:

$$q_0(\tau) = e^{\int \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} q_0(\tau)}, \quad (18)$$

здесь постоянную интегрирования считаем равной единице.

Условие разрешимости для уравнения (14) имеет место, тогда из (14) определим неизвестный вектор $u_1(\tau)$:

$$u_1(\tau) = \widetilde{A}_0^{\dagger}(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau)] + \varphi q_1(\tau), \quad (19)$$

где $q_1(\tau)$ — неизвестная функция, определяющаяся на следующем шаге, $\widetilde{A}_0^{\dagger}(\tau)$ — обобщенная обратная матрица к матрице $\widetilde{A}_0(\tau)$.

Имея виду (19) уравнения (11) запишем следующим образом

$$\widetilde{A}_0(\tau) u_2(\tau) = T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau) + F_0(\tau), \quad (20)$$

где

$$F_0(\tau) = A_1(\tau) u_0'(\tau) - B_2(\tau) u_0(\tau) - \frac{\Delta^2(\tau)}{2!} C_0(\tau) u_0''(\tau) - C_1(\tau) \Delta(\tau) u_0'(\tau) - \\ - C_2(\tau) u_0(\tau) + D_0(\tau) (\Delta'(\tau) u_0'(\tau) + \Delta(\tau) u_0''(\tau)) - D_1(\tau) u_0'(\tau) - f(\tau) u_0(\tau) + \\ + [\widetilde{A}_0^{\dagger}(\tau) (T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau))] T_1(\tau) - \\ - \widetilde{A}_0^{\dagger}(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_0(\tau)] T_2(\tau).$$

Условие разрешимости для уравнения (20) имеет вид

$$\left(\psi, \left(T_1(\tau) \varphi q_0'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_1(\tau) + F_1(\tau) \right) \right) = 0, \forall \tau \in [0, L],$$

или

$$\left(\psi, T_1(\tau) \varphi q_1'(\tau) - \left(\psi, T_2(\tau) \varphi \right) q_1(\tau) + \left(\psi, F_0(\tau) \right) \right) = 0. \tag{21}$$

Таким образом получаем относительно неизвестной функции $q_1(\tau)$ линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$q_1'(\tau) - \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} q_1(\tau) = - \left(\psi, F_0(\tau) \right) \frac{1}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)}. \tag{22}$$

Интегрируя уравнения (22) получаем

$$q_1(\tau) = e^{\int \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} d\tau} \left[- \int \frac{(\psi, F_0(\tau)) e^{-\int \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} d\tau}}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} d\tau + \alpha_1 \right], \tag{23}$$

где α_1 — постоянная интегрирования.

Условия (21) для уравнения (20) выполняются, тогда из него определим неизвестный вектор $u_2(\tau)$:

$$u_2(\tau) = \widetilde{A}_0^+(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_1'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_1(\tau) + F_0(\tau)] + \varphi q_2(\tau), \tag{24}$$

где $q_1(\tau)$ — неизвестная функция определяется на следующем шаге. Согласно уравнению (24) уравнения (12) запишем в виде

$$\widetilde{A}_0^+(\tau) u_3(\tau) = T_1(\tau) \varphi q_2'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_2(\tau) + \widetilde{F}_1(\tau), \tag{25}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{F}_1(\tau) = & T_1(\tau) \left(\widetilde{A}_0^+(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_1'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_1(\tau) + F_0(\tau)] \right)' - \\ & - T_2(\tau) \widetilde{A}_0^+(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_1'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_1(\tau) + F_0(\tau)] + F_1(\tau). \end{aligned}$$

Условие (15) для уравнения (25) имеет вид

$$\left(\psi, \left(T_1(\tau) \varphi q_2'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_2(\tau) + \widetilde{F}_1(\tau) \right) \right) = 0, \forall \tau \in [0, L], \forall \tau \in [0, L],$$

или

$$\left(\psi, \left(T_1(\tau) \varphi q_2'(\tau) - \left(\psi, T_2(\tau) \varphi \right) q_2(\tau) + \left(\psi, \widetilde{F}_1(\tau) \right) \right) \right) = 0 \tag{26}$$

согласно условия (16) уравнения (26) запишется так:

$$q_2'(\tau) - \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} q_2(\tau) = - \frac{(\psi, \widetilde{F}_1(\tau))}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} \tag{27}$$

Решая уравнения (27) получаем

$$q_2(\tau) = e^{\int \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} d\tau} \left[\alpha_2 - \int \frac{(\psi, \widetilde{F}_1(\tau))}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} e^{-\int \frac{(\psi, T_2(\tau) \varphi)}{(\psi, T_1(\tau) \varphi)} d\tau} d\tau \right], \tag{28}$$

где α_2 — постоянная интегрирования.

Учитывая выполнение условия (26) для уравнения (25), определим неизвестный элемент $u_3(\tau)$ ряда (6):

$$u_3(\tau) = \widetilde{A}_0^+(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_2'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_2(\tau) + \widetilde{F}_1(\tau)] + \varphi q_3(\tau),$$

$$u_3(\tau) = \widetilde{A}_0^+(\tau) [T_1(\tau) \varphi q_2'(\tau) - T_2(\tau) \varphi q_2(\tau) + \widetilde{F}_1(\tau)] + \varphi q_3(\tau), \tag{29}$$

где $q_3(\tau) q_3(\tau)$ — как прежде неизвестная функция определяется на следующем шаге.

Очевидно, подобным способом можно последовательно определить все векторы $u_s(\tau), s = 0, 1, \dots$. Теорема доказана.

Выше изложены способы построения формальных частных решений системы (1), соответствующих определенному корню уравнения (4). Можно показать, что при некоторых ограничениях формальное решение асимптотических сходится к точному решению $x(t, \varepsilon)$ системы (1), т. е. норма разности между точным решением и его приближением -го порядка стремится к нулю при фиксированном m и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Под приближением -го порядка будем понимать вектор

$$x_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^m \varepsilon^s u_s(\tau). \quad (1)$$

Асимптотический характер формальных частных решений устанавливает.

Теорема 2. Пусть для системы (1) выполнены условия теоремы 1 и следующие:

1) Вектор $x_m(t, \varepsilon)$ определяемый равенством (30), на начальном множестве $(t, \varepsilon \in \Delta)$ совпадает с точным решением системы (1)

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon), \quad t \in E_\Delta; \quad (31)$$

2) Функция $t - \Delta(\tau)$ растет строго монотонно на отрезке $[0, \frac{L}{\varepsilon}]$ причем

$$\Delta(\tau) > 0, \quad \forall \tau \in [0, L]; \quad (32)$$

$$3) R_\varepsilon(\widetilde{A}_0(\tau) x(t, \varepsilon), x_m(t, \varepsilon)) \leq 0, \quad \forall \tau \in [0, L]; \quad (33)$$

4) для вектор — функция $f(\tau, x, \varepsilon)$ выполняются условия Лепшица с постоянной l :

$$\|f(\tau, x, \varepsilon) - f(\tau, x_m, \varepsilon)\| \leq l \|x - x_m\|. \quad (34)$$

Тогда существуют постоянные c_r, k_r , не зависящие от ε и такие, что для всех $t \in [(r-1)d, rd]$, где $1 \leq r \leq \lfloor \frac{L}{\varepsilon d} \rfloor$

$$d = \min_{r \in [0, L]} \Delta(\tau) \quad (35)$$

справедливы неравенства

$$\|x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^{m+1-r} c_r;$$

$$\left\| \frac{dx(t, \varepsilon)}{dt} - \frac{dx_m(t, \varepsilon)}{dt} \right\| \leq \varepsilon^{m+1-r} k_r.$$

Литература:

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С. Б. «Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом». — М.: Наука, 1971. — 295 с.
2. Шкиль, Н. И. «О некоторых асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами»: Дис... доктора физ.-мат. наук. — Киев, 1968. — 420 с.
3. Фешенко, С. Ф., Шкиль Н. И., Пидченко Ю. П., Сотниченко Н. А. «Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом». — Киев. Наукова думка, 1981. — 296 с.
4. Васильева, А. Б., Бутузов В. Ф. «Сингулярные возмущенные уравнения в критических случаях». — Изд. МГУ, 1978. — 105 с.
5. Алишев, А. «Решение нелинейных дифференциальных уравнений дробного ранга». ДАН УССР, сер. А, № 6, 1982, с 6–9.

Интеграция информационных систем на основе стандартов XML и WEB-сервисов в сфере закупок

Белорусов Артем Игоревич, аспирант, инженер
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск);
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Развитие информационных технологий влечет за собой повышенные требования к информационным системам. С одной стороны, все больше учреждений и услуг государственного сектора переходят на работу с данными в электронном виде, создаются государственные информационные системы и веб-порталы. Государство на законодательном уровне стимулирует государственные и муниципальные учреждения к межсистемной интеграции. С другой стороны, коммерческие приложения (в частности веб-ориентированные) стремятся интегрироваться с различными информационными сервисами и транслировать полученную информацию своим пользователям. Возникает задача интеграции разнородных (выполненных на разных платформах) информационных систем между собой.

Повсеместная доступность сети Интернет и увеличение пропускной способности каналов создают условия, при которых становится выгодно решать задачи межсистемной интеграции при помощи Интернет технологий. Интернет предоставляет универсальный протокол связи HTTP(S) для любых информационных систем, но не решает проблему различных платформ реализации систем и несовместимых источников данных. Эти проблемы предлагается решить с помощью использования веб-сервисов в качестве шлюзов для программного взаимодействия. Веб-сервисы предоставляют универсальный интерфейс для взаимодействия с любыми информационными системами, тем самым освобождая разработчиков от необходимости реализовывать интеграцию на уровне «приложение-приложение» [3, 4]. Стандарт XML, принятый в качестве формата информационных сообщений веб-сервисов, позволяет обмениваться данными из разнородных источников в унифицированном виде.

Структура и состав XML-пакетов могут быть произвольными, кроме того, они подвержены частым изменениям в связи с поправками в законодательстве, а также изменениями со стороны веб-сервисов. Эти проблемы можно решить с помощью предлагаемого подхода к синтезу XML-пакетов на основе XML-шаблонов.

С целью минимизации простоев персонала и финансовых потерь в процессе внедрения программных средств предлагается реализовать программный комплекс интеграции в виде автономного модуля, взаимодействующего с основной информационной системой через служебные таблицы базы данных. Такой подход позволяет выполнять информационный обмен с внешними системами в асин-

хронном режиме, не блокируя работу основной системы на время выполнения приема или передачи данных.

Анализ проблемы организации взаимодействия в сфере закупок

В качестве предметной области рассмотрим сферу государственных и муниципальных закупок. В этой сфере на законодательном уровне введено требование к муниципальным информационным системам осуществить интеграцию с официальным общероссийским сайтом [12]. Помимо официального сайта муниципальным системам необходимо взаимодействовать с электронными торговыми площадками, расположенными в сети Интернет.

Анализ возможностей интеграции с электронными площадками и официальным сайтом [5, 9, 10] позволяет выделить два основных типа реализации веб-сервисов — REST и SOAP (XML-RPC).

REST был введен Роем Филдингом, который описал концепцию построения распределенного приложения, абстрагировав метод взаимодействия между клиентами и серверами в сети Интернет и назвав его передачей репрезентативного состояния (Representational State Transfer) [1]. Взаимодействие с веб-сервисом этого типа осуществляется путем вызова удаленных процедур с помощью HTTP-запроса. Необходимые для передачи данные указываются в качестве параметров запроса.

SOAP является следующей ступенью развития XML-RPC и является расширением протокола RPC. Отличие между ними в том, что RPC изначально предназначался только для вызова удаленных процедур, в то время как SOAP используется для обмена произвольными сообщениями в формате XML. Протокол SOAP разработан группой W3C и в настоящий момент рекомендуется использовать версию 1.2 [2].

Веб-сервис официального сайта работает по принципу REST и осуществляется по протоколу HTTPS с использованием криптографического протокола TLS (рис. 1). Данный веб-сервис позволяет загружать информацию по закупкам в автоматизированном режиме. Структура пакета и его тип (multipart/form-data) жестко регламентированы. Пакет должен состоять из следующих блоков: login, password, clientType, document, signature. Блоки login и password содержат соответственно имя и пароль пользователя, осуществляющего загрузку сведений (логин и пароль пользователя для входа в личный кабинет официального общероссийского сайта). В блоке clientType указывается тип клиента. Передаваемый XML-документ

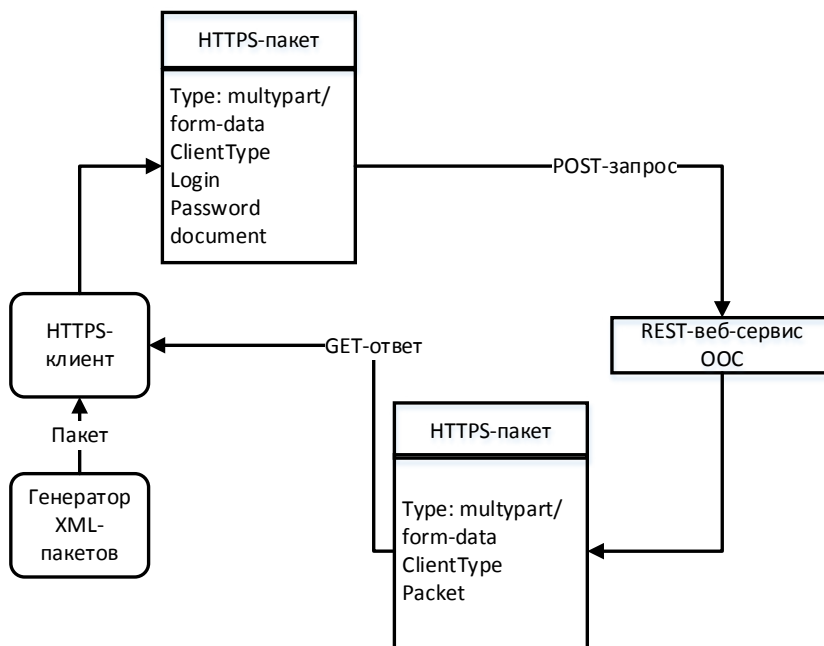


Рис. 1. Схема взаимодействия с веб-сервисом официального общероссийского сайта

содержится в блоке document, а signature содержит электронную подпись XML-документа [5].

Взаимодействие с электронными площадками рассмотрим на примере «РТС-тендер». Эта площадка предоставляет веб-сервис, работающий по принципу SOAP [9]. Взаимодействие с веб-сервисом осуществляется по протоколу HTTP путем вызова определенных функций с параметрами (рис. 2).

XML-пакеты принимаются в виде строковых параметров. Набор функций и их сигнатура определяются с помощью WSDL-файла, доступного в сети Интернет по адресу веб-сервиса. На основе этого файла создается, или, как правило, генерируется специальными инструментами, клиент для работы с веб-сервисом. После этого все взаи-

модействие с площадкой осуществляется с помощью этого клиента — вызов функций и получение результатов их выполнения.

Анализ процедур и механизмов взаимодействия с веб-сервисами нескольких электронных торговых площадок и официального сайта позволил выявить общие задачи, решаемые в процессе интеграции с этими системами. Первым шагом является реализация транспортного протокола взаимодействия с внешней системой. Так как торговые площадки и официальный сайт предоставляют доступ к информации через веб-сервисы, весь транспортный уровень основан на протоколе HTTP(S). Затем следует реализация клиента для конкретной системы в соответствии с ее API (Application Programming Interface — ин-

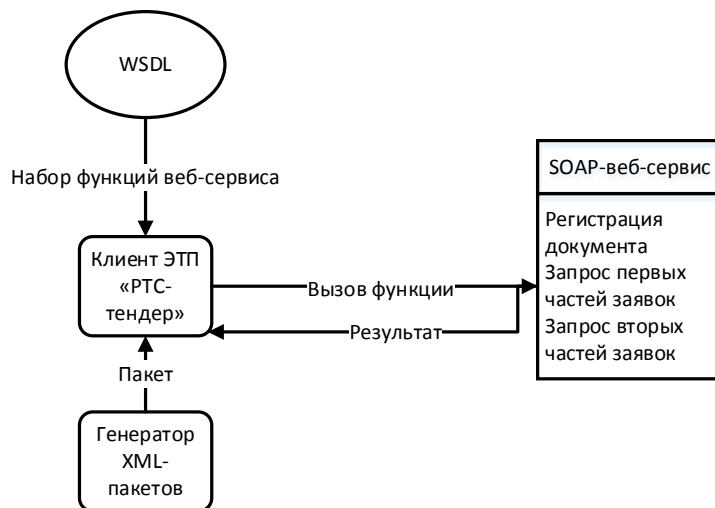


Рис. 2. Схема взаимодействия с SOAP-веб-сервисом «РТС-тендер»

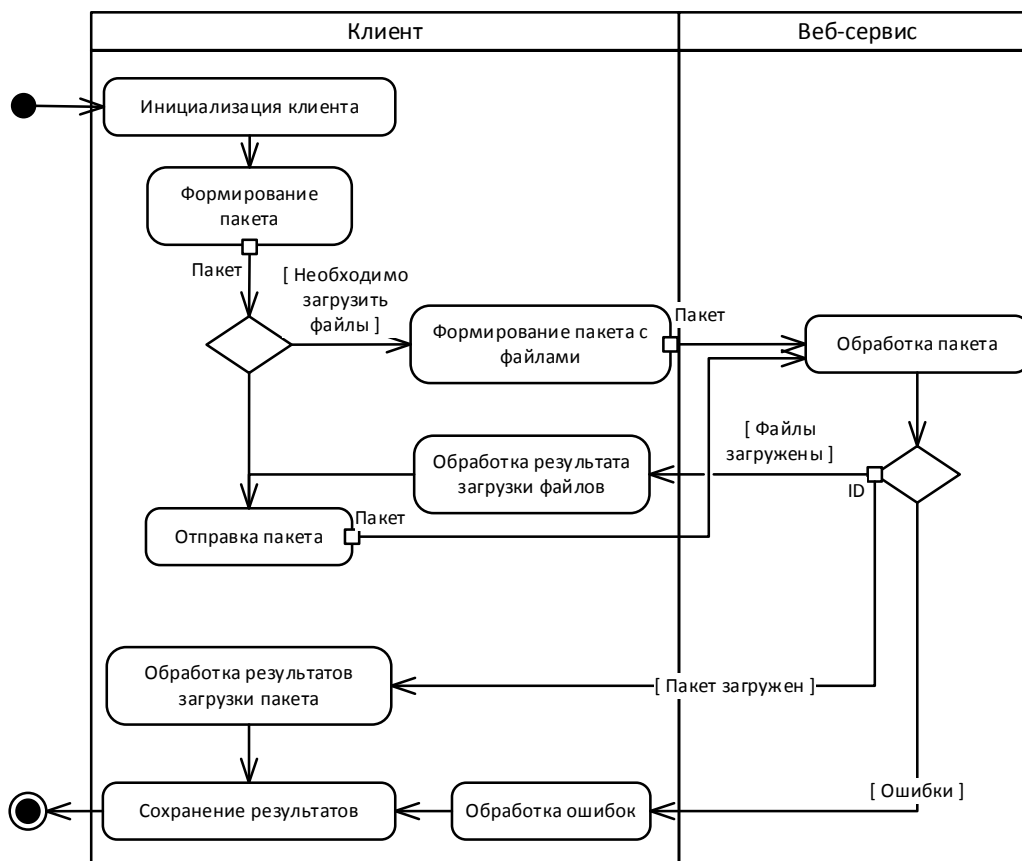


Рис. 3. Диаграмма взаимодействия с веб-сервисом

терфейс программирования приложений). В зависимости от типа веб-сервиса, реализованного на стороне информационной системы, API может быть описан с помощью спецификации вызова удаленных процедур (WSDL-файл), либо с помощью описания структуры информационных пакетов, принимаемых на стороне внешней системы — XSD. Реализованный клиент предоставляет функции взаимодействия с внешней системой, которые позволяют выстраивать логику бизнес-процессов, описанных регламентирующими документами. На рис. 3 изображена диаграмма деятельности (Activity Diagram) взаимодействия с веб-сервисами в нотации UML [6, 7, 8].

Независимо от подхода к реализации веб-сервиса основной блок информации передается в формате XML. Для эффективного взаимодействия с электронными площадками и официальным сайтом требуется универсальный модуль генерации XML-пакетов. Помимо модуля генерации требуется модуль анализа XML-пакетов, т.к. результаты обработки информационных пакетов, отправленных на площадки и официальный сайт, также передаются в формате XML.

Стоит отметить, что структура и состав XML-пакетов не унифицированы и могут быть произвольными. Электронные площадки и официальный сайт определяют структуру и состав пакетов независимо друг от друга. Кроме этого, состав полей подвержен частым изменениям в связи с необходимостью дополнять некоторые пакеты

новыми данными, либо с изменениями в наименовании полей, либо с изменениями в законодательстве. Данные замечания сводятся к необходимости иметь инструмент для быстрого и простого задания и изменения структуры и состава XML-пакетов.

Синтез XML-пакетов на основе XML-шаблонов

Структура и содержание информационных пакетов, как было отмечено выше, подвержены частым изменениям по многим причинам (изменения в законодательстве, дополнения или уточнения полей и пр.). В связи с этим разработан подход к синтезу XML-пакетов на основе XML-шаблонов.

Шаблон представляет собой описание структуры будущего пакета и содержит инструкции по ее заполнению данными из базы данных. Пример шаблона приведен на рис. 4.

Подход к синтезу пакетов с помощью шаблонов требует реализации ряда дополнительных модулей. Одним из модулей является универсальный парсер XML-шаблонов. Парсер должен уметь анализировать произвольный шаблон, выполненный в формате XML, строить иерархическое дерево из XML-узлов и распознавать синтаксические конструкции (таблица 1), состоящие из ключевых слов и заданных для них значений. Помимо парсера требуется XML-генератор, выполняющий функцию генерации

```

<lots table="PRCLOTS" condition="idprc = %DS_PRC.idprc" dsname="DS_LOTS" xmlns=
  <lot mult="DS_LOTS">
    <sid source="DS_LOTS.оosnum" notnull="DS_LOTS.оosnum"/>
    <ordinalNumber source="DS_LOTS.PLOTNUMBER" required="Не указан порядковый н
    <subject source="DS_LOTS.prclots" required="Не указан предмет закупки"/>
    <currency>
      <code source="global(currency_code)"/>
      <name source="global(currency_name)"/>
    </currency>
  </lot>
</lots>

```

Рис. 4. Фрагмент XML-шаблона

итогового пакета для отправки его на электронный ресурс. На вход генератора получает дерево XML-тегов, построенное XML-парсером. Парсер, в свою очередь, проходит по узлам этого дерева и на каждом шаге получает данные из базы данных путем выполнения SQL-запросов. Полученные данные размещаются в соответствующих узлах — происходит информационное наполнение пакетов.

Предложенный подход к синтезу информационных пакетов имеет очевидные преимущества:

- при внесении изменений в структуру пакета нет необходимости вносить изменения в исходный код программного обеспечения, и исчезает необходимость «горячего» программирования;
- структура описания XML-шаблонов проста и не требует навыков программирования для внесения изменений — их могут редактировать неспециалисты в области информационных технологий.

Подход к межсистемному обмену данными

Предлагается подход к организации межсистемного обмена данными, основанный на использовании базы данных в качестве шлюза для обмена сообщениями между системой, данные которой необходимо передать, и подсистемой обмена данными с веб-сервисом. Помимо доступа

к рабочей базе данных требуется наличие веб-сервиса у системы, принимающей данные.

Особенностью данного подхода является автоматический синтез информационных пакетов нужной структуры на основании XML-шаблонов. Для оптимизации работы с различными веб-сервисами в предлагаемом подходе вводится понятие унифицированного правила информационного обмена. Унифицированное правило содержит информацию о конкретной электронной площадке (адрес в сети Интернет, учетные данные пользователя) и XML-шаблон. Эти параметры позволяют однозначно определить, что отправлять (какой пакет), куда (на какой адрес) и как (по какому протоколу). Помимо этого, правила обмена обладают простой и понятной структурой, позволяют оптимально размещать данные в таблицах базы данных и предоставляют удобный механизм создания и редактирования правил.

Предлагаемое решение обладает рядом преимуществ. Во-первых, нет необходимости дорабатывать информационную систему — подсистема обмена данными реализуется в виде отдельного программного комплекса и функционирует на сервере приложений и/или базы данных. В свою очередь обмен заданиями информационного обмена и результатами их выполнения осуществляется через рабочую базу данных. Во-вторых, использование базы данных в качестве шлюза для обмена сообщениями по-

Таблица 1. Синтаксические конструкции, используемые в XML-шаблонах

Ключевое слово	Описание конструкции
Table	Наименование таблицы
condition	Условие для SQL-выражения
dsname	Наименование источника данных, в котором будет храниться результат SQL-запроса
Sql	Текст произвольного SQL-запроса
Source	Наименование источника данных и поле, значение которого следует поместить в качестве содержимого XML-тега
required	Текст, который будет выведен пользователю в случае отсутствия запрошенных данных
Global	Обращение к таблице с глобальными переменными
Mult	Размещение списка тегов с вложенной структурой
%	Текст, следующий за символом, распознается в качестве источника данных
%param	Обращение к внешним переменным, переданным для текущего XML-шаблона
Empty	Служебный тег, который не попадает в итоговый XML-пакет

зволяет выполнять задания информационного обмена асинхронно. В таком режиме работы пользователям информационных систем не приходится ждать завершения процесса информационного взаимодействия с внешней системой (при медленном интернет соединении и большом объеме пакетов процесс может занять несколько минут), и пользователь может работать пока задания информационного обмена выполняются в фоновом режиме. В-третьих, при модификации подсистемы обмена данными внесенные изменения (например, при добавлении новой информационной системы для взаимодействия, либо при изменении структуры или содержания информационных пакетов) вступают в силу без обновления основной системы.

Реализация

На основе предлагаемого подхода создан программный комплекс интеграции. Комплекс представляет собой Desktop-приложение, работающее в двух режимах — с графическим интерфейсом или в виде консольного приложения. Программное обеспечение разработано в бесплатной среде разработки NetBeans на языке Java. Разработанный комплекс является кроссплатформенным и может функционировать в любой системе, для которой реализована виртуальная Java-машина. Для функционирования программного комплекса требуется виртуальная Java-машина, сервер базы данных Oracle и развернутая на нем интегрируемая база данных.

Программный комплекс предназначен для автоматизации процесса интеграции муниципальных информационных систем с электронными торговыми площадками и официальным общероссийским сайтом. На рис. 5 показана схема использования программного комплекса в департаменте муниципального заказа города Красноярск. Представлены основные участники информационного

взаимодействия: муниципальная информационная система (МИС), веб-сервисы официального общероссийского сайта (ООС) и электронных торговых площадок (ЭТП). Взаимодействие модуля интеграции с муниципальной системой происходит через базу данных путем обмена сообщениями через служебные таблицы. Основные функции программного комплекса:

- отправка извещения о предстоящих закупках на ООС;
- обновление ранее отправленного проекта извещения на ООС;
- получение с ЭТП первых частей заявок;
- получение с ЭТП вторых частей заявок;
- отправка на ЭТП результатов рассмотрения первых частей заявок;
- отправка на ЭТП результатов рассмотрения вторых частей заявок;
- получение с ЭТП информации о поставщиках;
- получение с ЭТП информации о действующих комиссиях и пр.

Для инициации процесса межсистемного обмена информацией пользователь с помощью графического интерфейса муниципальной системы добавляет новую запись в таблицу заданий информационного обмена. В зависимости от выбранной закупки в таблицу заданий автоматически добавляется необходимая служебная информация — тип закупки (открытый конкурс, запрос котировок, электронный аукцион и т. д.), идентификатор закупки, а также данные о пользователе. После этого планировщик заданий, обнаружив новую запись в таблице заданий, начинает процесс отправки информации по закупке на указанный веб-сервис. Если клиент веб-сервиса еще не был инициализирован, то происходит его инициализация и при необходимости подключаются модули для работы по криптографическим протоколам [11].

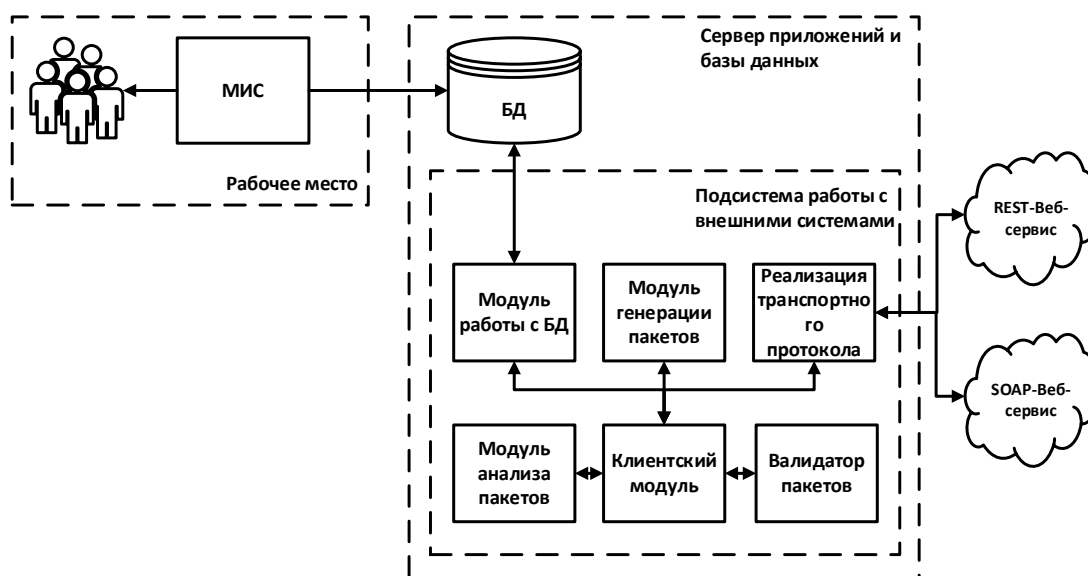


Рис. 5. Структурная схема программного комплекса интеграции

Заключение

Предложен подход, позволяющий автоматизировать процесс межсистемной интеграции. Решена проблема исключения «горячего программирования» при внесении минимальных изменений в структуру или содержание информационных пакетов за счет синтеза XML-пакетов на основе XML-шаблонов. XML обеспечивает универсальный формат информационных сообщений, а XSD — строго определенную семантику. Организация взаимодействия с основной информационной системой через служебные таблицы базы данных дает возможность асинхронного выполнения заданий информационного обмена с внешними веб-сервисами. Предложенный подход позволяет разработчикам реализовывать требуемый функ-

ционал для взаимодействия с веб-сервисами в отдельном модуле интеграции, функционирующем на сервере базы данных и/или приложений, и избавляет от необходимости дорабатывать основную информационную систему для нужд интеграции. При этом унифицированный транспортный протокол HTTP(S) обеспечивает взаимодействие через веб-сервисы. Важным плюсом разработанного подхода является автономность и кроссплатформенность разрабатываемых на его основе программных средств.

Опыт разработки и эксплуатации программного комплекса интеграции [13] показал, что реализованный подход без внесения существенных доработок в корпоративное программное обеспечение может быть применен при решении задач межсистемной интеграции в любой сфере.

Литература:

1. Roy Thomas Fielding. Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures (Ph.D.) // Roy Thomas Fielding. — University of California, Irvine, 2000. — 180 p.
2. Спецификация SOAP. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.w3.org/TR/soap/>
3. Бертран Портье. Обзор терминологии SOA: Часть 1. Сервис, архитектура, управление и бизнес-термины // IBM DeveloperWorks. — 2008. [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://www.ibm.com/developerworks/ru/library/ws-soa-term1/>
4. Хохгуртль Брайан. C# и Java: межплатформные Web-сервисы // Брайан Хохгуртль. — М.: Связь, 2004. — 213 с.
5. ООС. АЛЬБОМ ТФФ. Требования к форматам и способам передачи информации по телекоммуникационным каналам связи в рамках интеграции Общероссийского официального сайта со смежными системами // Официальный общероссийский сайт. — 2014. — 520 с.
6. Буч, Г., Рамбо Д., Джекобсон А. Язык UML Руководство пользователя // Г. Буч, Д. Рамбо, А. Джекобсон. — ДМК Пресс, 2007. — 496 с.
7. Леоненков, А. Самоучитель UML // Леоненков А. — БХВ-Петербург, 2004. — 551 с.
8. Fowler Martin. UML Distilled: A Brief Guide to the Standard Object Modeling Language // Martin Fowler. Addison-Wesley Professional, 2003. — 208 p.
9. Регламент информационного взаимодействия ЭТП «РТС-тендер» с региональными системами // ЭТП «РТС-тендер». — 2011. — 23 с.
10. Регламент информационного взаимодействия электронной площадки ММВБ «ГОСЗАКУПКИ» с прикладными автоматизированными системами организаторов торгов // ЭТП ММВБ «Госзакупки». — 2012. — 11 с.
11. Белорусов А.И., Жучков Д.В. Автоматизация взаимодействия муниципальной информационной системы с внешними веб-сервисами в сфере закупок // Информатизация и связь. — 2014. № 3. — с. 79–83.
12. Федеральный закон от 5 апреля 2013 г. № 44-ФЗ «О контрактной системе в сфере закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд».
13. Белорусов А.И., Жучков Д.В., Кочетков С.Н. Программный комплекс интеграции информационных систем в сфере государственных и муниципальных закупок. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2014617599 от 28 июля 2014 года / Федеральная служба по интеллектуальной собственности. — 2014.

Разработка элементов автоматизации сейсмического микрорайонирования с использованием ГИС технологий

Бодякин Евгений Владимирович, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Представлена методика проведения сейсмического микрорайонирования (СМР) с использованием географических информационных систем (ГИС). Использование ГИС технологий существенно облегчает и ускоряет создание карт СМР — конечного результата работы.

Ключевые слова: землетрясение, ГИС, сейсмическое микрорайонирование.

Введение

Сейсмическое микрорайонирование (СМР) выполняется с целью количественной оценки влияния свойств грунтов на сейсмические колебания в пределах площадей расположения конкретных сооружений и на территории населенных пунктов. Выделение участков с различной сейсмичностью проводится на основе комплексного изучения сейсмических свойств грунтов, инженерно-геологических, гидрогеологических и сеймотектонических особенностей территории [1]. В результате работ по сейсмическому микрорайонированию для объектов всех классов составляется карта сейсмического микрорайонирования.

Методику проведения СМР можно разделить на 4 этапа. Первый этап (подготовительный) включает в себя сбор геологической, сейсмологической, геофизической и топографической информации. На основании этих данных строится 3D модель исследуемой площадки (второй этап). Третий этап — расчет в каждой точке модели сейсмической интенсивности, с использованием различных расчетных методов [2], а также метода сейсмических жесткостей [3].

Заключительный этап СМР представляет собой создание карт сейсмического районирования, на которых отображаются области с разной сейсмической интенсивностью сотрясения в долях балла MSK-64. Карты сейсмического районирования служат для осуществления сейсмостойкого строительства, обеспечения безопасности населения, охраны окружающей среды и других мероприятий, направленных на снижение ущерба при сильных землетрясениях. Очевидно, что во входной и выходной информации (карты сейсмической опасности) содержатся данные географического положения (координаты, высоты), и, следовательно, использование ГИС в этом плане облегчает выполнение работ по СМР практически на каждом этапе. Таким образом, ГИС может быть использована для представления конечного результата работы — карты сейсмического районирования.

Сбор данных

Надежность получаемых на стадии СМР оценок напрямую зависит от качества и полноты исходной инже-

нерно-геологической и инженерно-геофизической информации на исследуемой площадке. В связи с этим на первой стадии СМР используется комплекс инженерно-геофизических методов, позволяющий определить характеристики грунтовой толщи, необходимые для реализации инструментальных и расчетных методов СМР.

Геологическая информация представляет собой данные по бурению скважин: координаты, абсолютные отметки устья, количество и мощность слоев, уровень грунтовых вод. Эта информация берется из отчетов инженерно-геологических изысканий.

Каждому слою присваивается номер инженерно-геологического элемента (ИГЭ). За ИГЭ принимают некоторый объем грунта одного и того же номенклатурного вида однородного по свойствам и состоянию. В соответствии с номером ИГЭ каждому слою присваиваются физико-механические показатели (плотность, предельное сдвиговое напряжение и т.д.) и скорости распространения Р- и S- волн. Значения скоростей получают при обработке и интерпретации материалов сейсморазведочных работ (КМПВ, ВСП) [4]. Для дальнейшей работы в среде ГИС вышеуказанные данные должны быть представлены в виде базы данных или электронной таблицы. Пример входных данных для скважины показан в таблице 1.

На этом же этапе происходит импорт и визуализация данных по скважинам в среду ГИС. Наряду с этой информацией отображаются топографические данные: линии высот поверхности, границы исследуемого участка и положения существующих и проектируемых строений на данной геоплощадке (рис. 1).

В большинстве случаев входные данные по скважинам могут относиться к большей области, чем область, на которой выполняется СМР. Выбор необходимых данных осуществляется с помощью ГИС-программы, инструменты которой предоставляют широкие возможности для использования графических средств, в частности, для выделения географических границ исследуемой области.

Построение геологической 3D модели исследуемой геоплощадки

Для дальнейшего численного моделирования реакции геологической среды на сейсмические воздействия на ос-

Таблица 1. Пример входных данных для скважины

№ сква- жины	Слой	ИГЭ	Координаты устья			Мощность, м			Плотн., г/см ³	Пред.-сдвиг. напряжение	V _p , м/с	V _s , м/с
			X	Y	Z	от	до	h				
18	1	1	26436.6	21227.09	37.95	0	1.8	1.8	1.92	0.4	232	158
18	2	2	26436.6	21227.09	37.95	1.8	4.7	2.9	2.12	0.78	352	192
18	3	4	26436.6	21227.09	37.95	4.7	8	3.3	2.54	20	1024	488
18	4	5	26436.6	21227.09	37.95	8	10	2	2.72	24	2960	1968

нове вышеизложенных данных выполняется построение 3D модели геологической среды площадки с некоторым шагом.

Средствами ГИС создается сетка, каждая точка которой географически привязывается по высоте и координатам к данной площадке. Далее, на основании данных по бурению и инженерно-геологических разрезов в каждой точке задается количество и мощность слоев (рис. 2). Эти данные являются входными для последующего расчета сейсмической интенсивности.

Расчет сейсмической интенсивности

Расчет сейсмической интенсивности производится с помощью метода сейсмических жесткостей и различных программ, рассчитывающих колебание поверхности грунтовой толщи. Существуют различные методы расчета колебания грунтовой толщи на основе линейных уравнений [2], например, метод тонкослоистых сред — программа Grunt (ИФЗ РАН) и метод передаточных функций — программа WinShake (модификация SHAKE91 [6]).

Метод сейсмических жесткостей

Инструментальная оценка скоростных свойств сейсмореализующего слоя рассматривается как информационная база для расчета приращений сейсмической интенсивности. Оценка приращений сейсмической интенсивности по методу сейсмических жесткостей выполняется на основе измерения скоростей распространения сейсмических волн и значений плотностей в верхней (10 метровый) толще изучаемого и эталонного грунта с учетом влияния обводненности разреза.

Расчеты выполняются по формуле:

$$J = J_0 + DJ_c + DJ_B, \quad (1)$$

где J — сейсмическая интенсивность в баллах с учетом местных условий, J_0 — исходная сейсмическая интенсивность в баллах в привязке к средним грунтовым условиям (II-категория по сейсмическим свойствам) по данным УСО; DJ_c — приращение сейсмической интенсивности за счет различия акустических жесткостей грунтов на изучаемом и эталонном участке

$$DJ_c = 1.67 \lg (V_{(p,s)} p_a / V_{(p,s)i} p_i), \quad (2)$$

где $V_{(p,s)}$ и $V_{(p,s)i}$ — средневзвешенные значения скоростей распространения продольных и поперечных волн

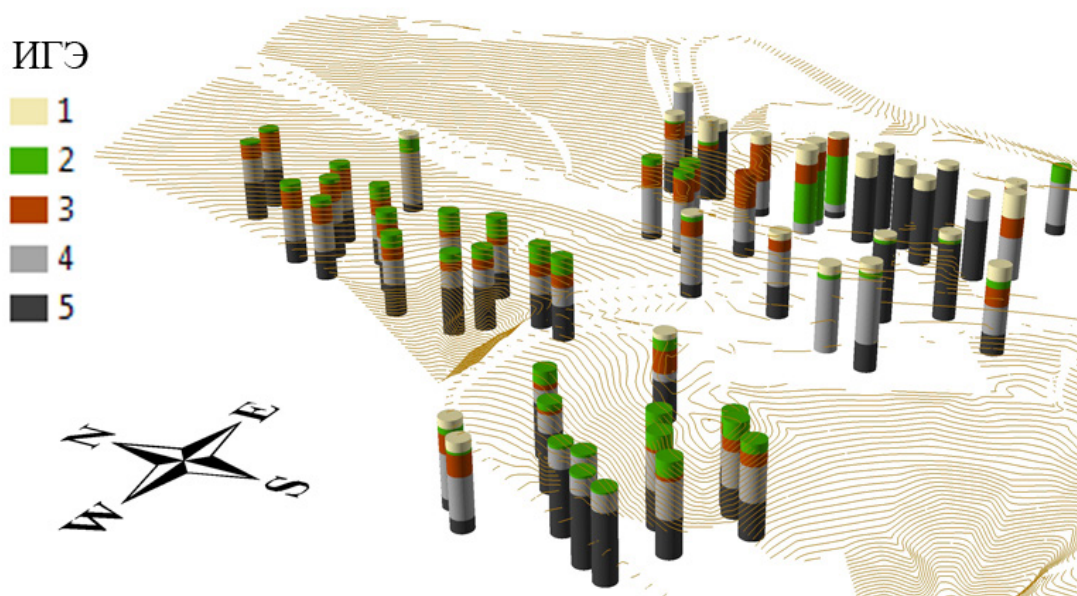


Рис. 1. Первичная визуализация входной информации, представляющая данные по бурению скважин

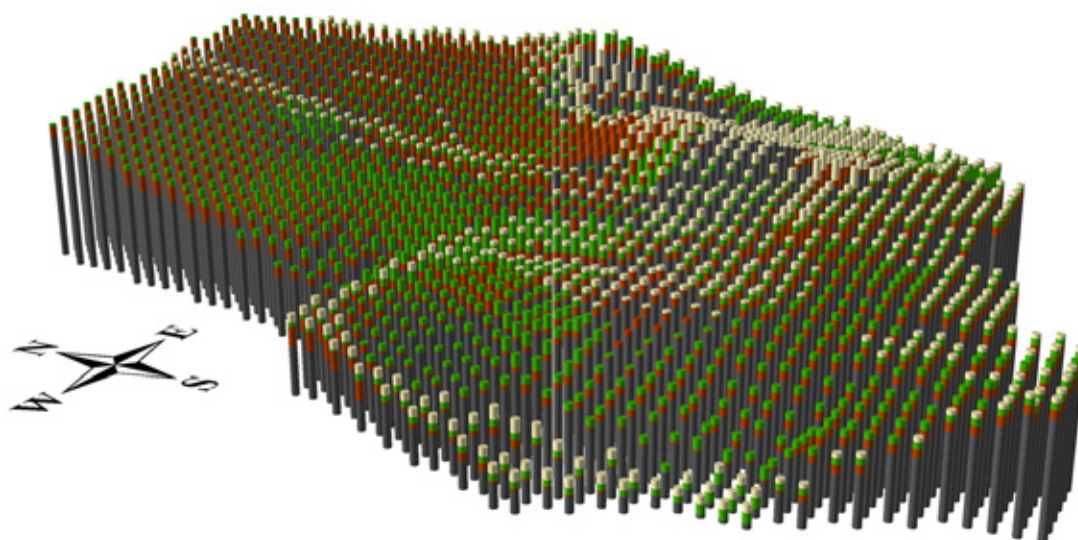


Рис. 2. 3D модель геологической среды площадки исследований

для расчетной толщи на изучаемом и эталонном участке, p_s и p_i — средневзвешенные значения плотностей на эталонном и изучаемом участке; DJ_B — приращения сейсмической интенсивности за счет ухудшения сейсмических свойств при водонасыщении [32].

Численное моделирование в программе

Моделирование реакции геологической среды на воздействие землетрясений выполняется в программах WinShake и Grunt посредством пересчета ансамбля акселерограмм (WinShake) и велосилограмм (Grunt) через сейсмогеологические модели на дневную поверхность.

Алгоритмы программы Grut были адаптированы под задачи СМР, что позволило рассчитывать большие объемы информации в автоматическом режиме. Алгоритм программы WinShake состоит в последовательной обработке опций, заданных в командном файле, в котором описывается грунтовый разрез участка, динамические зависимости грунта, а также другие необходимые входные параметры. Для автоматизации вычислений написана подпрограмма генерации таких командных файлов.

Грунтовый разрез описывается как совокупность перечисляемых и нумеруемых сверху вниз слоев (включая полупространство), каждый из которых имеет свои механические параметры. Каждый слой может быть разбит на подслои одинаковой мощности с механическими параметрами своего слоя для выяснения свойств движения на нужной глубине разреза (все расчеты в программе выполняются для кровли подслоя).

Входное движение считывается из форматного файла. Нелинейное и неупругое поведение грунта при нагрузках, вызванных сильными движениями, описывается изменением модулей упругости и затуханием, которые обусловлены вызванной деформацией. Их значения определяются итеративно посредством приведения максимальной деформации к некоторой однородной для всего слоя.

Для проведения расчета каждому модельному участку составляется командный файл с входными параметрами для расчета. Для каждой модели проводятся расчеты с использованием синтезированных акселерограмм [5], акселерограмм аналогов и региональных записей землетрясений. В результате каждого расчета получают численные характеристики.

Для каждой расчетной пары находится набор характеристик, в том числе:

- пиковые ускорения PGA в долях g, определенные для заданных периодов повторяемости (максимальное значение модуля ускорения за время землетрясения);
- длительность сейсмических колебаний для заданных периодов повторяемости;
- периоды колебаний с максимальными пиковыми ускорениями.

Для пересчета пикового ускорения в интенсивность используется соотношение [7]:

$$I = 2.5 \lg(PGA, \text{ см/с}^2) + 1.25 \lg(d, c) + 1.05. \quad (3)$$

Построение карт сейсмического районирования

На последнем этапе на основе анализа результатов расчетных и инструментальных методов создаются карты сейсмического районирования [8]. В процедуре построения карт используются различные параметры выделения областей с одинаковой бальностью (например, кригинг, интерполяция сплайнами и др.), которые предлагаются в ГИС (рис. 3).

Заключение

Разработанная методика с использованием ГИС технологий существенно облегчает и ускоряет исследования, связанные с СМР. Построение 3D модели геологической

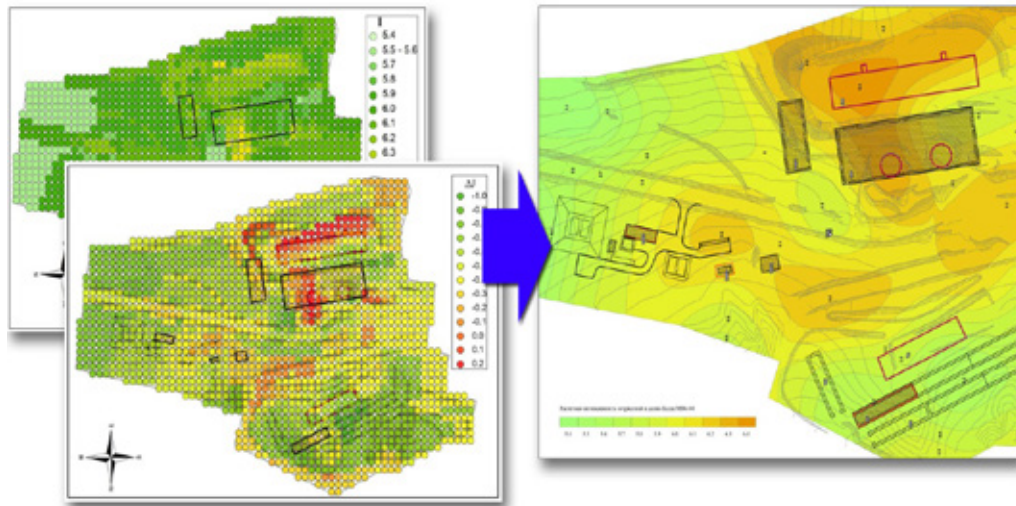


Рис. 3. Создание карты сейсмического микрорайонирования в программе ГИС

среды позволяет повысить точность определения интенсивности сотрясаемости исследуемой площадки.

Расчет сейсмической интенсивности производится с помощью метода акустических жесткостей и численного

моделирования — программ Grunt и WinShake. ГИС является основным инструментом создания карт СМР — конечного этапа разрабатываемой вычислительной методики.

Литература:

1. Симонов К.В., Кабанов А.А., Бурцев А.А., Денисенко А.В. Мониторинг геодинамической опасности территории водохранилищ крупных ГЭС // Информатизация и связь. — 2013. — № 2. — с. 104–106.
2. Заалишвили В.Б. Сейсмическое микрорайонирование территорий городов, населенных пунктов и больших строительных площадок / В.Б. Заалишвили [отв. ред. А.В. Николаев]; Центр геофизических исследований Владикавказского НЦ РАН. — М.: Наука, 2009. — 350 с.
3. РСН 60-86 «Инженерные изыскания для строительства. Сейсмическое микрорайонирование. Нормы производства работ».
4. Бондарев В.И. Основы сейсморазведки / В.И. Бондарев. Екатеринбург: Издательство УГГТА52003, 2003. — 332 с.
5. Boore D.M. SMSIM — Fortran Programs for Simulating Ground Motions from Earthquakes: Version 2.0 — A Revision of OFR 96-80-A, U.S. Geological Survey Open-File Rep., 00-509, 2000 (<http://geopubs.wr.usgs.gov/open-file/of00-509/>).
6. Idriss I.M., Sun J.I. SHAKE91 — A computer program for conducting equivalent linear seismic response analysis of horizontally layered soils. CGM research report. UC Davis, 1992.
7. Аптикаев Ф.Ф. Инструментальная шкала сейсмической интенсивности. — М.: Наука и образование, 2012. — 176 с.
8. Перетокин С.А. Использование программно-алгоритмического аппарата методики ОСП-97 в задачах детального сейсмического районирования // Геология и геофизика Юга России. — 2015. — № 1. — с. 59–62.

Вычислительный алгоритм для численного моделирования микрополярных упругих ортотропных стержней

Варыгина Мария Петровна, кандидат физико-математических наук
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Микрополярная (моментная) модель [1], предназначенная для описания напряженно-деформированного состояния композитов, гранулированных, порошкообразных сред, является основной моделью механики сплошных сред, учитывающей микроструктуру материала. Особую актуальность математические модели материалов со структурой получили в последнее время в связи с развитием микро- и нанотехнологий. В модели микрополярной среды кроме поступательного движения, которое характеризуется перемещением u , рассматриваются независимые повороты частиц φ , а наряду с тензором напряжений с компонентами σ_{11} , σ_{22} , σ_{12} , σ_{21} , вводится несимметричный тензор моментных напряжений с компонентами m_{13} , m_{31} .

Вопросы численной реализации моментной модели в изотропном случае рассматриваются в [2–4]. В настоящей работе приводится вычислительный алгоритм для численного моделирования микрополярных ортотропных упругих стержней.

Математическая модель

Уравнения плоской динамической задачи, описывающие поведение ортотропного упругого стержня высотой $2h$ и длиной a , имеют вид [5, 6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, & \frac{\partial m_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} &= I \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2}, \\ \sigma_{11} &= A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \sigma_{22} &= A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & m_{13} &= B_{66} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, & m_{31} &= B_{44} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \\ \sigma_{12} &= A_{77} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \varphi_3 \right) + A_{78} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \varphi_3 \right), & \sigma_{21} &= A_{78} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \varphi_3 \right) + A_{88} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \varphi_3 \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды; I – мера инерции среды при вращении; $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – феноменологические параметры упругости для ортотропной среды.

На основе гипотез, предложенных в работе [5], в предположении малости высоты стержня по сравнению с его длиной ($2h \ll a$) и представлении перемещений и поворота в виде

$$u_1 = x_2 \psi(x_1, t), \quad u_2 = w(x_1, t), \quad \varphi_3 = \omega(x_1, t),$$

с учетом обозначений

$$\begin{aligned} M_{11} &= \int_{-h}^h \sigma_{11} dx_2, & N_{12} &= \int_{-h}^h \sigma_{12} dx_2, & N_{21} &= \int_{-h}^h \sigma_{21} dx_2, & L_{13} &= \int_{-h}^h m_{13} dx_2, \\ \Psi &= \frac{\partial \psi}{\partial t}, & W &= \frac{\partial w}{\partial t}, & \Omega &= \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned}$$

система уравнений (1) динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial M_{11}}{\partial x} - N_{21}, & 2\rho h \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{\partial N_{12}}{\partial x}, & 2Ih \frac{\partial \Omega}{\partial t} &= \frac{\partial L_{13}}{\partial x} + N_{12} - N_{21}, \\ \frac{\partial M_{11}}{\partial t} &= \frac{2h^3 A_0}{3} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, & \frac{\partial L_{13}}{\partial t} &= 2hB_{66} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial N_{21}}{\partial t} = 2hA_{78} \frac{\partial W}{\partial x} + 2hA_{88} \Psi + 2hP_2 \Omega, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial t} = 2hA_{77} \frac{\partial W}{\partial x} + 2hA_{78} \Psi + 2hP_1 \Omega.$$

Здесь $A_0 = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2) / A_{22}$, $P_1 = A_{78} - A_{77}$, $P_2 = A_{78} - A_{88}$.

Систему уравнений (2) можно записать в матричной форме

$$A \frac{\partial U}{\partial t} = B \frac{\partial U}{\partial x} + QU \tag{3}$$

относительно вектор-функции U , включающей в себя компоненты линейной и угловых скоростей частиц, а также компоненты тензоров напряжений:

$$U = U(\Psi, W, \Omega, M_{11}, N_{21}, N_{12}, L_{13}).$$

Матрицы-коэффициенты системы A и B симметричны, матрица Q антисимметрична:

$$A = \begin{pmatrix} 2\rho h^3 / 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\rho h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2Ih & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/(2h^3 A_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1/(2h) & a_2/(2h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2/(2h) & a_3/(2h) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/(2hB_{66}) \end{pmatrix},$$

где $a_1 = A_{77} / \tilde{A}$, $a_2 = -A_{78} / \tilde{A}$, $a_3 = A_{88} / \tilde{A}$, $\tilde{A} = A_{77}A_{88} - A_{78}^2$. Ненулевые компоненты матриц $B = \{b_{ij}\}$ и $Q = \{q_{ij}\}$:

$$b_{14} = b_{41} = 1, \quad b_{28} = b_{82} = 1, \quad b_{37} = b_{73} = 1, \\ q_{15} = -q_{51} = -1, \quad q_{35} = -q_{53} = -1, \quad q_{36} = -q_{63} = -1.$$

При выполнении неравенств, гарантирующих неотрицательность упругой энергии:

$$\tilde{A} > 0, \quad A_0 > 0, \quad A_{77} > 0, \quad A_{88} > 0, \quad B_{66} > 0,$$

матрица A положительно определена, и система уравнений (3) является гиперболической по Фридрихсу. Для такой системы выполняется закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(UAU) = \frac{\partial}{\partial x}(UBU),$$

из которого следует корректность постановки задачи Коши и краевых задач с диссипативными граничными условиями. Характеристические свойства системы описываются уравнением

$$\det(cA - B) = 0,$$

корни которого, скорости волн, равны:

$$c_1 = \sqrt{\frac{A_0}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{A_{77}}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{B_{66}}{I}}.$$

Полную систему левых собственных векторов образуют 6 векторов, соответствующих ненулевым собственным числам: $\pm c_1$, $\pm c_2$, $\pm c_3$, и один вектор для $c = 0$.

Начальные данные краевой задачи предполагают задание вектор-функции U при $t = 0$. Граничные условия могут быть сформулированы в терминах скоростей или напряжений:

$$\Psi = \Psi^0 \text{ или } M_{11} = M_{11}^0, \quad W = W^0 \text{ или } N_{12} = N_{12}^0, \quad \Omega = \Omega^0 \text{ или } L_{13} = L_{13}^0.$$

Вычислительный алгоритм

Алгоритм численного решения задачи основан на методе двуциклического расщепления по пространственным переменным и времени. Для системы уравнений общего вида (3) процедура расщепления состоит из трех этапов. На первом этапе решается одномерная задача в направлении x на интервале $(t; t + \Delta t / 2)$. На четвертом этапе к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

новенных дифференциальных уравнений применяется схема Кранка-Николсон второго порядка точности с полным шагом по времени. Третий этап – повторный пересчет задачи в направлении x на интервале $(t + \Delta t / 2; t + \Delta t)$.

Процедура расщепления приводит к одномерным системам:

$$A \frac{\partial U^1}{\partial t} = B \frac{\partial U^1}{\partial x}, \quad U^1(t, x) = U(t, x), \tag{4}$$

$$A \frac{\partial U^2}{\partial t} = QU^2, \quad U^2(t, x) = U^1(t + \Delta t / 2, x), \tag{5}$$

$$A \frac{\partial U^3}{\partial t} = B \frac{\partial U^3}{\partial x}, \quad U^3(t + \Delta t / 2, x) = U^2(t + \Delta t, x). \tag{6}$$

Искомое значение $U(t + \Delta t, x) = U^3(t + \Delta t, x)$. Рассматриваемый метод двуциклического расщепления имеет второй порядок точности по пространственным переменным и времени, если на его этапах используются схемы второго порядка, и обеспечивает устойчивость численного решения при выполнении условия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви.

К каждой из одномерных задач (4), (6) применяется явная монотонная разностная схема Годунова типа "предиктор-корректор", устойчивая при выполнении условия Куранта-Фридрихса-Леви. На втором этапе метода расщепления в (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений применяется неявная разностная схема Кранка-Николсон [7]:

$$A \frac{U^{m+1} - U^m}{\Delta t} = Q \frac{U^{m+1} + U^m}{2},$$

где m — номер шага по времени.

Численное решение представлено на рис. 1. На левой границе стержня действует Λ -образный импульс моментного напряжения L_{13} , начальные данные нулевые. Длительность импульса – 10 шагов по времени, размер сетки – 1000 ячеек, пройдено 1000 шагов по времени. Физические параметры для расчетов были выбраны согласно [5]: $\rho = 1114 \text{ кг / м}^3$, $I = 5.31 \text{e-6 кг / м}$, $A_0 = 5.2 \text{e6 Па}$, $A_{77} = 4.6 \text{e6 Па}$, $A_{88} = 4.8 \text{e6 Па}$, $A_{78} = 0.4 \text{e6 Па}$, $B_{66} = 300 \text{ Н}$. Длина стержня a варьировалась: $a = 0.1 \text{ м}$ (рис. 1, слева), $a = 0.2 \text{ м}$ (рис. 1, справа), $h = a / 40$. Результаты расчетов показывают, что при фиксированном времени угловая скорость и моментное напряжение представляют собой осциллирующие функции.

Для верификации работы численного алгоритма использовалось аналитическое решение задачи о распространении монохроматической волны в стержне, полученное в работах [5, 6].

Заключение

Динамическая модель микрополярных ортотропных упругих стержней с независимыми полями перемещений и вращений приведена к симметричной гиперболической по Фридрихсу форме, позволяющей эффективно применять вычислительные алгоритмы. Для численного решения разработан вычислительный алгоритм, основанный на методе

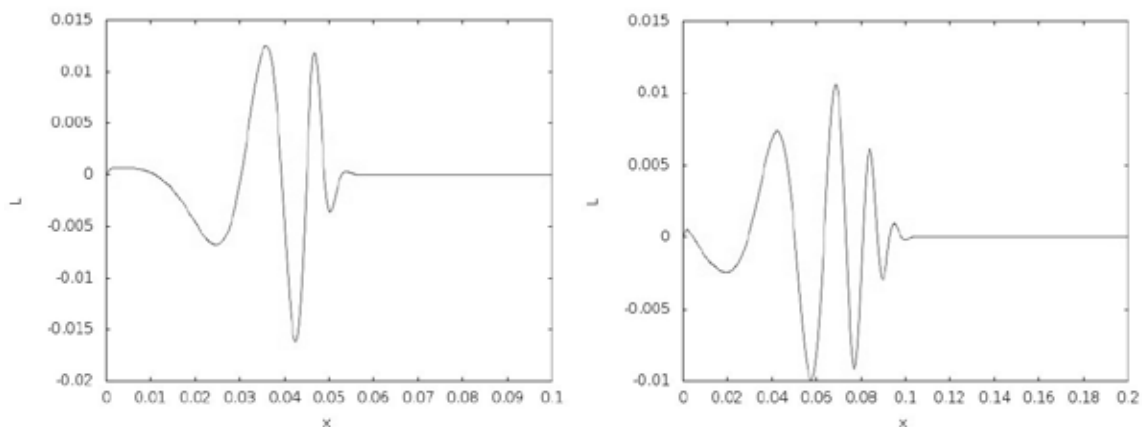


Рис. 1. Линии уровня моментного напряжения L_{13} : $a = 0.1 \text{ м}$ (слева), $a = 0.2 \text{ м}$ (справа)

двучиклического расщепления с применением схемы Годунова и Кранка-Николсон. Выполнены численные расчеты полей скоростей и напряжений в задаче о действии импульсной L -образной нагрузки.

Литература:

1. Cosserat, E., Cosserat F. *Theorie de Corps Deformables* // Chwolson's *Traite Physique*. 2nd ed. — Paris, 1909. — P. 953–1173.
2. Варыгина М.П., Садовская О.В. Параллельный вычислительный алгоритм для решения динамических задач моментной теории упругости // *Вестник Красноярского государственного университета*, 2005. — Вып. 4. — с. 211–215.
3. Варыгина М.П., Киреев И.В., Садовская О.В., Садовский В.М. Программное обеспечение для анализа волновых движений в моментных средах на многопроцессорных вычислительных системах // *Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. акад. М.Ф. Решетнева*, 2009. — Вып. 2 (23). — с. 104–108.
4. Sadovskii, V., Sadovskaya O. and Varygina M. Numerical solution of dynamic problems in couple-stressed continuum on multiprocessor computer systems // *International Journal of Numerical Analysis and Modeling, Series B*, 2011. — V. 2, No. 2-3. — P. 215–230.
5. Маргарян Л.М., Саркисян С.О. Математическое моделирование динамики микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок // *Известия Национальных наук Армении*, 2012. — Т. 65, № 1. — с. 17–28.
6. Маргарян Л.М. Построение прикладных моделей динамических состояний микрополярных упругих ортотропных стержней и их сравнительный анализ // *Автореферат дисс. канд. физ.-мат. н.*, Ереван, 2012. — 36 с.
7. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. — М.: Наука, 1989. — 608 с.

Организация взаимодействия с измерительным оборудованием при проведении испытаний бортовой аппаратуры КА

Вогоровский Родион Вячеславович, аспирант
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск),
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Проведение испытаний сложных технических систем, как правило, выполняется с применением аппаратно-программных испытательных комплексов. Аппаратные средства испытательного комплекса представляют собой разнообразное оборудование, позволяющее проводить измерения различных характеристик объекта контроля. Программные средства выполняют функции управления процессом испытаний. Программное обеспечение имеет двухуровневую архитектуру [1]. На верхнем уровне решаются задачи настройки программного обеспечения низкого уровня, создания измерительных процедур, настройки интерфейсов пользователей, обработки результатов измерений. Программное обеспечение нижнего уровня непосредственно управляет работой измерительного оборудования.

В данной работе рассматривается способ организации взаимодействия между измерительным оборудованием и программным обеспечением верхнего уровня в рамках

аппаратно-программного комплекса проведения испытаний бортовой аппаратуры командно-измерительной системы космического аппарата (БА КИС). Предложенный в работе подход учитывает такие особенности проектирования измерительных систем, как разнотипность измерительных экспериментов, возможность перестройки конфигурации и наращивания функций испытательной системы, широкий частотный спектр исследуемых сигналов и другие [2].

Программное обеспечение для проведения испытаний БА КИС

Бортовая аппаратура командно-измерительной системы обеспечивает передачу командно-программной и телеметрической информации между наземным комплексом управления и космическим аппаратом. На этапе проведения испытаний осуществляется контроль соответствия характеристик БА КИС техническим требованиям. Строгое соответствие характеристик БА КИС заданным

на этапе проектирования техническим требованиям обеспечивает ее правильную и долгосрочную работу на этапе эксплуатации.

Испытания бортовой аппаратуры командно-измерительной системы космического аппарата производятся посредством аппаратно-программного комплекса. Аппаратной частью комплекса выступает система взаимосвязанного измерительного оборудования для проведения высоко- и низкочастотных испытаний БА КИС — контрольно-проверочная аппаратура (КПА). Ее работой в процессе проведения испытаний управляет разрабатываемое программное обеспечение КПА (ПО КПА) [3], основными задачами которого являются:

- подготовка испытаний;
- поддержка проведения испытаний и управление оборудованием КПА во время испытаний;
- обработка и хранение результатов испытаний.

На рис. 1 представлена схема взаимодействия ПО КПА и измерительного оборудования КПА при проведении испытаний с помощью программного обеспечения нижнего уровня — программ взаимодействия с оборудованием. В этих программах реализуются алгоритмы управления оборудованием при проведении определенных измерений, а также алгоритмы первичной обработки результатов измерений. Другими словами каждая программа взаимодействия с оборудованием реализует логику проведения определенного конкретного измерения. Под измерением понимается совокупность операций по применению технического средства, хранящего единицу физической величины, обеспечивающих нахождение соотношения (в явном или неявном виде) измеряемой величины с ее единицей и получение значения этой величины [2]. Стоит отметить, что программы взаимодействия с измерительным оборудованием не являются частью ПО КПА, они реализуются отдельно.

Программы взаимодействия с оборудованием, реализованные по определенным принципам, регистрируются в базе данных ПО КПА в виде специальных элементов, называемых действиями. Одной программе взаимодействия с оборудованием соответствует одно действие. Действие характеризуется наименованием измерения, исполняющим измерительным оборудованием, наборами входных

и выходных параметров. На основании входных параметров программа взаимодействия с оборудованием формирует управляющее воздействие на измерительное оборудование необходимое для проведения измерения. Набор выходных параметров представляет результаты измерений параметров объекта контроля. Примерами действий и соответствующих им измерений являются «Измерение мощности спектра», «Измерение номинала частоты», «Измерение спектра с использованием маски» и другие.

Действия используются в ПО КПА для построения и выполнения сценариев испытаний. Сценарии формируются на этапе подготовки испытаний и представляют собой упорядоченную последовательность действий. Каждый сценарий формируется на основе программы испытаний, в которой определены объект и цели испытаний, виды, последовательность и объем проводимых измерений [4]. Выполнение сценария испытаний заключается в запуске и остановке программ связи с оборудованием согласно порядку следования соответствующих действий в сценарии.

Требования к программам взаимодействия с измерительным оборудованием

Программы взаимодействия с измерительным оборудованием не являются частью ПО КПА, поэтому для того, чтобы ПО КПА могло осуществлять работу с этими программами, они должны быть реализованы в соответствии с заранее определенными требованиями. В рамках текущего проекта принято требование, что программы взаимодействия с оборудованием должны быть реализованы в инструментальной среде разработки программного обеспечения LabView в виде исполняемых приложений на основе виртуальных инструментов VI (Virtual Instrument), в которых описывается логика выполнения измерения. Взаимодействие этих программ с ПО КПА осуществляется с помощью механизма сетевых переменных Shared Variables (механизм LabView для передачи данных по сети). Сетевые переменные характеризуются наименованием, сетевым адресом, типом передаваемых данных и типом доступа (записи и чтения значений переменной).

Каждая программа взаимодействия с оборудованием для организации корректного взаимодействия с ПО КПА

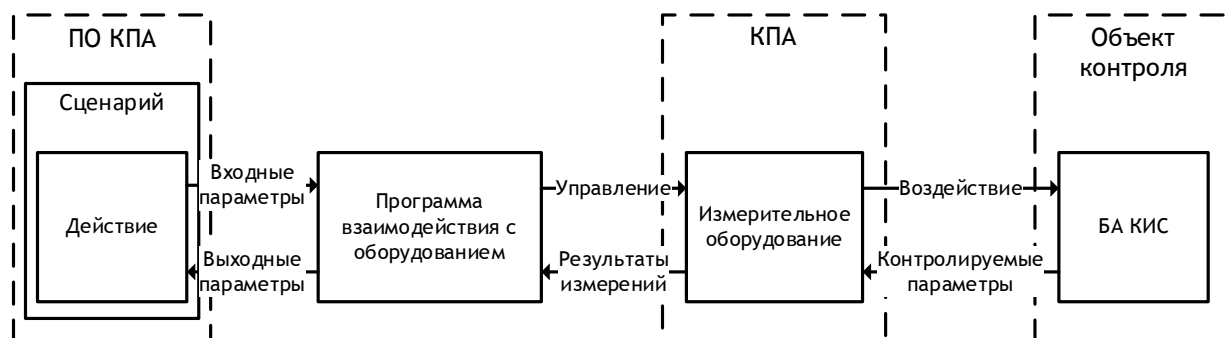


Рис. 1. Процесс проведения одного измерения



Рис. 2. Схема информационного обмена ПО КПА с программами взаимодействия с оборудованием

должна реализовывать схему информационного обмена, представленную на рис. 2. Используются три набора сетевых переменных:

- служебные переменные (переменные обработки ошибок и переменная запуска-остановки);
- входные переменные для считывания входных параметров действия;
- выходные переменные для передачи выходных параметров действия.

Служебные переменные предназначены для управления работой программы взаимодействия с оборудова-

нием и обработки ошибок во время проведения измерения. Список служебных переменных приведен в таблице 1.

С помощью входных сетевых переменных осуществляется передача входных параметров действия. Одна сетевая переменная должна соответствовать одному входному параметру действия. Значения входных параметров используются для формирования управляющего воздействия на измерительное оборудование при проведении испытаний. При считывании значений из сетевых переменных должна выполняться проверка на их корректность. В случае появления некорректных значений в программе взаимодействия с оборудованием должна генерироваться ошибка.

Таблица 1. Служебные переменные программы взаимодействия с оборудованием

№	Название	Тип данных	Тип доступа	Описание
1	Переменная запуска-остановки	Булевский bool	Чтение и запись	Управляет запуском и остановкой приложения. <i>True</i> — запуск программы; <i>False</i> — остановка программы
2	Переменная «Код ошибки»	Целочисленный int	Запись	В случае возникновения ошибки в переменную записывается код ошибки отличный от 0, программа завершает свое выполнение
3	Переменная «Код предупреждения»	Целочисленный int	Запись	В случае возникновения предупреждения в переменную записывается код предупреждения отличный от 0
4	Переменная «Источник ошибки»	Строка string	Запись	В случае возникновения ошибки или предупреждения в переменную записывается строка, содержащая источник ошибки
5	Переменная «Результат самопроверки»	Строка string	Запись	В переменную записывается строка с результатом самопроверки программы. Если при проведении самопроверки выявлены какие-либо проблемы, выполнение программы прекращается

Для передачи результатов измерения в ПО КПА используются выходные сетевые переменные. Запись результатов в сетевые переменные должна производиться сразу после получения значений в программе взаимодействия с оборудованием. Результаты измерения должны быть представлены в виде пары время-значение, для этого используется специальный тип данных Double Waveform.

Регистрация действий в ПО КПА

Регистрация программ взаимодействия с оборудованием в качестве действий осуществляется в редакторе баз данных ПО КПА. При регистрации действия указывается его наименование, описание, путь к исполняемому файлу программы взаимодействия с оборудованием, адреса служебных сетевых переменных, коды и описания

ошибок, которые могут возникнуть при выполнении измерения. Для описания входных и выходных параметров действия требуется для каждого параметра указать наименование параметра, адрес сетевой переменной, через которую будет передаваться значение параметра, а также единицу измерения и тип данных, используемый для передачи значений. На рис. 3 представлена форма регистрации программы взаимодействия с оборудованием в ПО КПА.

Каждому действию можно добавить несколько вычисляемых параметров, значения которых будут вычисляться по результатам измерения других параметров. Для этих параметров необходимо задать наименование, выбрать алгоритм и установить параметры вычисления (рис. 4). Например, для расчетов применяются алгоритмы вычисления кратковременной и долговременной частотной нестабильности, или расчета параметров импульса.

Имя: Измерение мощности СВЧ в режиме time slot
Дата создания: 11.09.2014

Описание:

Путь к исполняемому файлу: D:\ИСС\КПА\ПО КПА\LabView\builds\for Radex Обзор
Исполняющее оборудование: Измеритель мощности USB-5681

Библиотека сетевых переменных: for Radeon with array
Адрес сетевой переменной запуска-остановки: \\172.16.128.123\for Radeon with array\start-stop

Адрес сетевой переменной "Код ошибки": \\172.16.128.123\for Radeon with array\input array
Адрес сетевой переменной "Источник ошибки": \\172.16.128.123\for Radeon with array\input array

Адрес сетевой переменной "Код предупреждения": \\172.16.128.123\for Radeon with array\input array
Адрес сетевой переменной "Результат самопроверки": \\172.16.128.123\for Radeon with array\input array

Иконка 32*32: Обзор **Иконка 64*64:** Обзор

Ошибки	Группировка	Форма отображения результатов				
Входные параметры	Выходные параметры	Вычисляемые параметры				
Перетяните сюда мышкой заголовок колонки для группировки данных по ней						
№	Название	Сетевая переменная	Тип данн...	Тип	Едини...	.
*	Кликните здесь для добавления новой строки					
1	Тип сигнала	\\172.16.128.123\for Radeon with...	Double	.. Отсутст...		
2	Частота дискретизации	\\172.16.128.123\for Radeon with...	Double	.. Частота	Гц	
3	Амплитуда импульса	\\172.16.128.123\for Radeon with...	Double	.. Напряж...	В	
4	Фаза	\\172.16.128.123\for Radeon with...	Double	.. Фаза	град	

OK Отмена

Рис. 3. Форма регистрации действий

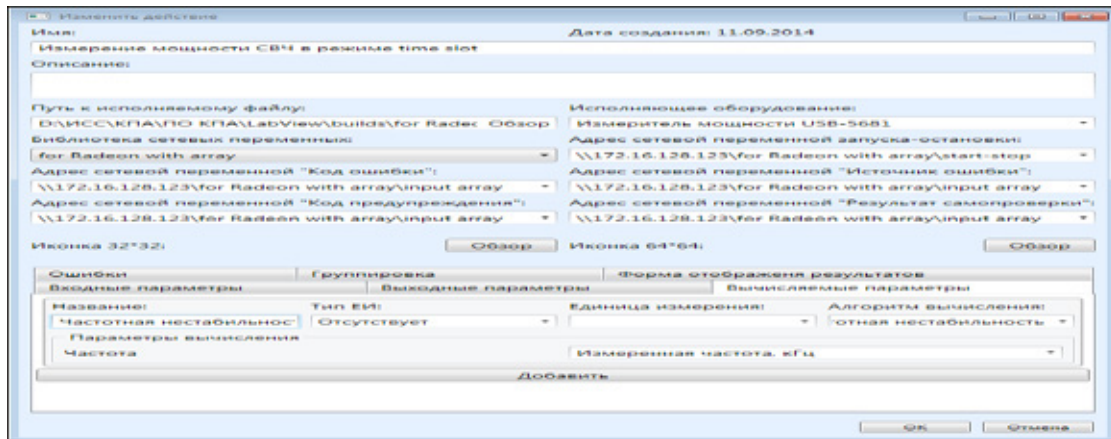


Рис. 4. Форма создания вычисляемых параметров действия

Действие, зарегистрированное в базе данных ПО КПА, используется при построении сценариев, на этапе подготовки испытаний, при их проведении, а также при просмотре и анализе результатов.

Заключение

Предложенный подход к организации взаимодействия с измерительным оборудованием позволяет изменять и дополнять набор используемых методик испытаний за счет регистрации в ПО КПА новых программ взаимодействия с оборудованием. Это обеспечивает возможность проведения испытаний при изменении конфигурации и

наращивании функций измерительного оборудования без внесения изменений в программное обеспечение верхнего уровня (ПО КПА). Таким образом, ПО КПА в составе аппаратно-программного испытательного комплекса позволяет проводить испытания оборудования различного назначения, в том числе и перспективных образцов техники.

ПО КПА реализуется в едином программном комплексе с системой имитационного моделирования подсистем космического аппарата (ПММ БА КИС) [5], что также значительно повышает возможности как при моделировании, так и при проведении испытаний подсистем космического аппарата.

Литература:

1. Батоврин В.К., Бессонов А.С., Мошкин В.В. Автоматизация измерений и испытаний: учебное пособие. — М.: Изд-во МФТИ, 2011. — 128 с.
2. Раннев Г.Г. Измерительные информационные системы. — М.: Издательский центр «Академия», 2010. — 336 с.
3. Вогоровский Р.В. Архитектура программного обеспечения для поддержки проведения испытаний командно-измерительной системы КА // Материалы XVIII Междунар. науч. конф. «Решетневские чтения». — Красноярск: СибГАУ, 2014. — Ч. 2. — с. 237–238.
4. ГОСТ 16504-81. Система государственных испытаний продукции. Испытания и контроль качества продукции. Основные термины и определения. — М., 1982. — 24 с.
5. Ноженкова Л.Ф., Исаева О.И., Грузенко Е.А. Построение программно-математической модели командно-измерительной системы космического аппарата // Информатизация и связь, 2014. — № 1. — с. 87–93.

Математическое моделирование процессов формирования устойчивых образований из частиц с магнитным дипольным моментом

Вяткин Александр Владимирович, кандидат физико-математических наук, учёный секретарь
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск);

Корниенко Виктория Сергеевна, магистрант
Институт математики и фундаментальной информатики СФУ (г. Красноярск)

Статья посвящена моделированию процессов формирования устойчивых во времени образований (структур), состоящих из магнитных частиц (диполей). В работе полностью описана математическая модель и представлены результаты одного из вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: диполь, ферромагнетик, магнитная частица, однодоменная частица, устойчивые образования.

Введение

Большой интерес в науке представляет собой поиск и обоснование устойчивых во времени образований из магнитных частиц (диполей), полученных под действием сил взаимодействия с учетом внешнего магнитного поля [1]. Например, на сегодняшний день с большой достоверностью установлено наличие магнитных материалов в выпадающих микрочастицах импактных космических тел [2]. Во время полета в атмосфере при абляции вещества с поверхности тела срываются перегретые частицы, содержащие железо, его соединения и окислы, которые являются ферромагнетиками [2]. Также имеет место явление остаточной термонамагниченности, которая образуется при остывании материала в геомагнитном поле, начиная с некоторой температуры выше точки Кюри. Ее рост при снижении температуры идет довольно интенсивно, но при остывании до «блокирующей» температуры резко замедляется и происходит «замораживание» приобретенной намагниченности [3]. Термонамагниченность может в десятки и сотни раз превышать намагниченность, возникающую в том же поле при комнатной температуре. Для ее разрушения требуются магнитные поля, в десятки и сотни раз превышающие создавшее ее поле. Итак, в результате абляции и взрывов идет образование микрочастиц с содержанием железа и его окислов. В результате снижения частиц в атмосфере железо и его сплавы хоть и окисляются, но вновь порождают ферромагнитные соединения. При остывании ниже точки Кюри эти частицы приобретают сильный магнитный момент. Так удельный магнитный момент может быть огромным у однодоменных частиц или вкраплений, насчитывающих несколько десятков тысяч молекул.

С целью изучения эффектов, возникающих при формировании устойчивых во времени структур, состоящих из диполей, рассмотрена задача численного моделирования взаимодействия дипольных частиц, обладающих большим по сравнению с внешним магнитным полем дипольным моментом.

Математическая модель

В качестве магнитной частицы рассмотрим сферу с равномерным распределением плотности. Будем считать, что вектор дипольного момента $\vec{\mu}$ частицы проходит через центр сферы.

Для описания движения частиц введем инерциальную [4] декартову систему координат $OXYZ$. Движение каждой частицы представим в виде суперпозиции поступательного и вращательного движений [5]. Поступательное движение определим перемещением центром масс, а вращательное — вокруг центра масс. Для описания поступательного движения частицы выпишем силу, действующую на ее центр масс, и используем второй закон Ньютона. Вращательное движение смоделируем под действием вращательного момента, который определим относительно центра масс. Для описания вращательного движения каждой j -той частицы сопоставим ей локальную подвижную систему координат $O_jx_jy_jz_j$, жестко закрепленную с частицей. Таким образом, вращение каждой частицы отождествим с вращением соответствующей подвижной системы координат $O_jx_jy_jz_j$ осуществим с помощью углов Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ [4], интерпретация которых изображена на рис. 1.

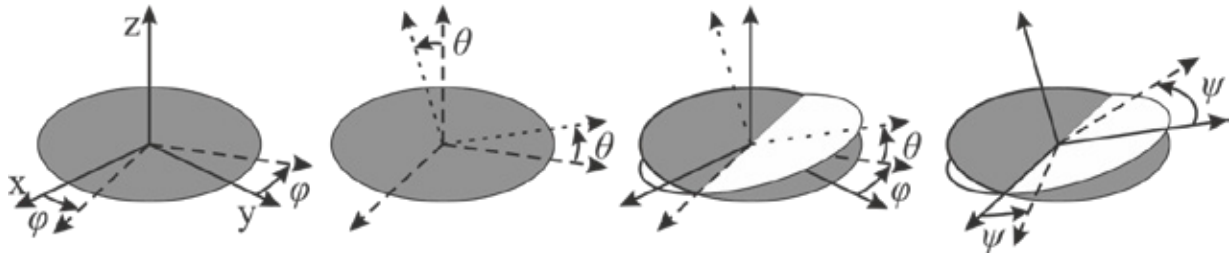


Рис. 1. Углы Эйлера

Постановка задачи

Рассмотрим N частиц. Для каждой из них на момент времени $t = t_0$ в инерциальной декартовой системе координат $OXYZ$ определим следующие величины:

- m_j — масса;
- $\vec{r}_j = (r_j^x, r_j^y, r_j^z)$ — радиус-вектор центра масс частицы;
- $\vec{V}_j = (V_j^x, V_j^y, V_j^z)$ — вектор поступательной скорости центра масс;
- $\vec{\omega}_j = (\omega_j^x, \omega_j^y, \omega_j^z)$ — вектор угловой скорости относительно центра масс;
- $|\vec{\mu}_j|$ — модуль вектора дипольного момента;
- $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ — углы Эйлера.

Кроме того, для каждой j -той частицы $j = 1, \dots, N$ в соответствующей локальной системе координат $O_j x_j y_j z_j$, привязанной к главным центральным осям тензора инерции, зададим

$$\tilde{J}_j^r = \begin{pmatrix} \tilde{J}_j & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_j & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{J}_j \end{pmatrix}, \text{ — тензор инерции;}$$

$$\vec{\mu}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{\mu}_j| \end{pmatrix}. \text{ — вектор дипольного момента.}$$

Здесь и далее символ « $\tilde{}$ » означает, что величина задана в подвижной системе координат.

Требуется для каждой j -ой частицы $j = 1, \dots, N$ определить на момент времени $T > t_0$ значения следующих величин: $\vec{r}_j, \vec{V}_j, \vec{\omega}_j, \varphi_j, \theta_j, \psi_j$.

Уравнения движения

Взаимодействие дипольных частиц осуществляется посредством поля, порожденного всеми диполями и внешним полем. Напряженность полного поля, действующего на j -тую частицу, описывается формулой

$$\vec{H}^{\text{full}}(\vec{r}_j) = \mu_0 \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\vec{r}_{jk}|^3} \left[3 \left(\frac{\vec{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|} \cdot \vec{\mu}_k \right) \frac{\vec{r}_{jk}}{|\vec{r}_{jk}|} - \vec{\mu}_k \right] + \vec{H}^{\text{ext}}(\vec{r}_j), \tag{1}$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная проницаемость вакуума, $\vec{r}_{jk} = \vec{r}_k - \vec{r}_j$, $\vec{H}^{\text{ext}}(\vec{r}_j)$ — внешнее магнитное поле, действующее на j -тую частицу. Функция $U(\vec{r}_j)$ потенциальной энергии взаимодействия j -той молекулы с полным полем определяется формулой

$$U(\vec{r}_j) = -(\vec{H}^{\text{full}}(\vec{r}_j) \cdot \vec{\mu}_j). \tag{2}$$

Известно, что сила $\bar{F}_j = (F_j^x, F_j^y, F_j^z)$, действующая на центр масс j -той частицы, представима в виде

$$\bar{F}_j = -\nabla U(\bar{r}_j), \tag{3}$$

где символ « ∇ » означает оператор градиента: $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$. В качестве дифференциального уравнения, описывающего поступательное движение j -той частицы, используем второй закон Ньютона:

$$m_j \frac{d^2 r_j^q}{dt^2} = F_j^q, \quad q = x, y, z; \quad j = 1, \dots, N. \tag{4}$$

Уравнение (4) сведем к системе обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка посредством использования компонент вектора скорости:

$$\begin{cases} \frac{dr_j^q}{dt} = V_j^q, \\ \frac{dV_j^q}{dt} = \frac{1}{m_j} F_j^q, \end{cases} \quad q = x, y, z; \quad j = 1, \dots, N. \tag{5}$$

После проведения не сложных преобразований, с учетом (1)–(5), получим

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}_j}{dt} = \bar{V}_j, \\ \frac{d\bar{r}_j}{dt} = \frac{\mu_0}{m_j} \sum_{k=1, k \neq j}^N \frac{1}{|\bar{r}_{jk}|^4} \left[15 \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_k \right) \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_j \right) \frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} - \right. \\ \left. - 3 \left(\left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_k \right) \bar{\mu}_j + \left(\frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \cdot \bar{\mu}_j \right) \bar{\mu}_k + (\bar{\mu}_k \cdot \bar{\mu}_j) \frac{\bar{r}_{jk}}{|\bar{r}_{jk}|} \right) \right] + \frac{1}{m_j} (\bar{H}^{\text{ext}}(\bar{r}_j) \cdot \bar{\mu}_j). \end{cases} \tag{6}$$

Уравнения (6) формируют систему ОДУ первого порядка, состоящую из скалярных уравнений.

Вращательное движение j -той частицы опишем вращением частицы вокруг ее центра масс под действием момента сил $\bar{N}_j = (N_j^x, N_j^y, N_j^z)$, который определяется равенством

$$\bar{N}_j = [\bar{\mu}_j \times \bar{H}^{\text{full}}(\bar{r}_j)], \quad j = 1, \dots, N, \tag{7}$$

где символ « \times » означает векторное произведение двух векторов. Например, для двух векторов $\bar{a} = (a^x, a^y, a^z)$ и $\bar{b} = (b^x, b^y, b^z)$ имеет мест равенство

$$[\bar{a} \times \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a^x & a^y & a^z \\ b^x & b^y & b^z \end{vmatrix} = (a^y b^z - a^z b^y, a^z b^x - a^x b^z, a^x b^y - a^y b^x).$$

Для описания вращательного движения каждой j -ой частицы сопоставим ей локальную подвижную систему координат $O_j x_j y_j z_j$, жестко закрепленную с частицей. Таким образом вращение каждой j -ой частицы отождествим с вращением j -ой подвижной системы координат. Описание вращения подвижной системы координат $O_j x_j y_j z_j$ осуществим с помощью углов Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ [4]. Углы $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно. Исходя из определения углов Эйлера, построена [6] матрица A_j перехода от подвижной системы координат $O_j x_j y_j z_j$ к инерциальной системе $OXYZ$

$$A_j = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j \cos\psi_j - \sin\varphi_j \cos\theta_j \sin\psi_j & -\cos\varphi_j \sin\psi_j - \sin\varphi_j \cos\theta_j \cos\psi_j & \sin\varphi_j \sin\theta_j \\ \sin\varphi_j \cos\psi_j + \cos\varphi_j \cos\theta_j \sin\psi_j & -\sin\varphi_j \sin\psi_j + \cos\varphi_j \cos\theta_j \cos\psi_j & -\cos\varphi_j \sin\theta_j \\ \sin\theta_j \sin\psi_j & \sin\theta_j \cos\psi_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}.$$

Итак, зная координаты вектор-столбца \bar{a}_j в подвижной системе координат $O_j x_j y_j z_j$, мы можем вычислить координаты этого вектора \bar{a}_j в инерциальной системе $OXYZ$ по формуле $a = A_j \bar{a}$. Аналогично построена матрица B_j перехода от инерциальной системы координат к подвижной системе

$$B_j = \begin{pmatrix} \cos\psi_j \cos\varphi_j - \sin\psi_j \cos\theta_j \sin\varphi_j & \cos\psi_j \sin\varphi_j + \sin\psi_j \cos\theta_j \cos\varphi_j & \sin\psi_j \sin\theta_j \\ -\sin\psi_j \cos\varphi_j - \cos\psi_j \cos\theta_j \sin\varphi_j & -\sin\psi_j \sin\varphi_j + \cos\psi_j \cos\theta_j \cos\varphi_j & \cos\psi_j \sin\theta_j \\ \sin\theta_j \sin\varphi_j & -\sin\theta_j \cos\varphi_j & \cos\theta_j \end{pmatrix}.$$

Вращательное движение каждой j -ой частицы опишем дифференциальным уравнением моментов, которое в подвижной системе координат $O_j x_j y_j z_j$ имеет вид

$$\frac{d\bar{L}_j}{dt} + [\bar{\omega}_j \times \bar{L}_j] = \bar{N}_j, \quad j = 1, \dots, N. \tag{8}$$

Здесь \bar{L}_j — момент импульса j -ой частицы, который определяется в виде

$$\bar{L}_j = \tilde{J}_j^T \bar{\omega}_j, \quad j = 1, \dots, N. \tag{9}$$

Поскольку все диагональные элементы тензора инерции \tilde{J}_j^T равны между собой, то

$$[\bar{\omega}_j \times \bar{L}_j] = 0, \quad j = 1, \dots, N. \tag{10}$$

Так как каждая j -тая частица жестко закреплена с соответствующей подвижной системой координат $O_j x_j y_j z_j$, то элементы тензора инертности не меняются со временем

$$\frac{d\tilde{J}_j}{dt} = 0, \quad j = 1, \dots, N. \tag{11}$$

С учетом (9)–(11) уравнение моментов (8) сводится к системе ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{\omega}_j^x}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^x}{\tilde{J}_j}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^y}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^y}{\tilde{J}_j}, \\ \frac{d\tilde{\omega}_j^z}{dt} = \frac{\tilde{N}_j^z}{\tilde{J}_j}. \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \tag{12}$$

Уравнения (12) характеризуют изменения во времени угловой скорости $\bar{\omega}_j$, заданной в подвижной системе координат $O_j x_j y_j z_j$. Определим, как изменяется во времени сама подвижная система координат. Для этого выпишем уравнения, характеризующие связь между производной по времени от углов Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ и угловой скоростью $\bar{\omega}_j$ [6]

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_j}{dt} = \frac{1}{\sin\theta_j} (\tilde{\omega}_j^x \sin\psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos\psi_j), \\ \frac{d\psi_j}{dt} = \tilde{\omega}_j^z - \cot\theta_j (\tilde{\omega}_j^x \sin\psi_j + \tilde{\omega}_j^y \cos\psi_j), \\ \frac{d\theta_j}{dt} = \tilde{\omega}_j^x \cos\psi_j - \tilde{\omega}_j^y \sin\psi_j, \end{cases} \quad j = 1, \dots, N. \tag{13}$$

Интегрирование системы (12)–(13), содержащей в себе $6N$ скалярных уравнений, в общем случае может быть выполнено только численно.

Начальные данные

Пусть вычислительная область — сфера диаметра D_{dom} . В качестве диполей рассмотрим однодоменные [7] частицы железа шарообразной формы. Показано [8], что радиус таких частиц может достигать значения $1.4 \cdot 10^{-8}$ метра. Для частиц максимального радиуса с приемлемой для нас степенью точности известны [2] их физические параметры:

$$m_j = 0.9 \cdot 10^{-19} \text{ кг}; \quad \tilde{J}_j = 0.7 \cdot 10^{-19} \text{ кгм}^2; \quad |\bar{\mu}_j| = 2.1596 \cdot 10^{-17} \text{ Ам}^2. \quad (14)$$

На начальный момент времени $t = t_0$ поступательную и угловую скорости каждой частицы определим равными нулю

$$V_j^x = V_j^y = V_j^z = 0; \quad \omega_j^x = \omega_j^y = \omega_j^z = 0. \quad (15)$$

Углы Эйлера $\varphi_j, \theta_j, \psi_j$ и координаты радиус-вектора \bar{r}_j будем задавать различными способами с учетом следующих ограничений:

$$\varphi_j \in [0, 2\pi]; \quad \theta_j \in [0, \pi], \quad \psi_j \in [0, 2\pi], \quad |\bar{r}_j| \leq \frac{D_{\text{dom}}}{2}. \quad (16)$$

Минимально допустимым расстоянием d_{min} между центрами масс магнитных частиц определим равным трем диаметрам частицы:

$$d_{\text{min}} = 8.4 \cdot 10^{-8} \text{ м}. \quad (17)$$

Компьютерная арифметика использует ограниченную запись вещественных чисел. Для традиционных языков программирования максимальная точность представления вещественного числа составляет 15 значащих цифр. Поэтому для корректных вычислений желательно, чтобы отношение максимального числа к минимальному по модулю числу не превышало 10^{15} . Исходя из этого ограничения в [9] показано, что диаметр D_{dom} вычислительной области следует задать в следующем виде:

$$D_{\text{dom}} = 10^{-5} \text{ м}. \quad (18)$$

Проведем масштабирование единиц измерения [10] с параметрами указанными в [9]:

$$\frac{\text{кг}}{10^{21}} = \text{кг}^*, \quad \frac{\text{м}}{10^8} = \text{м}^*, \quad \frac{\text{с}}{10^{10}} = \text{с}^*, \quad \frac{A}{10^3} = A^*.$$

Тогда, с учетом (17) вместо (14)–(17) получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-4} \text{ кг}^* \cdot \text{м}^* \cdot (\text{с}^*)^{-2} \cdot (A^*)^{-2}; \\ m_j &= 90 \text{ кг}^*; \quad \tilde{J}_j = 70 \text{ кг}^* \cdot (\text{м}^*)^2; \quad |\bar{\mu}_j| = 215.96 A^* \cdot (\text{м}^*)^2; \\ V_j^x = V_j^y = V_j^z &= 0 \frac{\text{м}^*}{\text{с}^*}; \quad \omega_j^x = \omega_j^y = \omega_j^z = 0 (\text{с}^*)^{-1} \end{aligned} \quad (19)$$

и ограничения

$$\varphi_j \in [0, 2\pi]; \quad \theta_j \in [0, \pi]; \quad \psi_j \in [0, 2\pi]; \quad |\bar{r}_{jk}| \geq 8.4 \text{ м}^* \quad |\bar{r}_j| \leq 500. \quad (20)$$

В качестве начальных данных используем значения (19) и ограничения (20).

Численное решение

Для поиска численного решения системы ОДУ, состоящей из уравнений (6), (12)–(13), использовались три различных метода первого, второго и четвертого порядков точности из семейства явных численных методов типа Рунге-Кутты [11] с контролем точности и устойчивости.

Алгоритм поиска численного решения

Таким образом, для численного моделирования процессов формирования устойчивых образований из частиц с магнитным дипольным моментом был реализован следующий алгоритм:

- 1) Зададим значение времени T и первый шаг по времени τ ;
- 2) Определим число дипольных частиц N и для каждой из них зададим начальные данные в соответствии с (19), (20);
- 3) Запустим цикл по времени. На каждом шаге по времени выполним следующие действия:
 - I. Вычислим векторы $\bar{\mu}_j, j = 1, \dots, N$ по формуле $\bar{\mu}_j = A_j \bar{\mu}_j$;

- II. Определим силы $\bar{F}_j, j = 1, \dots, N$;
- III. По формуле (1) рассчитаем полное магнитное поле $\bar{H}^{\text{full}}(\bar{r}_j)$, действующее на j -тую частицу, $j = 1, \dots, N$;
- IV. Вычислим по формуле (7) значение вращательного момента сил \bar{N}_j , действующего на j -тую частицу, $j = 1, \dots, N$, в инерциальной системе координат $OXYZ$;
- V. Рассчитаем по формуле $\bar{N}_j = B_j \bar{N}_j, j = 1, \dots, N$, вращательный момент сил \bar{N}_j в соответствующей локальной системе координат $O_j x_j y_j z_j$;
- VI. Определим по формуле $\bar{\omega}_j = B_j \bar{\omega}_j, j = 1, \dots, N$, угловую скорость $\bar{\omega}_j$ в соответствующей локальной системе координат $O_j x_j y_j z_j$;
- VII. Сформируем системы ОДУ по формулам (6), (12), (13) и найдем ее решение численным методом;
- VIII. Выполним обновление переменных, значение которых меняется при переходе на следующий слой по времени;
- IX. Пересчитаем по формуле $\bar{\omega}_j = A_j \bar{\omega}_j, j = 1, \dots, N$, новое значение угловой скорости $\bar{\omega}_j$ в инерциальной системе координат $OXYZ$;
- X. Окончим моделирование или перейдем к пункту I цикла по времени.

Вычислительный эксперимент

Изначально была проведена апробация и сравнение численных методов решения систем ОДУ на тестовых задачах. Наиболее точные расчеты за меньшее время вычислений получены с помощью метода Мерсона [12] четвертого порядка точности. Кроме этого был проведен ряд расчетов для тестирования всей программы. В частности, был смоделирован эффект, наблюдаемый при взаимодействии ферромагнитных частиц, разбросанных на листе бумаги, с полем постоянного магнита. Как известно [13], хаотически ориентированные частицы под действием внешнего поля выстраиваются вдоль линий напряженности внешнего поля (рис. 2).

Один из вычислительных экспериментов состоял в следующем. Расположим дипольные частицы под углом $\alpha = 45.573^\circ$ к плоскости XOY , а направление их дипольных моментов зададим случайным образом. Под действием слабого внешнего магнитного поля

$$|\bar{H}^{\text{ext}}| = 4.68 \cdot 10^{-8} \cdot |\bar{\mu}_j|,$$

направленного противоположно оси OZ , магнитные частицы упорядочиваются вдоль линий напряженности внешнего поля (рис. 3).



Рис. 2. Взаимодействие металлических ферромагнитных частиц с полем постоянного магнита

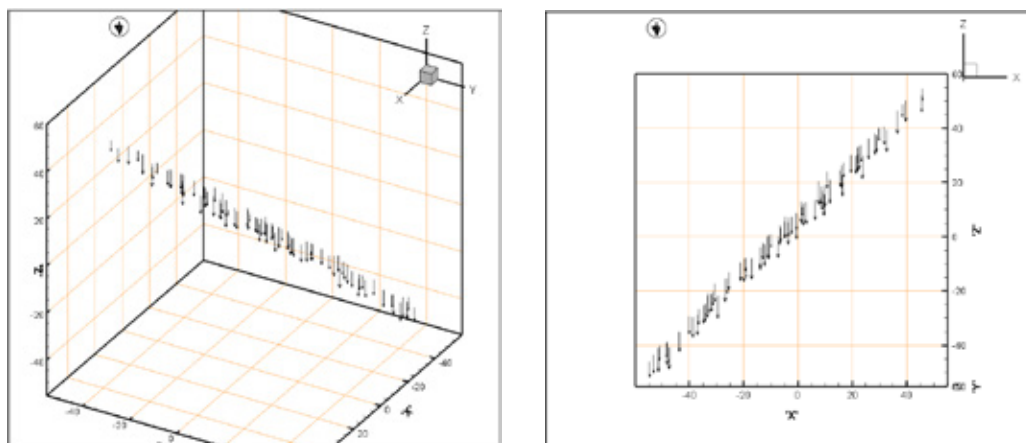


Рис. 3. Начальное положение частиц: слева — вид в пространстве, справа — вид в проекции на плоскость ZOX

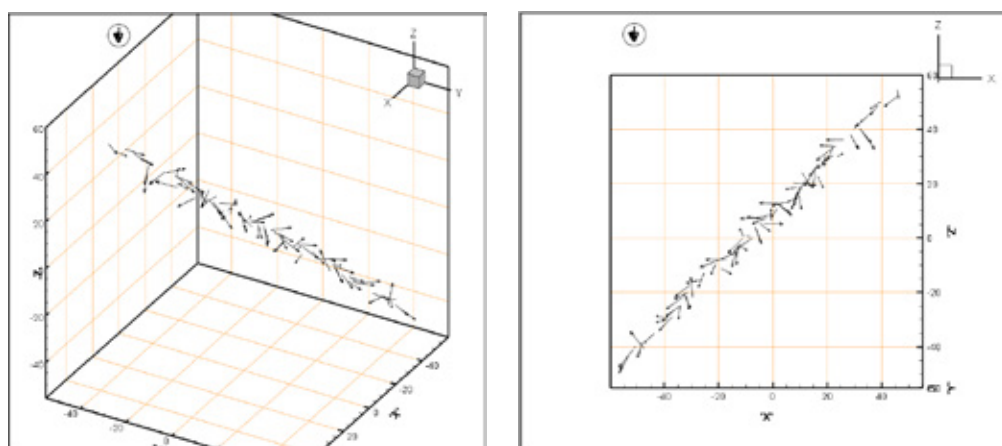


Рис. 4. Положения частиц в момент поиска устойчивого состояния: слева — вид в пространстве, справа — вид в проекции на плоскость ZOX

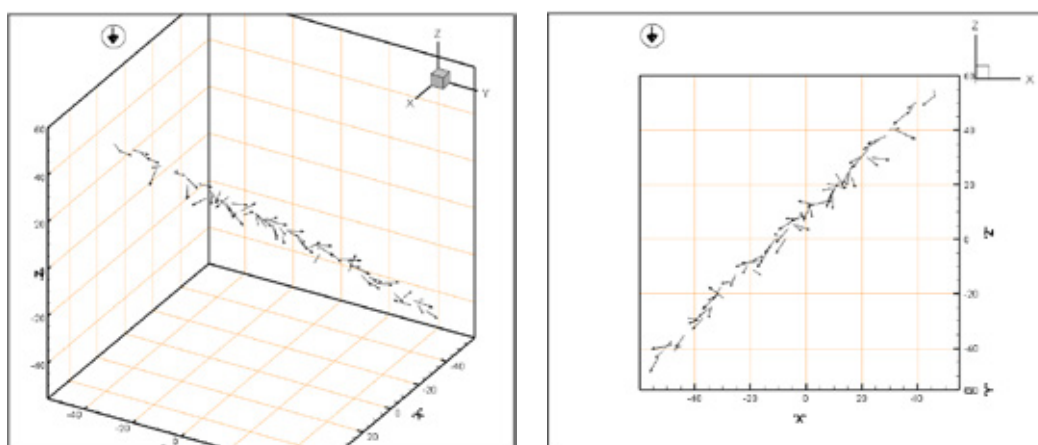


Рис. 5. Устойчивое положение частиц: слева — вид в пространстве, справа — вид в проекции на плоскость ZOX

Однако с течением времени дипольные моменты частиц меняют своё направление (рис. 4). В результате взаимодействия между собой и с внешним полем дипольные моменты частиц ориентируются вдоль направления их расположения в пространстве и принимают устойчивое во времени состояние (рис. 5).

На рис. 6 по оси абсцисс отмечен номер шага по времени, а по оси ординат выписано значение функции потенциальной энергии системы частиц, вычисленной по формуле

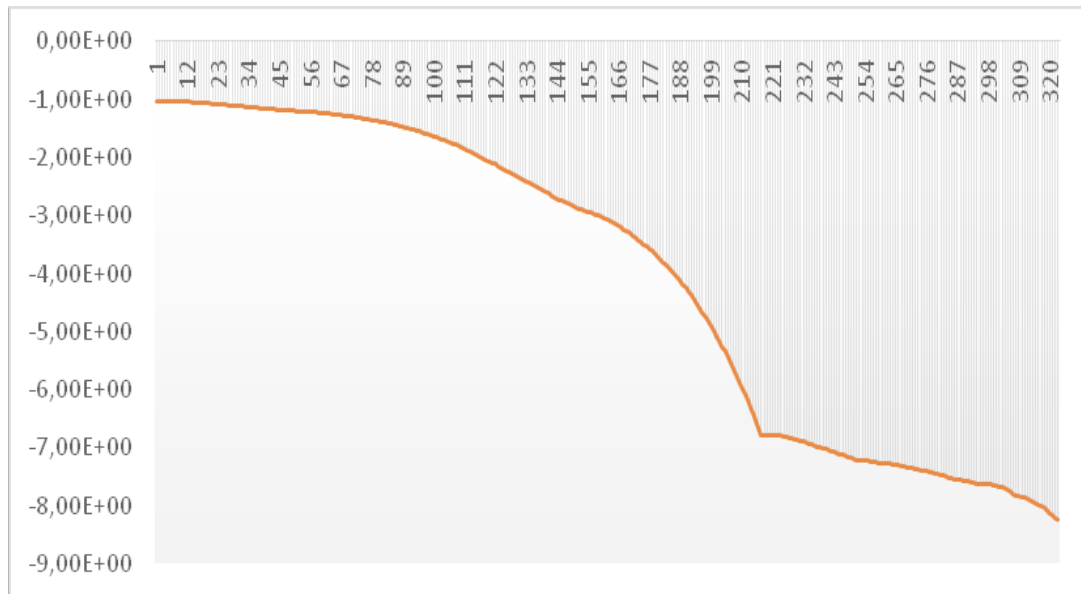


Рис. 6. Изменение потенциальной энергии системы частиц

$$U(\vec{r}_j) = -\sum_{j=1}^N (\vec{H}^{\text{full}}(\vec{r}_j) \cdot \vec{\mu}_j).$$

Как видно из рис. 6, потенциальная энергия системы уменьшается пока не достигнет своего минимального значения, соответствующего устойчивому состоянию, показанному на рис. 5.

Таким образом продемонстрировано, что под действием слабого внешнего поля магнитные частицы ориентируются вдоль линий напряженности внешнего поля, тем самым создавая огромный дипольный момент и формируя в пространстве устойчивые во времени образования.

Заключение

В рамках статьи полностью описана математическая модель взаимодействия магнитных дипольных частиц между собой и с внешним полем. Вращение дипольных частиц в пространстве осуществлено под действием момента сил. Представлен пошаговый алгоритм, который лег в основу создания комплекса программ для изучения процессов формирования устойчивых образований из диполей. В качестве диполей рассмотрена однодоменные частицы железа шарообразной формы с реальными физическими параметрами. Проведена верификация созданного программного комплекса. Посредством вычислительного эксперимента показано, что магнитные частицы, находясь под действием слабого внешнего однородного поля, формируют большой дипольный момент и ориентируются вдоль созданного ими поля, принимая устойчивое во времени состояние.

Литература:

1. Маттис, Д. Теория магнетизма / Д. Маттис. — М.: Мир, 1967.
2. Краткий справочник по химии / ред. О.Д. Куриленко. — 4-е изд., исправл. и доп. — Киев: Наукова думка, 1974. — 992 с.
3. Яновский Б.М. Земной магнетизм / Б.М. Яновский. — М.: МГУ, 1978.
4. Ландау Л.Д. Теоретическая физика в 10 т. Т. 1: Механика. Электродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука, 1973. — 208 с.
5. Киттель, Ч. Введение в физику твердого тела / Ч. Киттель. — М.: Наука, 1978. — 791 с.
6. Поляхов Н.Н. Теоретическая механика / Н.Н. Поляхов, С.А. Зегжда, М.П. Юшков; под ред. проф. Н.Н.Поляхова. — Л.: изд-во Ленингр. ун-та, 1985. — 536 с.
7. Вонсовский С.В. Магнетизм / С.В. Вонсовский. — М.: Из-во физ.-мат. лит., 1971. — 1032 с.
8. Чернавский П.А. Новое в магнитных методах исследования металлнанесенных катализаторов / П.А. Чернавский // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва. им. Д.И. Менделеева). — 2002. — Т. XLVI, №3. — с. 19–30.
9. Вяткин А.В. Численная аппроксимация поля в задаче взаимодействия дипольных частиц: дис. канд. физ.-мат. наук / Вяткин А.В. — Красноярск, 2010. — 132 с.

10. Лабутин А.А. Краткие сведения о международной системе единиц измерений (СИ) / А.А. Лабутин. — Киев: Вища школа, 1975. — 88 с.
11. Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов. — М.: Наука, 1975.
12. Захаров А.Ю. Некоторые результаты сравнений эффективности методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений: Препринт № 125 / А.Ю. Захаров. — М.: Изд. ИПМ АН СССР, 1979. — 25 с.
13. Боровик Е.С. Лекции по магнетизму / Е.С. Боровик, В.В. Еременко, А.С. Мильнер. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 512 с.

Анализ уравнения, описывающего динамическое деформирование в слое микроразрушенной среды

Горохов Александр Андреевич, инженер
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

На глубине порядка 5-10 километров горные породы проявляют сложный комплекс физико-механических свойств [1]. В современной тектонике считается, что именно на таких глубинах зарождаются горные удары и землетрясения. Особую роль в распространении сейсмических воздействий от глубинных событий играют тектонические разломы — трещиноватые структуры, нарушающие сплошность горных массивов [2], [3]. В экспериментах по осевому сжатию микроразрушенной горной породы под высоким боковым давлением [4] установлен переход материала в запредельное состояние, отвечающее падающему участку диаграммы одноосного сжатия (рис. 1).

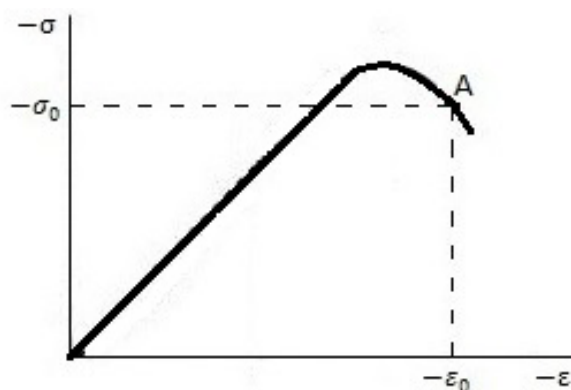


Рис. 1. Диаграмма одноосного сжатия

Математическая модель

В соответствии со сложившимися модельными представлениями [5] глубинный геологический разлом рассматривается как узкая протяженная зона постоянной толщины h , заполненная микроразрушенной горной породой, которая находится в равновесном состоянии под высоким гидростатическим давлением со стороны разделяемых этой зоной горных массивов (рис. 2). Дополнительное давление на берегах разлома $q(x, t)$, создаваемое проходящими через массивы упругими волнами, возбуждает волновое движение в разломе. Такое движение протекает в значительной степени независимо от процессов, происходящих в массивах, способствует высвобождению запасенной в массивах упругой энергии, и могут служить предвестниками крупных сейсмических событий.

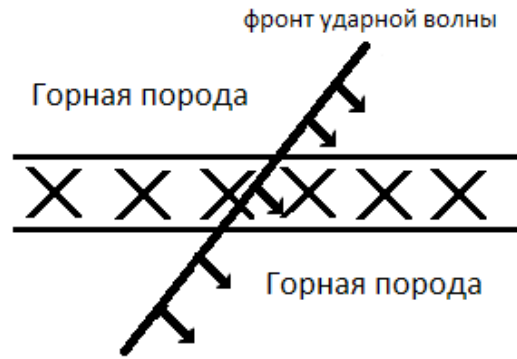


Рис. 2. Схема нагружения

Пусть u и w — смещения в разломе в продольном и поперечном направлениях x и z , вызванные действием дополнительного давления в фоне сильного гидростатического сжатия. Основное предположение развиваемой математической модели состоит в том, что потенциал дополнительной упругой деформации горной породы в разломе задается выражением

$$W = \frac{k}{2}(u_x + w_z)^2 - \frac{\mu}{2}(u_x - w_z),$$

в котором первое слагаемое описывает объемную деформацию среды с касательным модулем объемного сжатия k , второе — разупрочнение материала при сдвиге с касательным модулем разупрочнения μ .

Для такого потенциала закон Гука приводится к определяющим уравнениям:

$$p = -\frac{\partial W}{\partial u_x}, \quad q = -\frac{\partial W}{\partial w_z}, \quad -p = (k - \mu)u_x + (k + \mu)w_z, \quad -q = (k + \mu)u_x + (k - \mu)w_z. \tag{1}$$

Отсюда может быть получено уравнение

$$(k - \mu)p = 4k\mu u_x + (k + \mu)q,$$

связывающее дополнительное давление в направлении разлома с продольной деформацией, которое качественно согласуется с диаграммой на рис. 1. Интегрирование последнего уравнения (1) при отсутствии прогиба срединной линии разлома в предположении о постоянной продольной деформации по толщине приводит к следующему выражению для поперечного смещения

$$w = -z \frac{k + \mu}{k - \mu} u_x - z \frac{q}{k - \mu}.$$

Таким образом кинетическая энергия участка разлома длины l с учетом энергии поперечного движения вычисляется по формуле:

$$I = \frac{\rho h}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx dz = \frac{\rho h}{2} \int_0^l \left(\dot{u}^2 + r^2 \left[\frac{k + \mu}{k - \mu} \dot{u}_x + \frac{\dot{q}}{k - \mu} \right]^2 \right) dx,$$

где $r = h(2\sqrt{3})$ — радиус инерции поперечного сечения. Точка над символом означает частную производную по времени.

Потенциальная энергия упругой деформации равна

$$\Pi = \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l W dx dz = h \int_0^l W(u_x) dx \quad W = \frac{k}{2} \left(\frac{2\mu u_x + q}{k - \mu} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{2k u_x + q}{k - \mu} \right)^2.$$

В соответствии с принципом Гамильтона-Остроградского вариация функционала действия при фиксированных начальном и конечном состояниях механической системы равна нулю:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta T - \delta \Pi + \delta A) dt = 0.$$

Здесь δA – виртуальная работа внешних сил, равная сумме работ дополнительного давления на берегах разлома и приращений давлений p_0, p_1 в концах рассматриваемого участка:

$$\begin{aligned} \delta A &= -2 \int_0^l q \delta w|_{z=h/2} dx + \int_{-h/2}^{h/2} (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}) dz = \\ &= h \frac{k + \mu}{k - \mu} \int_0^l q \delta u_x dx + h (p_0 \delta u|_{x=0} - p_1 \delta u|_{x=l}). \end{aligned}$$

Непосредственное вычисление вариаций приводит к промежуточному уравнению

$$\begin{aligned} \int_0^l \int_{t_0}^l \left(\rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho r^2 \frac{k + \mu}{k - \mu} \left(\frac{k + \mu}{k - \mu} \dot{u}_x + \frac{\dot{q}}{k - \mu} \right) \delta \dot{u}_x + \frac{4k\mu}{k - \mu} u_x \delta u_x + \frac{k + \mu}{k - \mu} q \delta u_x \right) dx dt = \\ = \int_{t_0}^{t_1} (p_1 \delta u|_{x=l} - p_0 \delta u|_{x=0}) dt, \end{aligned}$$

из которого после применения формулы интегрирования по частям к интегралам, содержащим производную от δu по времени и по пространственной переменной, с учетом произвольности вариации внутри интервала $(0, l)$ и на его границах, вытекает уравнение движения

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} = f(x, t) \tag{2}$$

где

$$a^2 = \frac{4k\mu}{\rho(k - \mu)}, \quad b = r \frac{k + \mu}{k - \mu}, \quad f = g_x, \quad g(x, t) = -\frac{k + \mu}{\rho(k - \mu)} q + r^2 \frac{k + \mu}{(k - \mu)^2} \ddot{q}$$

и динамические граничные условия

$$\rho(a^2 u_x - b^2 \ddot{u}_x - g)|_{x=0, l} = p_{0,1}.$$

Кинематические граничные условия для уравнения (1) ставятся обычным способом: задаются смещения в концах интервала $u|_{x=0, l} = u_{0,1}$, которые могут зависеть от времени. Начальные данные формулируются так же, как и для классического волнового уравнения:

Для анализа корректности задачи Коши в рамках полной модели построим частные решения однородного уравнения (2) вида $u = U(t) \sin kx$. Подстановка приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка $(1 + b^2 k^2) \ddot{U} = a^2 k^2 U$, оба решения которого $U = e^{\pm \lambda t}$ оказываются ограниченными при $k \rightarrow \infty$, так как

$$\lambda = \frac{ak}{\sqrt{1 + b^2 k^2}} \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Отсюда следует, что инерция поперечного движения является регуляризирующим фактором в рассматриваемой математической модели.

Основной недостаток моделирования волновых процессов на основе уравнения (2) состоит в том, что оно не описывает диссипативных процессов. Такие процессы в грунтах и горных породах учитываются определяющими уравнениями вязкоупругой среды Кельвина-Фойхта. В соответствии с этой схемой нормальное напряжение σ в разломе разлагается в сумму двух слагаемых – упругого и вязкого. Для разупрочняющейся среды упругое напряжение находится по формуле $s = -\rho a^2 u_x$. Вязкое напряжение удовлетворяет закону Стокса: $\sigma - s = \eta \dot{u}_x$, где η – коэффициент вязкости. В терминах скоростей и напряжений полная система уравнений, учитывающая вязкие свойства среды, приводится к следующему виду:

$$\rho \ddot{u} - \rho b^2 \ddot{u}_{xx} = \sigma_x + f, \quad s = -\rho a^2 u_x, \quad \sigma = s + \eta \dot{u}_x. \tag{3}$$

После очевидных преобразований система (3) приводится к уравнению:

$$\ddot{u} + a^2 u_{xx} - b^2 \ddot{u}_{xx} - \eta \dot{u}_{xx} = f(x, t), \quad \text{где } \eta = \nu / \rho.$$

Используя общее уравнение монохроматической волны $u = \hat{u} e^{i(\omega t - kx)}$, получим дисперсионное уравнение для (3) при $f \equiv 0$:

$$\omega^2 + b^2 \omega^2 k^2 + a^2 k^2 = i \eta \omega k^2, \tag{4}$$

где $k = k_1 + ik_2$. Из уравнения (4) можно определить зависимость фазовой скорости c и декремент затухания волны λ от частоты ω :

$$c = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k}, \quad \lambda = -\frac{1}{\operatorname{Im} k}.$$

На рис. 3 и 4 приведены соответствующие графики, при построении которых были взяты некоторые модельные константы упругости.

График на рис. 3 показывает, что высокочастотные волны наряду с низкочастотными имеют высокую скорость распространения в разломе, которая может превышать скорость ударной волны в блоках в отличие от волн умеренной частоты, обладающих низкой скоростью. Из рассмотрения графика на рис. 4 следует, что высокочастотные волны быстро затухают по мере распространения вдоль слоя, а низкочастотные распространяются практически без затухания.

Заключение

В рамках предположения о закритическом деформировании микроразрушенного материала в глубинном тектоническом разломе, рассматриваемом как узкая протяженная зона, разделяющая массивные блоки горной породы, по-

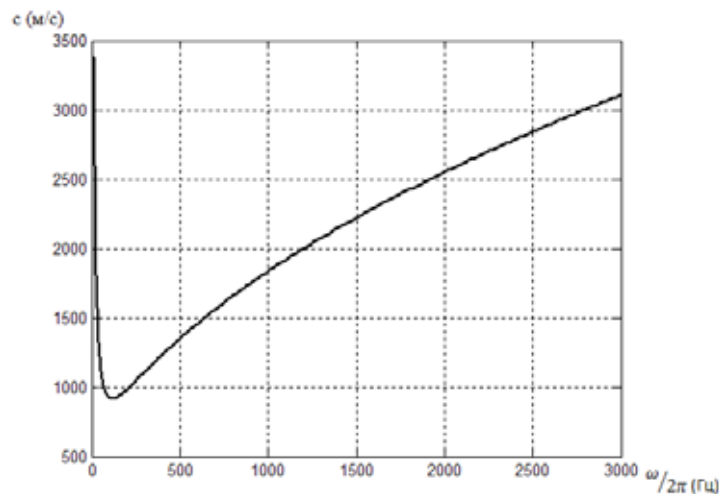


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости от циклической частоты

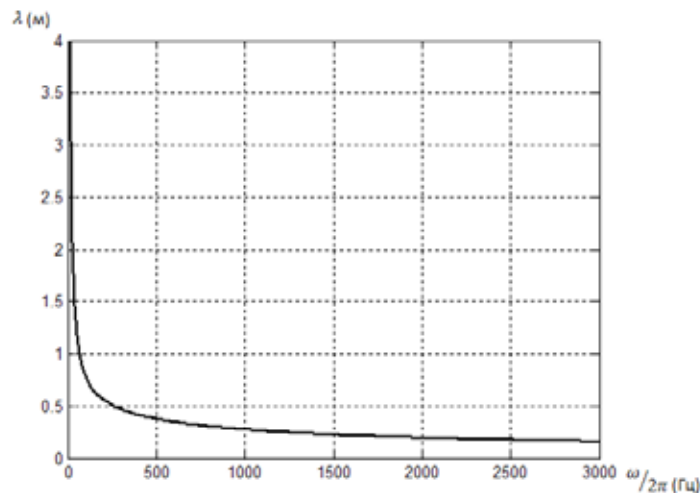


Рис. 4. Зависимость декремента затухания от циклической частоты

лучено модельное уравнение для описания динамических процессов, обусловленных распространением упругих волн в блоках. Показано, что наряду с ограниченными решениями типа монохроматических волн, уравнение обладает экспоненциально растущими со временем решениями — прогрессирующими стоячими волнами, но это не приводит к некорректности постановки задачи Коши. На основе дисперсионного анализа показано, что в соответствии с данным уравнением низкочастотные возмущения в разломе распространяются с высокими скоростями, которые могут превосходить скорости волн в блоках, сохраняя неизменную амплитуду на больших временах пробега. Высокочастотные волны также движутся с большими скоростями, в отличие от волн средней частоты, скорости которых относительно невелики, но их амплитуды быстро затухают по мере продвижения вдоль разлома.

Автор выражает благодарность проф. Садовскому В.М. за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература:

1. Stavrogin A.N., Tarasov B.G. *Experimental Physics and Rock Mechanics (Results of Laboratory Studies)*. India: Balkema, 2001. — 356 p.
2. Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкин А.А. *Глубинная геодинамика*. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. — 409 с.
3. Гольдин С.В. Дилатансия, переупаковка и землетрясения // *Физика Земли*, 2004. — № 10. — с. 37–54.
4. Tarasov B.G., Randolph M.F. Frictionless shear at great depth and other paradoxes of hard rocks. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Absir*, 2008. — V. 45, No. 3. — P. 316–328.
5. Макаров П.В., Смолин И.Ю., Евтушенко Е.П., Перышкин А.Ю. Модель землетрясения как сверхбыстрый катастрофический этап эволюции нагружаемой геосреды // *Физическая мезомеханика*, 2010. — Т. 13, спец. вып. — с. 29–35.

Оптодинамические эффекты в системах связанных плазмонных наночастиц и их проявление в спектрах плазмонного поглощения

Ершов Александр Евгеньевич, кандидат физико-математических наук
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Исследования нанокompозитных материалов, содержащих агрегаты плазмонно-резонансных наночастиц, приобрели особую актуальность в связи с обнаружением у них ряда уникальных оптических свойств и возможности многочисленных приложений [1–5].

При этом агрегаты с локально анизотропной структурой обладают свойством гигантского усиления пространственно локализованных электромагнитных полей вблизи частиц, резонансных внешнему электромагнитному полю. Появление высокодобротных оптических резонансов наночастиц связано с возбуждением поверхностных плазмонов, а само усиление наблюдается в области неоднородно уширенной полосы плазмонного поглощения.

За десятилетия, прошедшие с начала этих исследований, накоплен большой объем экспериментальных данных и выявленных закономерностей по воздействию импульсного лазерного излучения на такие материалы, который не получил должного объяснения в силу сложности и взаимосвязанности сопутствующих процессов. Эти процессы охватывают взаимосвязанные термодинамические, оптические, физико-химические, механические и другие явления.

В [6] представлен обзор работ с результатами экспериментальных исследований, в которых были обнаружены нетривиальное проявление разнообразных нелинейно-оптических процессов в агрегированных нанокolloидах благородных металлов, а также фотохромные реакции, лежащие в основе эффекта оптической памяти нанокompозитов.

Одним из важных факторов, влияющих на физические процессы в импульсных полях, является продолжительность воздействия оптического излучения на резонансные частицы коллоидных агрегатов. Такие процессы могут сопровождаться как нереверсивным сдвигом соседних наночастиц в резонансных доменах агрегатов, так и утратой резонансных свойств наночастиц при их нагреве и плавлении.

В данной работе проведен анализ основных механизмов, лежащих в основе процесса взаимодействия многочастичного агрегата, состоящего из металлических наночастиц, с лазерным излучением с частотой, лежащей в области плазмонного поглощения этих частиц.

В работе [7] была представлена модель оптодинамических явлений в коллоидных агрегатах, состоящих из связанных металлических частиц, которые подвергаются воздействию импульсного лазерного излучения пикосекундной длительности. Эти явления определяют оптические отклики нанокомпозитных материалов и нанокolloидов на действие импульсного лазерного излучения.

Математическая модель

Вкратце остановимся на описании данной модели [7]. Процесс взаимодействия лазерного излучения с коллоидным агрегатом описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}_i, \quad i = 1 \dots N \quad (1)$$

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = (\mathbf{F}_{\text{vdw}})_i + (\mathbf{F}_{\text{el}})_i + (\mathbf{F}_{\text{opt}})_i + (\mathbf{F}_f)_i, \quad (2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{vdw}} = -\frac{\partial U_{\text{vdw}}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_{\text{el}} = -\frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{F}_{\text{opt}} = -\frac{\partial U_{\text{opt}}}{\partial \mathbf{r}}, \quad (3)$$

$$U_{\text{opt}} = -\frac{1}{4} \text{Re} \sum_{i=1}^N \left[\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \mathbf{d}_i \cdot \left(\frac{\mathbf{d}_i}{\varepsilon_0 \alpha_i} - \mathbf{E}(\mathbf{r}_i) \right)^* - \varepsilon_0 \alpha_i |\mathbf{E}_0|^2 \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{d}_{i\alpha} = \alpha_i \left[(E_0)_\alpha \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_i) + \sum_{j \neq i} \sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}'_{ij}) \mathbf{d}_{j\beta} \right], \quad \alpha, \beta = x, y, z, \quad (5)$$

$$\alpha_i = R_i^3 \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_m}{\varepsilon_i + 2\varepsilon_m - \frac{2}{3} i (R_i |\mathbf{k}|)^3 (\varepsilon_i - \varepsilon_m)}, \quad (6)$$

$$\sigma_e = \frac{4\pi}{|\mathbf{k}|} \text{Im} \left[\sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{E}_0|^2} \right], \quad Q_e = \frac{\sigma_e}{\sum_{i=1}^N \pi R_i^2}, \quad (7)$$

$$\frac{d(E_{\text{el}})_i}{dt} = -\frac{(E_{\text{el}})_i}{\tau_r (T_m)_i}, \quad \tau_r = \tau_0 \exp\left(\frac{U}{k_B T_m}\right), \quad (8)$$

$$(C_e)_i \frac{d(T_e)_i}{dt} = -g[(T_e)_i - (T_i)_i] + \frac{W_i}{V_i}, \quad W_i = \frac{\omega |\mathbf{d}_i|^2}{2\varepsilon_0} \text{Im} \left(\frac{1}{\alpha_i^*} \right), \quad (9)$$

$$\frac{d(Q_i)_i}{dt} = gV_i [(T_e)_i - (T_i)_i] + (q_i)_i V_i, \quad (10)$$

$$(T_i)_i = \frac{(Q_i)_i}{C_i V_i} H((Q_1)_i - (Q_i)_i) + \frac{(Q_i)_i - (Q_2)_i}{C_i V_i} H((Q_1)_i - (Q_i)_i) + T_L(R_i) \cdot H((Q_1)_i - (Q_i)_i). \quad (11)$$

Здесь t — время, прошедшее с начала действия лазерного импульса, m_i , R_i , \mathbf{v}_i , \mathbf{r}_i ; \mathbf{F}_i — соответственно, масса, радиус, скорость, радиус-вектор центра масс и равнодействующая всех сил i -й частицы; U_{vdw} — энергия ван-дер-ваальсова взаимодействия; U_{el} — энергия упругого взаимодействия, обусловленная деформацией полимерных адсорбционных слоев (АС) частиц; U_{opt} — энергия взаимодействия светоиндуцированных диполей как между собой, так и с внешним полем; \mathbf{F}_f — сила (Стокса) вязкого трения; \mathbf{d}_i — индуцированный локальным полем дипольный момент частицы, определяемый методом связанных диполей [7]; $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ — напряженность электрического поля лазерного излучения (\mathbf{E}_0 — амплитуда поля); α_i — дипольная поляризуемость частицы; \mathbf{r}'_{ij} — вектор, соединяющий центры частиц с поправкой на коэффициент пересечения; $G_{\alpha\beta}$ — тензор межчастичного взаимодействия; ε_i — диэлектрическая проницаемость частицы, в которой релаксационный член зависит от температуры, агрегатного состояния и размера частицы; ε_m — диэлектрическая проницаемость окружающей среды; E_{el} — модуль упругости АС; τ_r — время релаксации молекулярных связей АС; $(T_m)_i$ — средняя температура прогретой области около i -ой частицы;

C_e — объемная теплоемкость электронной компоненты; $(T_e)_i$, $(T_i)_i$ — соответственно, температура электронной и ионной компоненты i -ой частицы; g — скорость энергетического обмена между электронной и ионной подсистемами; W_i — поглощаемая частицей мощность лазерного излучения; V_i — объем частицы; ω — циклическая частота лазерного излучения; $(q_1)_i$ — тепловой поток на единицу объема, описывающий тепловые потери; T_L — температура плавления наночастицы. Для учета плавления вместо уравнения для температуры ионной подсистемы частицы используется уравнение (11) для тепловой энергии $(Q_1)_i$ ионной подсистемы. В уравнении (11): $(Q_1)_i$ — тепловая энергия, соответствующая началу плавления частицы; $(Q_2)_i$ — тепловая энергия, соответствующая окончанию плавления частицы.

Важным фактором, который влияет на оптодинамические процессы, индуцированные внешним излучением в резонансном домене, является локальное окружение частиц домена другими частицами [8], которое определяет оптические характеристики данного домена. Под резонансным доменом многочастичного агрегата подразумевается группа близкорасположенных частиц в агрегате, резонансная частота которой совпадает с частотой внешнего излучения. В нашем случае близость частицы к резонансу определяется по максимальному значению наведенного внешним полем дипольного момента. В работе исследуются несколько типов резонансных доменов (моно- и полидисперсных димеров и тримеров (см. рис. 1 в [8])), подвергающихся воздействию лазерного излучения, поляризованного вдоль оси домена.

В соответствии с представлениями [7, 8], физическая картина взаимодействия домена с лазерным излучением выглядит следующим образом. До начала воздействия лазерного импульса частицы в домене находятся в положении устойчивого равновесия ван-дер-ваальсовых и упругих сил (последние обусловлены деформацией полимерных адсорбционных слоев наночастиц). Лазерное излучение высокой интенсивности в импульсных полях пикосекундной длительности порождает светоиндуцированные оптические силы, однако они действуют лишь в течение импульса и не вносят существенный вклад в фотомодификацию домена. В полях наносекундной длительности, при которых также наблюдаются фотохромные эффекты, интенсивность слишком низка для появления заметных оптических сил. Тем не менее, поглощение доменом излучения приводит к нагреву его наночастиц (электронной и ионной компонент металла) и передаче тепловой энергии полимерному адсорбционному слою (АС). Вследствие его нагрева происходит уменьшение модуля упругости АС. Это сопровождается нарушением баланса сил и сближением частиц под действием ван-дер-ваальсова притяжения (вплоть до полного контакта их металлических поверхностей). В свою очередь, изменение межчастичного зазора в домене после окончания импульса (или во время действия импульса) проявляется в сдвиге максимума полосы плазмонного поглощения домена относительно длины волны лазерного излучения. В случае пикосекундных импульсов это приводит к статическим изменениям в спектре, сохраняющихся и после окончания действия импульса. То есть механизм воздействия излучения на положение частиц в домене реализуется через нагрев частиц и изменение свойств их АС.

Кроме того учитывается то, что нагрев и плавление металлического ядра частиц приводит к увеличению константы электронной релаксации свободных электронов, что приводит к снижению добротности плазмонного резонанса, а, значит, также и к изменению взаимодействия лазерного излучения с доменом при ухудшении резонансных свойств системы. Это является причиной динамических спектральных изменений, проявляющихся лишь за время действия пикосекундного импульса.

В предложенной в [7] оптодинамической модели взаимодействия резонансного домена с импульсным лазерным излучением учитывается достаточно широкий ряд взаимосвязанных термодинамических, оптических, физико-химических и механических процессов. Реализация модели воспроизводит наиболее реалистичную картину воздействия импульсного лазерного излучения на резонансный домен по сравнению с уже имеющимися оптодинамическими моделями [9] и включает в себя ранее неучтенные физические процессы и явления [6, 10].

С помощью данной оптодинамической модели получены следующие результаты.

На рис. 1 представлена зависимость от длительности лазерного импульса максимальной температуры $((T_i)_{\max})$ ионной компоненты наночастицы, при которой достигается статическая фотомодификация Ag димера (сближение частиц). Особенности поведения данной кривой объясняются кинетикой изменения модуля упругости АС частиц. Скорость изменения модуля упругости АС частиц возрастает с ростом температуры ионной компоненты материала частиц

$$\left| \frac{dE_{el}}{dt} \right| \sim \exp(-U / k_B T_i) \quad [6].$$

Из этого соотношения следует уменьшение температуры $(T_i)_{\max}$ с ростом длительности

импульса: для фотомодификации при малых длительностях импульса требуется высокая температура, чтобы модуль упругости АС успел уменьшиться за время импульса до значения, достаточного для сближения частиц под действием ван-дер-ваальсова притяжения и проявления статической модификации домена. Однако в диапазоне $\tau = 2 \cdot 10^{-6} - 10^{-5}$ с $(T_i)_{\max}$ опускается до температуры плавления частиц и ниже. Проявление фотомодификации в этом диапазоне зависит

не от максимально достигаемой температуры, а от скорости ее изменения $\frac{d(T_i)_{\max}}{dt}$.

Из рис. 1 видно, что в диапазоне $\tau = 10^{-11} - 10^{-10}$ с максимальная температура меняется слабо. Это объясняется конечной скоростью обмена между электронной и ионной компонентой. Если при больших длительностях импульса тем-

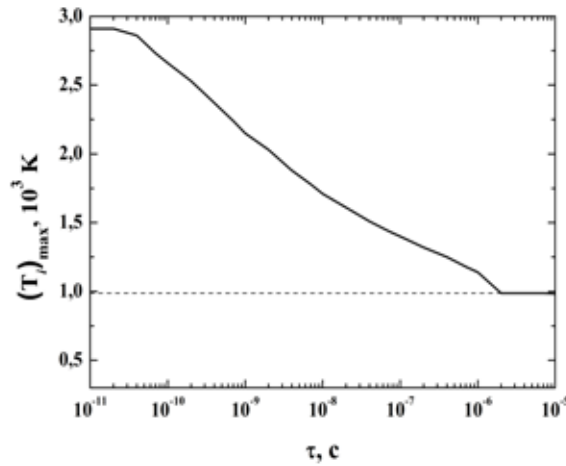


Рис. 1. Зависимость максимальной ионной температуры $(T_i)_{\max}$ частиц монодисперсного Ag димера (радиусы частиц $r_1 = r_2 = 5$ нм), достигаемой при воздействии импульса с пороговой интенсивностью, от длительности импульса. Пунктирная линия показывает температуру плавления частиц

пература ионной компоненты материала частицы начинает уменьшаться сразу после окончания действия, то в случае импульсов малой длительности эта температура продолжает расти и после окончания действия импульса за счет энергии, запасенной в электронной компоненте материала частицы.

При длительности импульса меньшей эффективного времени теплообмена между электронной и ионной компонентой ($\tau < 10^{-11} - 10^{-10}$ с) процесс взаимодействия лазерного импульса с частицами можно рассматривать состоящим из двух этапов. Вначале происходит относительно быстрая передача энергии лазерного импульса электронной компоненте, температура которой не влияет на динамику модуля упругости АС частицы. Уже после этого имеет место относительно медленный процесс передачи энергии от электронной компоненты к ионной. В таких условиях это приводит к тому, что динамика нагрева не зависит от длительности импульса при соответствии плотности энергии импульса пороговой, то есть достаточной для статической фотомодификации вследствие плавления АС частиц.

На рис. 2 представлены зависимости от длительности импульса значений интенсивности (а) и плотности энергии импульса (б), при достижении которых проявляется статическая модификация.

Для объяснения роста пороговой плотности энергии ($I_{\text{mod}} \cdot \tau$) с увеличением длительности импульса в диапазоне $\tau = 10^{-11} \div 10^{-6}$ с на рис. 2(б) необходимо учесть следующее.

Во-первых, потери энергии нагреваемой частицы (Q) вблизи максимальной температуры ионной компоненты T_i определяются теплотерей в окружающую среду. Во-вторых, T_i должна достигать значений, при которых за время порядка длительности импульса упругость АС успевает существенно уменьшиться. То есть, длительность импульса τ и время релаксации τ_r АС должны быть одного порядка:

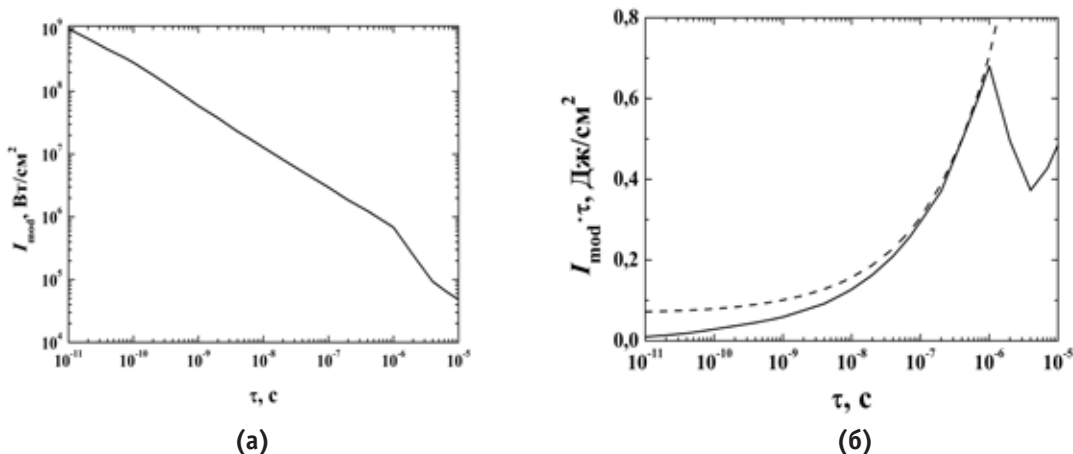


Рис. 2. Зависимость от длительности импульса пороговых значений интенсивности (а) и плотности энергии излучения (сплошная линия) с аппроксимационными значениями (12) (пунктир) (б), соответствующими статическому порогу фотомодификации монодисперсного Ag димера

Таким образом, вводя подгоночные параметры A и W_0 , получаем следующее выражение:

$$I_{\text{mod}} \cdot \tau = A \frac{U_f \cdot \tau^{1/2}}{k_B \ln(\tau/\tau_0)} + W_0. \quad (12)$$

Значения этих параметров $A \approx 0.67 \text{ Дж/К} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{1/2}$, $W_0 \approx 0.06 \text{ Дж/см}^2$ выбирались таким образом, чтобы в диапазоне $\tau = 10^{-9} \div 10^{-6} \text{ с}$ достигалось наилучшее совпадение аппроксимационной зависимости (12) с зависимостью $I_{\text{mod}}(\tau) \cdot \tau$, полученной численно с помощью оптодинамической модели. В этом диапазоне частицы находятся в жидком состоянии, а это означает, что из-за существенного ослабления их резонансных свойств взаимодействие излучения с ними происходит при значительно более низком сечении поглощения.

Расхождение расчетной и аппроксимационной кривых как на малых ($< 10^{-9} \text{ с}$), так и больших ($> 10^{-6} \text{ с}$) временах (рис. 2(б)), на которых у аппроксимационной зависимости продолжается монотонный рост, связано с большей, чем в диапазоне ($10^{-9} < \tau < 10^{-6} \text{ с}$) величиной сечения поглощения. В первом случае ($\tau < 10^{-9} \text{ с}$) это связано с тем, что частица не успевает перейти в жидкое состояние за время действия импульса (сечение поглощения максимально и порог фотомодификации $I_{\text{mod}} \cdot \tau$ низкий). Во втором случае ($\tau > 10^{-6} \text{ с}$) с уменьшением соотношения жидкой и твердой фазы в материале частицы (ее приближением к полной кристаллизации) сечение поглощения также растет по мере увеличения длительности импульса. Большое сечение поглощения означает и более эффективное использование энергии лазерного излучения в условиях резонанса. Рост же пороговой плотности энергии на промежуточных временах ($10^{-9} < \tau < 10^{-6} \text{ с}$) в основном определяется температурой, которая необходима для плавления АС за время импульса. Эти же объяснения справедливы для дальнейшего повышения пороговой плотности энергии в диапазоне $\tau > 4 \cdot 10^{-6} \text{ с}$, когда плавление частиц отсутствует.

На рис. 3 представлен результат воздействия лазерного импульса пикосекундной длительности на монодисперсные (рис. 3 (а)) и полидисперсные (рис. 3 (б)) агрегаты, проявляющий себя через значительное время после окончания импульса (так называемая «статическая модификация»).

Подчеркнем, что на рис. 3 вид дифференциальных спектров, индуцированных пикосекундным импульсом, сохраняется на временах до десятков наносекунд. Объяснение дальнейшей незначительной эволюции этих спектров прежде всего при воздействии наносекундными импульсами требует отдельных исследований.

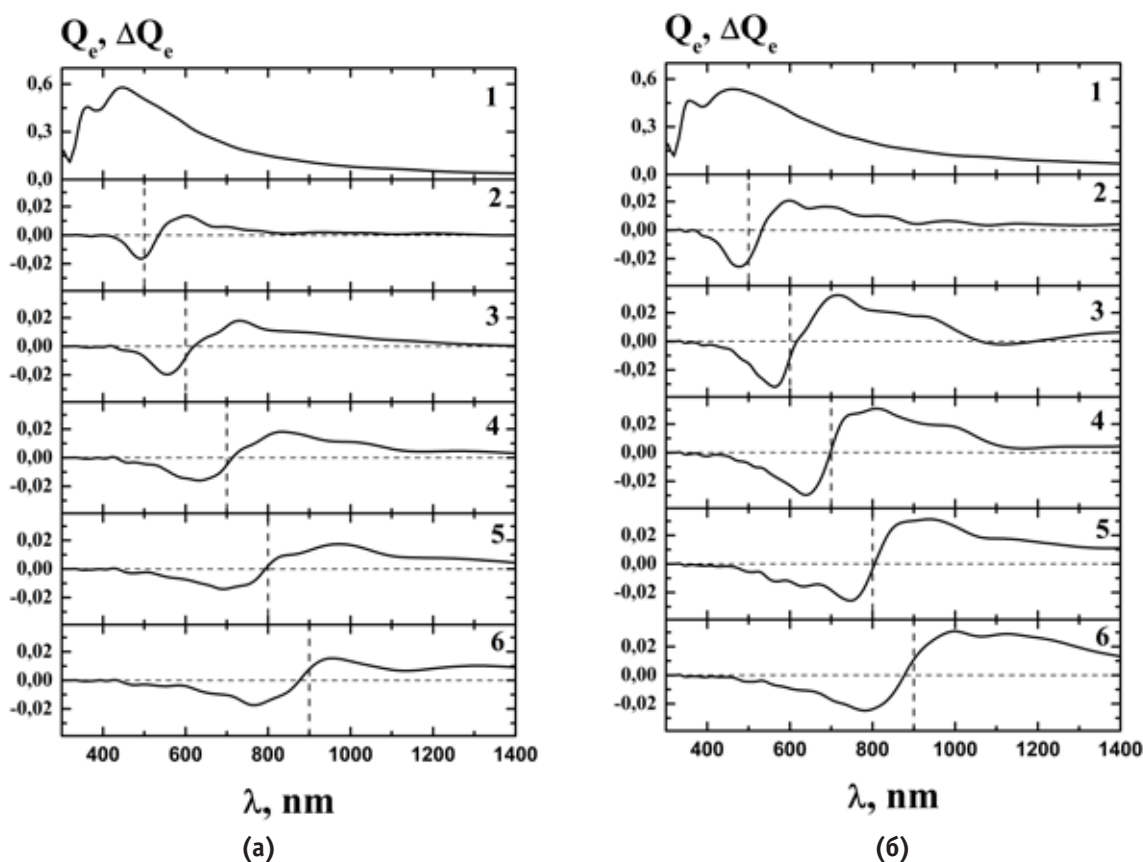


Рис. 3. Статическая фотомодификация. Спектры экстинкции монодисперсных (а) и полидисперсных (б) агрегатов, состоящих из 50 частиц. (1) — исходный спектр, (2)–(6) — разностные спектры экстинкции, полученные через $t = 5 \text{ нс}$ после начала импульса. Длина волны лазерного излучения (2) — 500 нм, (3) — 600 нм, (4) — 700 нм, (5) — 800 нм, (6) — 900 нм. Длительность импульса $\tau = 20 \text{ пс}$, интенсивность излучения $I = 7.5 \cdot 10 \text{ Вт/см}^2$, радиусы частиц (а) — 5 нм, (б) — от 2 до 8 нм

Как видно из представленных рисунков, процесс модификации агрегатов обладает спектральной селективностью. Однако данная селективность обладает рядом особенностей.

Наиболее важная из них — смещение центра провала в коротковолновую область спектра относительно лазерной длины волны. При этом смещение тем больше, чем больше длина волны лазерного излучения. Причина такого сдвига провала заключается в механизме статической модификации. Результатом воздействия лазерного излучения на резонансные домены с максимумами спектра поглощения, лежащими близко к лазерной длине волны, является сближение частиц домена и, как следствие, смещение максимумов спектра поглощения в длинноволновый диапазон. Таким образом, резонансы, находящиеся в коротковолновой области от лазерной длины волны, спектрально замещают резонансы, находящиеся с длинноволновой стороны. При этом чем больше резонансная длина волны домена, тем шире спектр поглощения, а, соответственно, увеличивается и спектральный диапазон модификации, что приводит к большему смещению провала относительно лазерной длины волны.

Кроме того, следствием уширения спектра поглощения каждого резонансного домена при увеличении его резонансной длины волны является вторая особенность представленных результатов — увеличение ширины провала при увеличении длины волны воздействующего лазерного излучения.

Сравнивая процесс модификации в монодисперсных и полидисперсных агрегатах, следует отметить, что глубина спектрального провала у полидисперсных агрегатов значительно больше, чем у монодисперсных. Связано это с тем, что порог статической модификации у резонансных доменов, включающих в себя малые частицы, значительно ниже, чем у доменов, включающих в себя только частицы среднего размера.

В результате применения разработанной модели получены зависимости основных пороговых характеристик процесса фотомодификации коллоидных агрегатов от длительности лазерного импульса. Получены сведения об основных закономерностях фотомодификации многочастичных агрегатов. Показаны особенности модификации полидисперсных агрегатов.

Литература:

1. Kreibitz, U. Optical properties of metal clusters / U. Kreibitz, M. Vollmer. Berlin: Springer Verlag, 1995. — P. 533.
2. Shalaev V.M. Electromagnetic properties of small-particle composites // *Physics Reports*, 1996. — V. 272. — P. 61–137.
3. Shalaev V.M. Nonlinear Optics of Random Media: Fractal Composites and Metal-Dielectric Films / V.M. Shalaev. Berlin: Springer Verlag, 2000.
4. Карпов С.В. Слабко В.В. Оптические и фотофизические свойства фрактально-структурированных золей металлов / С. В. Карпов, В. В. Слабко. Новосибирск: Российская академия наук, Сибирское отделение, 2003.
5. Stockman M.I., Pandey L.N., George T.F. Enhanced Nonlinear-Optical Responses of Disordered Clusters and Composites // *Nonlinear Optical Materials*. New York: Springer-Verlag, 1998.
6. Gavrilyuk A.P., Karpov S.V. Processes in resonant domains of metal nanoparticle aggregates and optical nonlinearity of aggregates in pulsed laser fields // *Applied Physics B*. 2009. — V. 97. — P.163–173.
7. Ershov A.E., Gavrilyuk A.P., Karpov S.V., Semina P.N. Optodynamic phenomena in aggregates of polydisperse plasmonic nanoparticles // *Applied Physics B*. 2014. — V. 115, No. 8. — P. 547–560.
8. Ershov A.E., Gavrilyuk A.P., Karpov S.V., Semina P.N. Property of local environment in resonant domains of polydisperse plasmonic nanoparticle aggregates on optodynamic processes in pulsed laser fields // *Chinese Physics B*. 2015. — V. 24, No. 4. — P. 047804
9. Ganeev R.A., Rysanyansky A I., Kamalov S R., Usmanov T B. Nonlinear susceptibilities, absorption coefficients and refractive indices of colloidal metals // *Phys. D: Appl. Phys.* 2001. — V. 34. — P. 1602.
10. Данилова Ю.Э., Драчёв В.П., Перминов С.В., Сафонов В.П. Нелинейность коэффициентов преломления и поглощения металлических фрактальных кластеров в коллоидных растворах. // *Известия РАН сер. физич.* 1996. — Т. 60, № 3. — С. 18–22.

Проблемы вычислений с высокой точностью при использовании графических ускорителей NVIDIA

Ефремов Александр Александрович, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

В данной статье проанализированы характерные проблемы вычислений с высокой точностью при использовании гибридных вычислительных систем на базе графических процессоров NVIDIA. Выявлены характерные особенности графических процессоров, способные влиять на точность вычислительного эксперимента. В результате данные особенности приводят к расхождению в результаты численных экспериментов. С подобными расхождениями численных результатов автор столкнулся в ходе работы над параллельной реализацией полу-Лагранжевого метода решения начально-краевой задачи для уравнения неразрывности. На основе проведенного исследования автором предлагаются некоторые обходные пути для уменьшения разницы в численных результатах, возникающей вследствие разной аппаратной архитектуры центрального и графического процессоров.

Введение

Проведение вычислительного эксперимента является неотъемлемой частью исследований в области численного моделирования. Одной из важнейших характеристик любого вычислительного эксперимента является точность полученных результатов. Однако для получения точных результатов расчетов вычислителю необходимо хорошо понимать, как устроена работа с числами с плавающей точкой на программном и аппаратном уровнях. Множество действительных чисел является не только бесконечным, но и непрерывным, а память вычислительной системы (ВС) ограничена, таким образом, всегда найдется действительное число, которое не будет иметь точного представления в памяти системы. Числа с плавающей точкой были предложены как один из способов представления действительного числа в памяти, который является компромиссом между точностью и диапазоном принимаемых значений [3, 4].

Исследования, связанные с проблемой представления чисел с плавающей точкой, ведутся с 70-х годов XX столетия, и большинство технических вопросов их арифметики в рамках классических ВС успешно решены. Однако современные параллельные архитектуры, особенно гибридные, основанные на совместном использовании CPU и GPU, вновь обострили проблему точности вычислений и сравнимости получаемых результатов численных экспериментов в разных аппаратных и программных конфигурациях.

Действительно, при использовании гибридных ВС наряду с фундаментальной проблемой неассоциативности операций над числами с плавающей точкой, которая характерна для классических параллельных ВС, на результат вычислений влияет аппаратная архитектура GPU.

В ходе работы над параллельной реализацией полу-Лагранжевого метода решения начально-краевой задачи для уравнения неразрывности [2] автором было выявлено расхождение численных результатов решения, полученных при использовании последовательной и параллельной версии программы. Параллельная версия алгоритма предполагала использование GPU и технологию NVIDIA CUDA в качестве вычислительного сопроцессора. В итоге была предпринята попытка систематизировать причины появления численных расхождений в результатах вычислительных экспериментов при использовании графических процессоров и процессоров общего назначения. Дополнительную информацию по данной проблеме можно получить в источниках [1, 5].

Данная статья описывает некоторые общие причины появления несоответствий в численных результатах при использовании гибридных вычислительных систем. В качестве вычислительного стенда применялся вычислительный узел ИВМ СО РАН Flagman RX240T8.2 на базе графических процессоров Tesla C2050, имеющий 2 шести-ядерных процессора Intel Xeon X5670 и 8 GPU NVIDIA Tesla C2050 [9].

Стандарт IEEE 754

Стандарт IEEE 754 разработан международной ассоциацией IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) и используется для представления чисел с плавающей точкой в двоичном коде. Данный стандарт является наиболее распространённым для вычислений с плавающей точкой, он используется многими микропроцессорами и логическими устройствами, а также программными средствами. Стандарт включает арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление), вычисление квадратного корня, остатка, срав-

нения и операции преобразования типов. Результаты данных операций будут гарантированно одинаковы для всех реализаций стандарта при одинаковом формате хранения числа и режиме округления [1].

Несмотря на наличие стандарта IEEE 754, проблема переносимости, а также проблема воспроизводимости численных расчетов, не были решены полностью. Существует несколько причин, которые влияют на точность вычислений, а также, в случае применения параллельных вычислительных систем, на воспроизводимость численных результатов [1]:

1. Порядок выполнения арифметических операций и сопутствующие округления.
2. Проблема приближенного вычисления математических функций.
3. Неполная поддержка последних версий стандарта IEEE 754 как со стороны GPU, так и со стороны CPU.
4. Совместное использование аппаратных технологий, предполагающих применение расширенной и одинарной/двойной точности.

Остановимся на каждой из причин подробнее.

Порядок выполнения арифметических операций

Исследование ошибок округления всегда осложняется тем фактом, что данные ошибки в результате приводят к качественному отклонению от нормального поведения. Операции сложения и умножения чисел с плавающей точкой обладают свойством коммутативности, однако в то же время не обладают свойствами ассоциативности и дистрибутивности [3, 4]. На рис. 1 представлен пример, показывающий отсутствие ассоциативности операции сложения при работе с числами с плавающей точкой.

Проблема отсутствия ассоциативности и дистрибутивности при работе с числами с плавающей точкой особенно остро встает при использовании параллельных вычислительных систем. Очевидно, что при наличии нескольких вычислительных потоков невозможно гарантировать определенный порядок выполнения арифметических операций. Причем наиболее явно данная проблема

проявляет себя при использовании именно GPU для проведения расчетов в силу массивно-параллельной архитектуры последних.

Аппаратная архитектура GPU является по сути последовательно-параллельной. Данные разбиваются на блоки, где каждому элементу данных соответствует определенный вычислительный поток. Число потоков в каждой блоке, как и число блоков, регулируется при запуске вычислительного ядра (рис. 2). Каждый блок распределяется планировщиком на свой вычислительный потоковый процессор путем постановки блока в очередь задач потокового процессора. Соответственно блоки на каждом процессоре выполняются последовательно, тогда как каждый потоковый процессор независимо обрабатывает каждый блок. Потоки внутри каждого блока исполняются параллельно. Данные особенности архитектуры приводят к тому, что от запуска к запуску результаты вычислений могут отличаться, поскольку значительно меняется порядок выполнения операций. Более подробно с архитектурой GPU компании NVIDIA можно ознакомиться в [10].

Данную особенность аппаратной архитектуры GPU необходимо учитывать при оценке полученных численных результатов расчетов. В целях отладки параллельной версии алгоритма автором рекомендуется запускать вычислительное ядро с одним блоком и одним потоком в блоке. В этом случае гарантируется отсутствие недетерминированности при вычислениях вследствие аппаратных особенностей GPU, поскольку в подобном режиме вычисления производятся в однопоточном режиме.

Проблема приближенного вычисления математических функций

В отличие от простых арифметических операций, задача получения лучшего значения числа с плавающей точкой при использовании математических функций несколько сложнее. Данная проблема получила название «дилеммы составителя таблиц» [1].

Дилемма заключается в следующем. Для того чтобы гарантировать корректно округленный результат, в

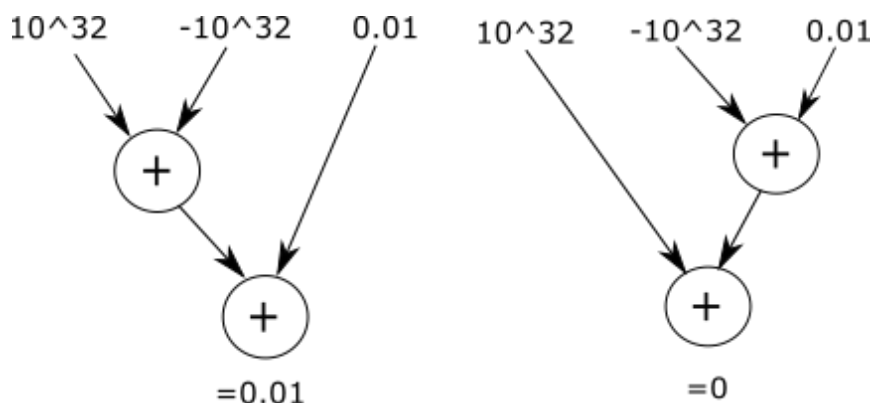


Рис. 1. Неассоциативность операции сложения при работе с числами с плавающей точкой

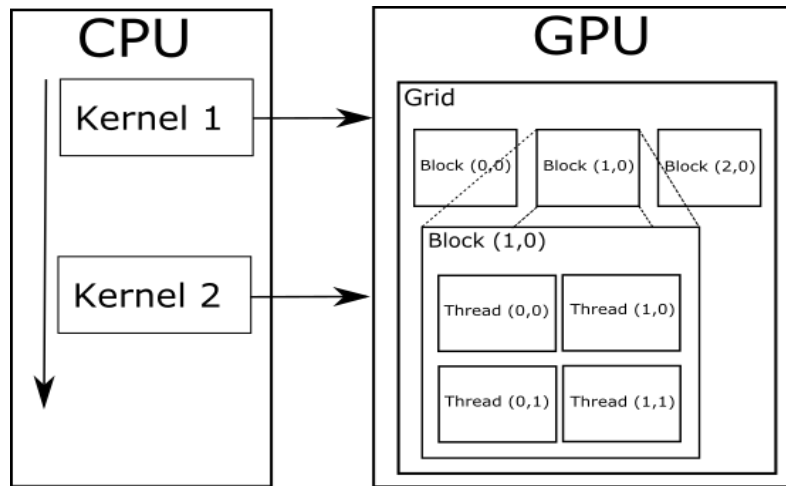


Рис. 2. Программная модель работы вычислительного ядра NVIDIA CUDA

в общем случае недостаточно рассчитать значение функции при фиксированной высокой точности. Сколько бы высокую точность не взяли, всегда найдутся редкие случаи, в которых ошибка в высокоточном результате повлияет на округление при низкой точности.

Существует два способа решить данную дилемму. Первый способ состоит в том, чтобы привести математическое доказательство корректности результата каждой отдельной функции. Однако, принимая в расчет крайнюю сложность подобных доказательств, производители численных библиотек применяют другой подход, при котором для каждой функции определяются границы относительной ошибки на указанном диапазоне принимаемых значений. Для описания границ относительной ошибки применяют понятие ulp (unit in the last position). Например, функция $\sin(x)$, которая возвращает результат двойной точности, гарантирует, что результат не будет превышать 2 ulp . Другими словами это означает, что разница между вычисленным результатом и точным математическим значением не будет превышать ± 2 по отношению к позиции последних значащих битов дробной части результата в виде числа с плавающей точкой [1].

В листинге 1 представлен исходный код программы, которая вычисляет значение косинуса для заданного значения аргумента.

На рис. 3 представлен результат выполнения программы. Как видно, при компиляции примера для 32-битной системы

```
#include «math.h»
#include «stdio.h»
int main()
{
    volatile float x = 5992555.0;
    printf(«cos( %f): %.10g», x, cos(x));
    return 0;
}
```

Листинг 1. Исходный код вычисления косинуса числа

значение косинуса равно $3.320904692\text{e-}07$, тогда как для 64-бит значение равно $3.320904615\text{e-}07$. Данный пример показывает, что изменение битности вычислительной программы влияет на конечный результат расчетов даже при условии использования одинаковой библиотечной функции $\cos(x)$ [1]. Таким образом, при проведении расчетов следует внимательно следить за тем, в какой битности предполагается исполнение вычислительной программы.

Таким образом, одной из причин расхождений численных результатов вычислений на CPU и GPU, которые автор получил в ходе работы над параллельной реализацией полу-Лагранжевого метода решения начально-краевой задачи для уравнения неразрывности [2], является присутствие отличий в реализации стандартных математических функций в библиотеках для NVIDIA CUDA и стан-

```
jane@flagman:~/2015/conf_tests$ gcc test.c -o test32 -lm -m32 && ./test32
cos(5992555.000000): 3.320904692e-07
jane@flagman:~/2015/conf_tests$ gcc test.c -o test64 -lm -m64 && ./test64
cos(5992555.000000): 3.320904615e-07
jane@flagman:~/2015/conf_tests$
```

Рис. 3. Влияние опций компиляции на результат вычислений функции $\cos(x)$. Первая строка показывает компиляцию для 32 бит, третья строка показывает компиляцию для 64 бит

дартной библиотеки GNU C Library. К сожалению, дать какие-то конкретные рекомендации по устранению данного расхождения не представляется возможным.

Функции, скомпилированные для GPU, будут использовать математическую библиотеку NVIDIA CUDA, тогда как для вычислений на CPU будут использоваться математические библиотеки, реализованные для использования на CPU (например, GNU C Library для Linux). Поскольку данные реализации развиваются независимо и обе не могут гарантировать корректно округленного результата, расчеты на GPU и CPU всегда будут немного отличаться [1].

Неполная поддержка последних версий стандарта IEEE 754

Одним из наиболее важных факторов, который может влиять на расхождение результатов численного эксперимента на CPU и GPU, является разница в поддержке разных версий стандарта IEEE 754 для разных вычислительных устройств.

В ревизии стандарта IEEE 754-2008, который был принят в 2008 г., была включена операция Fused Multiply-Add (FMA, операция умножение-сложение) [7]. При использовании данной операции два числа умножаются и складываются за один такт, т.е. $x = a * b + c$. Преимущество операции FMA для чисел с плавающей точкой заключается в том, что в процессе ее применения происходит одно округление вместо двух. Другими словами, если принять, что операция rn — это операция округления, то FMA производит вычисления по формуле $x = rn(a * b + c)$, вместо $x = rn(\text{гп}(a * b) + c)$. Таким образом, результаты вычислений при использовании FMA имеют более высокую точность [1].

Графические процессоры компании NVIDIA имеют аппаратную поддержку стандарта IEEE-754-2008 для чисел с плавающей точкой одинарной и двойной точности, начиная с версии compute capability 2.0. Таким образом, поддержкой данной операции обладают чипы серии GF100 и выше. Первые версии данных чипов были выпущены 12 апреля 2010 г. [8]. В то же время первые современные коммерческие CPU с аппаратной поддержкой данной операции появились лишь в 2011 г. (AMD Bulldozer) и в 2013 г. (Intel Haswell) [6]. При сравнении результатов расчетов GPU и CPU следует учитывать разницу в степени поддержки различных ревизий стандарта IEEE-754.

Совместное использование аппаратных технологий, предполагающих применение расширенной и двойной/одинарной точности

На аппаратных платформах, которые поддерживают наборы инструкций x87 и SSE, могут возникать рас-

хождения в численных результатах. В то время как программная реализация NVIDIA CUDA также, как и SSE, использует только наборы инструкций, оперирующие числами с плавающей точкой одинарной и двойной точности, набор инструкций x87 использует операции, которые зачастую предполагают использование повышенной 80-битной точности [1]. Таким образом, при использовании архитектуры x87 результаты вычислений могут зависеть от того, были ли промежуточные результаты вычислений сохранены в 80-битных регистрах или в основной оперативной памяти. Значения, сохраненные в оперативной памяти, округляются до стандартной одинарной или двойной точности, в то время как числа, хранящиеся в регистрах, находятся в расширенной 80-битной точности [1]. Также следует заметить, что по умолчанию компиляция в 32-битный код будет использовать набор инструкций x87 (при наличии аппаратной поддержки), тогда как набор инструкций SSE используется по умолчанию при 64-битной компиляции.

Сравнивая результаты расчетов на CPU и GPU, следует убедиться в том, что при расчете на CPU не использовался набор инструкции x87. Поскольку набор инструкций SSE следует стандарту IEEE 754 для чисел с плавающей точкой, следует использовать данный набор инструкций при проведении расчетов на CPU [1].

Заключение

Одинаковые входные данные могут возвращать одинаковый результат для отдельных операций стандарта IEEE 754 для заданной точности вычислений и режима округления на CPU и GPU. Однако, как описано в статье, крайне сложно исполнить операции в одинаковом порядке, используя одинаковый набор инструкций, на CPU и GPU. Основные причины, приводящие к тому, что один набор инструкций не может быть одинаково исполнен на CPU и GPU, следующие.

1. Параллельные алгоритмы меняют порядок операций.
2. CPU может рассчитывать результаты, «за кулисами» используя большую точность.
3. GPU имеет аппаратную поддержку FMA, которая включена по умолчанию.
4. Корректное округление общих математических функции не регулируется стандартом IEEE 754.

В процессе портирования программы вычислений с CPU на GPU определено имеет смысл использовать результаты x86 CPU как эталонные. Однако разница в численных результатах между GPU и CPU не является автоматическим доказательством некорректности расчетов на GPU. Любые расхождения в расчетах должны быть аккуратно изучены, принимая в расчет материал, представленный в статье.

Литература:

1. Whitehead, N. Precision & Performance : Floating Point and IEEE 754 Compliance for NVIDIA GPUs / N. Whitehead, A. Fit-florea — Santa Clara, 2011. — 7 p.
2. Efremov A.A., Karepova E.D., Shaydurov V.V., Vyatkin A.V. A Computational Realization of a Semi-Lagrangian Method for Solving the Advection Equation A.V. / A.A. Efremov, E.D. Karepova, V.V. Shaydurov, A.V. Vyatkin. J. Appl. Math. — 2014. — Vol. 2014.
3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. — М.: Высш. школа, 2002. — 840 с.
4. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры / В.В. Воеводин. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
5. Forsythe, G. Pitfalls of computation, or why a math book isn't enough // Amer. Math. Mon. — 1970. — P. 931–956.
6. Multiply–accumulate operation [Электронный ресурс]. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Multiply%E2%80%93accumulate_operation (дата обращения: 21.03.2015).
7. 754-2008 — IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic [Электронный ресурс]. URL: http://ieeexplore.ieee.org/xpl/articleDetails.jsp?arnumber=4610935&filter%3DAND%28p_Publication_Number%3A4610933%29 (дата обращения: 20.03.2015).
8. GTX 400 architecture [Электронный ресурс]. URL: http://www.nvidia.com/object/GTX_400_architecture.html (дата обращения: 20.03.2015).
9. Программа сибирского отделения РАН «Высокопроизводительные вычисления СО РАН» [Электронный ресурс]. URL: <http://icm.krasn.ru/rprojects.php?id=511&scid=516> (дата обращения: 20.03.2015).
10. CUDA Toolkit Documentation [Электронный ресурс]. URL: <http://docs.nvidia.com/cuda/cuda-c-programming-guide/#axzz3VCinlPKN> (дата обращения: 20.03.2015).

Исследование термодиффузионного разделения многокомпонентных смесей в цилиндрической колонне

Козлова Софья Владимировна, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Современные технологии добычи полезных ископаемых, производства и обработки материалов требуют более полного и точного описания процессов теплообмена в жидкостях и газах. Данные среды зачастую являются многокомпонентными. В многокомпонентных системах имеет место ряд процессов переноса тепла и массы: конвекция, теплопроводность, основная и перекрестная диффузии, термодиффузия. Явление термодиффузии (эффекта Соре) связано с возникновением потока массы под действием градиента температуры [1]. Этот эффект играет важную роль во многих природных и технологических процессах (конвекция в смесях, распределение углеводородов в природных месторождениях, разделение изотопов и др.) [2, 3].

Для описания и предсказания термодиффузионных процессов необходимо знать коэффициенты переноса (в том числе диффузии и термодиффузии). Одним из экспериментальных методов их измерения является термодиффузионная колонна, которая представляет собой вертикальный слой между двумя твердыми стенками, поддерживаемыми при различных температурах. Колонны могут иметь плоскую (слой между двумя плоскими стенками), а также цилиндрическую (слой между коаксиальными цилиндрами) формы. Термодиффузионное разделение смеси под действием горизонтального градиента температуры, и вертикальный конвективный поток приводят к возникновению вертикальных градиентов концентрации. Измерение этих градиентов путем отбора проб на различных уровнях по высоте колонны позволяет определить коэффициенты термодиффузии. Необходимым условием проведения измерений в колонне является устойчивость стационарного конвективного течения [4, 5]. В настоящее время устойчивость такого течения исследована лишь для плоских колонн относительно двумерных возмущений [5–7]. В работах [8, 9] был обнаружен эффект устойчивого вертикального разделения бинарной смеси в цилиндрической колонне для аномального эффекта Соре при достаточно больших разностях температур между стенками (в этом случае тяжелый компонент накапливается в верхней части колонны, что создает потенциально неустойчивую стратификацию). Этот эффект до сих пор не получил теорети-

ческого объяснения. Таким образом, вопрос стационарного разделения и его устойчивости для бинарных и многокомпонентных смесей в цилиндрических колоннах в настоящее время остается открытым.

В данной работе проводится исследование процесса разделения многокомпонентной смеси в цилиндрической термодиффузионной колонне. Исследование выполнено в цилиндрических координатах для учета влияния отношения радиусов цилиндров и их кривизны на процесс разделения. Построены точные решения задачи, имеющие различный вид в зависимости от значения управляющих параметров, выполнено сравнение результатов с результатами для плоской колонны.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс разделения смеси из n компонентов в цилиндрической термодиффузионной колонне. Пусть компонент n выбран в качестве растворителя, тогда состав смеси можно задать вектором массовых долей $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n-1})^T$, где C_i — концентрация компонента i , при этом $C_1 + \dots + C_n = 1$. Для описания смеси будем использовать модель Обербека-Буссинеска с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \beta_T (T - T_0) - \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i (C_i - C_{i0}) \right) = \rho_0 (1 - \beta_T (T - T_0) - \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)).$$

Здесь ρ — плотность, T — температура, β_T — коэффициент теплового расширения, $\mathbf{B} = \text{diag}\{\beta_1, \dots, \beta_{n-1}\}$ — диагональная матрица коэффициентов концентрационного расширения, индекс «0» соответствует средним значениям температуры и концентрации.

Уравнения движения смеси с учетом силы тяжести с вектором ускорения свободного падения $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0^{-1} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{g} (\beta_T (T - T_0) + \mathbf{I} \cdot \mathbf{B} (\mathbf{C} - \mathbf{C}_0)), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \chi \nabla^2 T, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} = D \nabla^2 \mathbf{C} + \mathbf{D}_T \nabla^2 T, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

В приведенных выражениях D — матрица коэффициентов диффузии размерности $(n-1) \times (n-1)$, \mathbf{D}_T — вектор коэффициентов термодиффузии размерности $n-1$, ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности соответственно, $p = P - \rho_0 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ — отклонение полного давления P от гидростатического, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости, $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — вектор координат.

Рассмотрим процесс разделения в термодиффузионной колонне высотой $2H$, которая представляет собой вертикальный слой между коаксиальными цилиндрами с радиусами r_1 и r_2 , $r_2 > r_1$ (рис. 1). Введем цилиндрические координаты (r, φ, z) . Если отношение высоты колонны к зазору между цилиндрами $2H / (r_2 - r_1)$ имеет порядок 10^2 или более, то конвективное течение строго вертикально (кроме небольших областей вверху и внизу колонны, которыми мы в дальнейшем пренебрегаем). Тогда из уравнения неразрывности следует, что вертикальная скорость зависит только от радиальной координаты. Предполагается, что вертикальные градиенты концентрации постоянны [4, 5], поэтому стационарное решение, описывающее конвекцию и разделение смеси в колонне, ищется в виде:

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(r)), \quad T = T_0 + T(r), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}(r) + \mathbf{A}z, \quad (2)$$

где \mathbf{A} — вектор постоянных вертикальных градиентов концентрации. На границах ставятся условия прилипания, отсутствия диффузионного потока, и задаются различные постоянные температуры:

$$\begin{cases} r = r_1 : & w = 0, \quad T = T_0 + \Delta T / 2 \\ r = r_2 : & w = 0, \quad T = T_0 - \Delta T / 2 \end{cases}, \quad D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial r} + \mathbf{D}_T \frac{\partial T}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Для замкнутой колонны в стационарном состоянии расход смеси и полный поток массы компонентов через поперечное сечение $z = \text{const}$ должны быть равны нулю. Эти условия, а также условие сохранения массы компонентов смеси, записываются так:

$$\int_{r_1}^{r_2} wr dr = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} \rho_0 \left(\mathbf{C}w - D \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial z} \right) r dr = 0, \quad \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{C} r dr = 0. \quad (4)$$

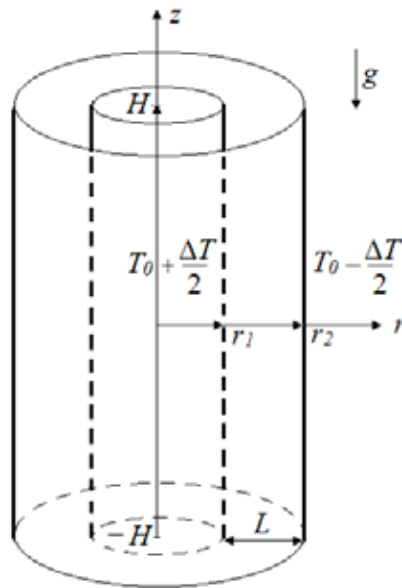


Рис. 1. Схема цилиндрической термодиффузионной колонны

Предполагается, что вертикальная конвекция достаточно интенсивная и диффузионный перенос массы в вертикальном направлении пренебрежимо мал по сравнению с конвективным переносом. Тогда второе условие из (4) сводится к уравнению

$$\int_{r_1}^{r_2} Cwrdr = 0.$$

Введем безразмерные переменные (со штрихом) и некоторые соотношения:

$$L = r_2 - r_1, \quad T = \Delta T T' + T_0, \quad r = r' L, \quad \mathbf{u} = \frac{\nu}{L} \mathbf{u}', \quad t = \frac{L^2}{\nu} t', \quad p = \rho_0 \frac{\nu^2}{L^2} p', \quad \mathbf{C} - \mathbf{C}_0 = \beta_T \Delta T B^{-1} \mathbf{C}',$$

$$\delta = \frac{r_1}{r_2}, \quad 0 < \delta < 1 \Rightarrow r_1' = \frac{\delta}{1-\delta}, \quad r_2' = \frac{1}{1-\delta}.$$

В безразмерных переменных система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Gr}(T + \mathbf{I} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{e}_3, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{1}{\text{Pr}} \nabla^2 T, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{C} = SC \left(\nabla^2 \mathbf{C} - \psi \nabla^2 T \right), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение для концентрации в безразмерном виде представимо так: $\mathbf{C} = \mathbf{c}(r) + \text{Gr}^{-1} SC \mathbf{R} z$ (штрих здесь и далее опущен), где $\text{Gr} = g \beta_T \Delta T L^3 / \nu^2$ – число Грасгофа, $SC = \nu^{-1} BDB^{-1}$, $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля, $\mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)$, $\{SC\}_{ij} = \beta_i \beta_j^{-1} Sc_{ij}^{-1}$, $Sc_{ij} = \nu / D_{ij}$ – числа Шмидта, $\mathbf{R} = g L^4 \nu^{-1} BD^{-1} \mathbf{A}$ – вектор безразмерных параметров, называемых концентрационными числами Рэлея. Вектор \mathbf{R} характеризует вертикальное разделение смеси.

Граничные условия (3) и соотношения (4) в безразмерной форме принимают вид

$$\begin{cases} r = \delta / (1-\delta): & w = 0, \quad T = 1/2 \\ r = 1 / (1-\delta): & w = 0, \quad T = -1/2 \end{cases}, \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial r} - \psi \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

$$\int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} wrdr = 0, \quad Gr \int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} Cwrdr - \frac{SC^2R}{2} \cdot \frac{1+\delta}{1-\delta} = 0, \quad \int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} Crdr = 0. \tag{7}$$

Здесь $\psi = -\beta_T^{-1}BD^{-1}D_T$ – вектор отношений разделения. Данный вектор характеризует отношение градиентов плотности, вызванных градиентами концентрации и температуры, в замкнутой системе в условиях механического равновесия.

Если диффузия в вертикальном направлении не учитывается, для второго условия из (7) получим

$$\int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} Cwrdr = 0. \tag{8}$$

Построение решения

Введем функцию тока

$$\Phi(r) = - \int_{r_1}^r w(\tilde{r})d\tilde{r} = 0, \quad w(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \tag{9}$$

Подставим общий вид решения (2) в безразмерных переменных в систему (5). Продифференцировав ее еще раз, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) \right) + Gr \left(\frac{\partial T}{\partial r} + \mathbf{I} \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial r} \right) = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0, \\ \frac{\mathbf{R}}{Gr} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial r} \right) - \psi \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0. \tag{10}$$

Поля температуры и концентрации определяются соответственно из второго и третьего уравнений системы (10) с учетом условий (6)–(8):

$$T(r) = \frac{2 \ln r + \ln((1-\delta)^2 / \delta)}{2 \ln \delta}, \\ C(r, z) = -\frac{\mathbf{R}}{Gr} \int_{\delta/(1-\delta)}^r \frac{\Phi}{r} dr + \psi \frac{\ln(r(1-\delta)/\delta)}{\ln \delta} + Gr^{-1}SC \mathbf{R} z + \tilde{\mathbf{c}} = 0, \tag{12}$$

где $\tilde{\mathbf{c}}$ – постоянный вектор. Подставив полученные выражения (11) и (12) в систему (10), приходим к задаче для функции тока:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) \right) + R\Phi = \frac{Gr}{\ln \delta} (\Psi + 1), \quad r = \frac{\delta}{1-\delta}; \quad \frac{1}{1-\delta} : \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r) = \Phi(r) = 0, \tag{13}$$

$$R \ln \delta \int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} \frac{\Phi^2}{r} dr - Gr\Psi \int_{\delta/(1-\delta)}^{1/(1-\delta)} \frac{\Phi}{r} dr = 0 \tag{14}$$

$$\mathbf{R} = \frac{R}{\Psi} \psi. \tag{15}$$

Здесь $\Psi = \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i$ – суммарное отношение разделения, $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i$ – суммарное концентрационное число

Рэлея.

Решение задачи (13), (14) имеет различный вид в зависимости от значений управляющих параметров.

Предположим, что $Gr = 0$. В данном случае конвекция и вертикальные градиенты концентраций отсутствуют ($R = 0, R = 0$). Это следует из условия равенства нулю полных потоков массы компонентов смеси через произвольное поперечное сечение колонны (в этом условии необходимо учитывать вклад вертикальной диффузии, так как конвекция отсутствует). Тогда из (13) и (14) следует также, что и $\Phi = 0$. Таким образом, решение задачи имеет вид

$$w = 0, \quad T(r) = \frac{2 \ln r + \ln((1-\delta)^2 / \delta)}{2 \ln \delta}, \quad C(r) = \frac{\psi \ln(r(1-\delta) / \delta)}{\ln \delta}, \quad (16)$$

при условии, что $\beta_T \neq 0, \Delta T \neq 0$. Равенство $Gr = 0$ возможно лишь при $g = 0$, то есть в невесомости. Профили температуры в безразмерном виде для различных значениях отношения радиусов δ показаны на рис. 1.

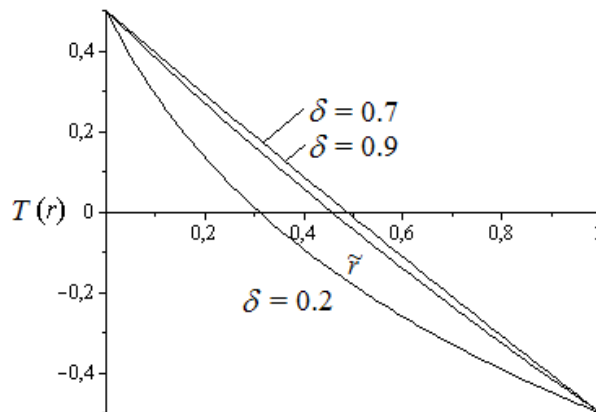


Рис. 1. Профили температуры (в безразмерном виде) в зависимости от $\delta = r_1 / r_2$

В выражении для температуры была произведена замена

$$r = \tilde{r} + \delta / (1 - \delta) \Rightarrow \begin{cases} \tilde{r} = 0: & T = 1/2, \\ \tilde{r} = 1: & T = -1/2. \end{cases} \quad (17)$$

При $\delta \rightarrow 1$ профиль температуры сходится к линейному, который соответствует плоской колонне.

Рассмотрим случай, когда влияние неоднородности плотности, вызванной изменением концентрации смеси, на конвективное течение смеси пренебрежимо мало ($\beta_i = 0$). Данное предположение справедливо при небольшом суммарном отношении разделения (в работе [10] указан диапазон $0 < \Psi < 2$ для бинарных смесей). В этом случае в уравнении импульса системы (1) можно пренебречь слагаемым, содержащим вектор концентраций. Для системы (10) в безразмерных переменных получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \right) \right) + Gr \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Поле температуры определяется выражением (11). Используя это выражение, найдем решение для функции тока в виде

$$\Phi = Gr \left(\left(\frac{1}{16 \ln \delta} \frac{\ln r}{r} - \frac{5}{64 \ln \delta} \right) r^4 + c_1 r^4 + c_2 r^2 \ln r + (c_3 + c_4) r^2 + c_5 \right),$$

$$c_1 = -(((4 - 4\delta^4) \ln \delta + 4 + 4\delta^4 - 8\delta^2) \ln(1 - \delta) + 4\delta^4 \ln^2 \delta - (7\delta^4 - 4\delta^2 - 3) \ln \delta + 4 + 4\delta^4 - 8\delta^2)(\delta - 1)^4 / S,$$

$$c_2 = 2(\delta^4 - 4\delta^2 \ln \delta - 1)(\delta - 1)^3 (\delta + 1) / S,$$

$$c_3 = -(\delta^4 - 4\delta^2 \ln \delta - 1)(\delta - 1)^3 (\delta + 1) / S,$$

$$c_4 = 2(((4\delta^2 - 4\delta^4) \ln \delta + \delta^6 + 1 - \delta^2 - \delta^4) \ln(1 - \delta) + 4\delta^4 \ln^2 \delta - (3\delta^4 - 4\delta^2 + 1) \ln \delta)(\delta - 1)^2 / S,$$

$$c_5 = (\delta^2 + 2\delta \ln \delta - 1)(\delta^2 - 2\delta \ln \delta + 1)\delta^2 / S,$$

$$S = 64(\delta - 1)^5(\delta + 1)(\delta^2 \ln \delta - \delta^2 + 1 + \ln \delta) \ln \delta.$$

Поля скорости и концентрации определяются из (9) и (12) соответственно как

$$w(r) = Gr \left(\left(\frac{1}{4 \ln \delta} - \frac{\ln r}{4 \ln \delta} \right) r^2 - 4c_1 r^2 - (1 + 2 \ln r)c_2 - 2(c_3 + c_4) \right),$$

$$C(r, z) = -\frac{R}{\Psi} \psi \left(\left(\frac{c_1}{4} + \frac{1}{64 \ln \delta} \left(\ln r - \frac{3}{2} \right) \right) r^4 + \left(\left(\frac{1}{2} \ln r - \frac{1}{4} \right) c_2 + \frac{c_3 + c_4}{2} \right) r^2 - \right. \\ \left. - \left(\frac{c_1}{4} + \frac{1}{64 \ln \delta} \left(\ln \frac{\delta}{1 - \delta} - \frac{3}{2} \right) \right) \frac{\delta^4}{(1 - \delta)^4} + \left(\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{\delta}{1 - \delta} \right) c_2 - \frac{c_3 + c_4}{2} \right) \frac{\delta^2}{(1 - \delta)^2} \right) + \\ \left. + \ln \frac{r(1 - \delta)}{\delta} c_5 \right) + \psi \frac{\ln(r(1 - \delta)/\delta)}{\ln \delta} + Gr^{-1} SC \frac{R}{\Psi} \psi z + \tilde{c},$$

где вектор \tilde{c} определяется из последнего условия (7). Профиль скорости $w(r)$ в безразмерной форме для $Gr = 8$ показан на рис. 2. Здесь и далее введена замена (17).

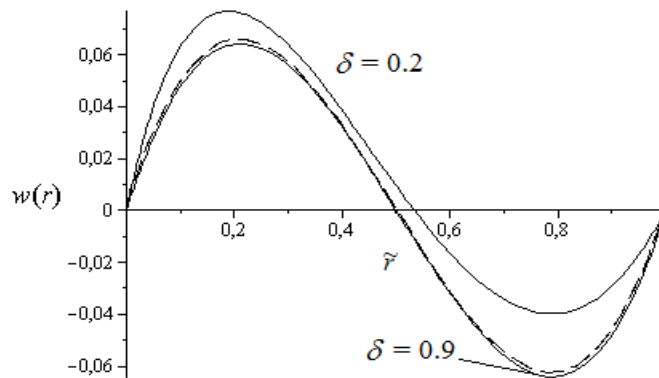


Рис. 2. Профиль скорости в безразмерном виде для различных δ при $Gr = 8$. Профиль скорости для плоской колонны показан штриховой линией

Из рис. 2 видно, что профиль скорости существенно зависит от отношения радиусов δ . При $\delta \rightarrow 1$ смесь у горячей стенки движется вверх с большей скоростью, чем вниз у холодной. При $\delta \rightarrow 1$ кривая для цилиндрической колонны приближается к кривой для плоского слоя, которая показана штриховой линией.

Исследуем соотношение (15) векторов \mathbf{R} и $\boldsymbol{\psi}$, характеризующее связь между вертикальным разделением смеси и коэффициентами диффузии и термодиффузии. Коэффициент пропорциональности R/Ψ может быть определен с помощью уравнения (14). На рис. 3 показана зависимость R/Ψ от отношения радиусов цилиндров δ .

При $\delta \rightarrow 1$ предельное значение R/Ψ равно 504, т. е. $\mathbf{R} = 504\boldsymbol{\psi}$. Данное соотношение согласуется с ранее известным соотношением для плоской колонны [4, 5]. Таким образом, вертикальные градиенты концентрации в данном решении даются формулами:

$$\frac{\partial C_i}{\partial z} = -\frac{504\nu D_{Ti}}{g\beta_T L^4}, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Профиль концентрации i -го компонента смеси вдоль радиальной координаты представлен отношением C_i/ψ_i на рис. 4. Из рис. 4 видно, что профиль концентрации также существенно зависит от параметра δ . По рис. 2 и 4 можно отметить, что при $\delta \rightarrow 1$ у стенки с более высокой температурой концентрация компонентов выше и также выше скорость конвективного потока. При $\delta \rightarrow 1$ профиль концентрации сходится к профилю для плоского слоя (на рис. 4 показан штриховой линией).

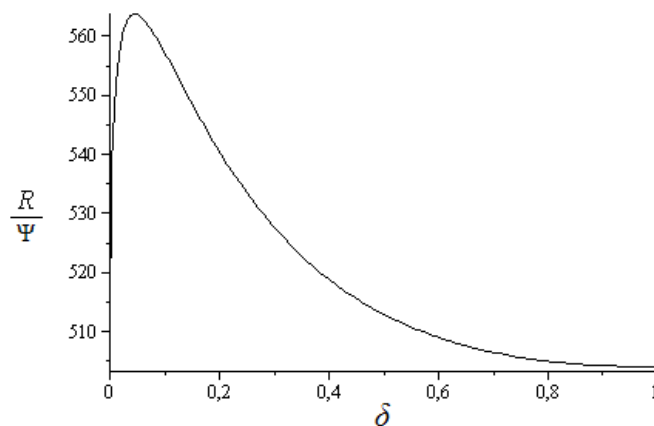


Рис. 3. R/Ψ в зависимости от δ

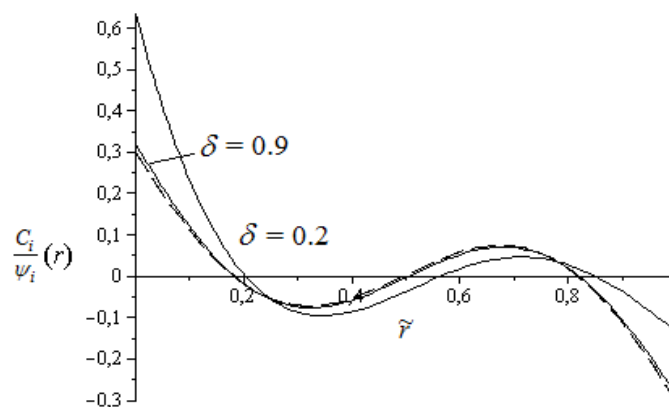


Рис. 4. Профиль концентрации i -го компонента смеси в поперечном сечении $z = 0$ при различных δ . Штриховая линия соответствует профилю для плоской колонны

Если изменения плотности, связанные с неоднородностью концентрации, учитывается, то решение задачи (13), (14) принимает более сложный вид и зависит от значения суммарного отношения разделения Ψ . Этот случай будет исследован в дальнейшем.

Заключение

В данной работе приведено теоретическое исследование процесса разделения многокомпонентной смеси в цилиндрической термодиффузионной колонне, на стенках которой поддерживаются различные постоянные температуры. Исследование выполнено в цилиндрических координатах с целью учета влияния кривизны и отношения радиусов цилиндров на процесс разделения. Построены точные решения задачи, имеющие различный вид в зависимости от значения управляющих параметров. Также рассмотрен случай, при котором влиянием неоднородности плотности, вызванной изменением концентрации смеси, на конвективное течение смеси можно пренебречь.

На основании полученных результатов можно сделать вывод, что поля физических характеристик существенно зависят от отношения радиусов δ . При $\delta \rightarrow 1$ температура, скорость конвективного течения и концентрация компонентов смеси выше у внутренней стенки, где смесь движется вверх. При $\delta \rightarrow 1$ результаты представленных в данной работе решений задачи согласуются с результатами для плоской колонны.

Исследование проведено под руководством д.ф.-м.н. И.И. Рыжкова (Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск).

Литература:

1. Wiegand, S. Thermal diffusion in liquid mixtures and polymer solutions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2004. — V. 16. — P. 357–379.
2. Firoozabadi, A. *Thermodynamics of hydrocarbon reservoirs*. McGraw–Hill Professional, 1999.
3. Рабинович Г.Д. Разделение изотопов и других смесей термодиффузией. — М.: Атомиздат, 1981. — 144 с.
4. Platten J.K. The Soret effect: A review of recent experimental results. *Journal of Applied Mechanics*, 2006. — V. 73. P. 5–15.
5. Рыжков И.И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2013. — 200 с.
6. Ryzhkov I.I. and Shevtsova V.M. On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column. *Physics of Fluids*, 2007. — V. 19. Issue 2, 027101.
7. Ryzhkov I.I. and Shevtsova V.M. Convective stability of multicomponent fluids in the thermogravitational column. *Physical Review E*, 2009. — V. 79. Issue 2, 026308.
8. Bou–Ali M.M., Ecenarro O., Madariaga J.A., Santamaria C.M. Stability of convection in a vertical binary fluid layer with an adverse density gradient. *Phys. Rev. E*, 1999. — V. 59, No. 1. — P. 1250–1252.
9. Bou–Ali M.M., Ecenarro O., Madariaga J.A., Santamaria C.M. Measurement of negative Soret coefficients in a vertical fluid layer with an adverse density gradient. *Phys. Rev. E*, 2000. — V. 62, No. 1. — P. 1420–1423.
10. Valencia, J., Bou–Ali M.M., Ecenarro O., Madariaga J.A., Santamaria C.M. Validity limits of the FJO thermogravitational column theory. *Lect. Notes Phys*, 2002. — V. 584. — P. 233–249.

Дифференциация учебного процесса на основе алгоритма классификации

Колдырев Андрей Юрьевич, аспирант
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск),
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Современные тенденции развития образовательных систем лежат в области организации индивидуальных методов обучения и дифференциации учебного процесса [1]. В учебный курс, как правило, включаются материалы для комплексной подготовки специалистов, что не всегда удовлетворяет пользователя с конкретными целями обучения. Чтобы решить задачу дифференциации курса используются различные методы. В случае специализированных учебных систем, чтобы сформировать траектории обучения в зависимости от целей обучения целесообразно применять алгоритмы классификации. Предлагаемый подход возможен, если предварительно заданы классы векторов признаков, характеризующих особенности обучающихся, и соответствующие им траектории обучения. Решаемая задача состоит в том, чтобы подобрать для конкретного обучающегося наиболее близкий класс и, тем самым, наиболее подходящую траекторию обучения.

В данной статье рассмотрен процесс дифференциации учебного курса в учебно-исследовательской подсистеме программного комплекса, получившего название программно-математической модели бортовой аппаратуры командно-измерительной системы космического аппарата — ПММ БА КИС [2].

Область применения данной учебной системы — обучение принципам и особенностям функционирования бортовой аппаратуры космического аппарата. Система пред-

назначена для интерактивного обучения и приобретения знаний, навыков работы инженерно-технического персонала и студентов в объеме, необходимом для проектирования и тестирования составных частей комплекса бортовой аппаратуры командно-измерительной системы.

Для решения задачи дифференциации учебного процесса и формирования индивидуальных траекторий обучения применяется алгоритм классификации — разделения данных на классы по принципу аналогии. Идея применения алгоритма классификации в учебно-исследовательской системе состоит в том, чтобы формировать индивидуальные рекомендации на основе схожести параметров обучаемого пользователя с параметрами одного из эталонных классов. Специализация учебной системы позволяет адекватно сформировать параметры для индивидуализации учебного курса.

В работе используется критерий алгоритма теории адаптивного резонанса — ART1. Алгоритм работает с объектами, которые представляются векторами бинарных признаков. Вектор признаков представляет группу параметров, которые принимают значения 0 или 1. Принадлежность к классу определяется в зависимости от степени «похожести» рассматриваемого вектора признаков (прототипа) на эталонный вектор, описывающий характерные черты класса.

Индивидуализация процесса обучения основана на предварительном формировании эталонных векторов.

Таблица 1. Интерпретация значений бинарных признаков

№	Наименование признака	Вопрос для интерпретации значения (да — 1, нет — 0)
1	Высшее образование	Имеет ли пользователь высшее образование?
2	Оператор	Является ли пользователь оператором?
3	Конструктор	Является ли пользователь конструктором?
4	Студент	Является ли пользователь студентом?
5	Опыт работы с КИС	Имеет ли пользователь опыт работы с командно-измерительной системой?
6	Опыт работы с КПА	Имеет ли пользователь опыт работы с контрольно-проверочной аппаратурой?
7	Опыт работы с ПО	Имеет ли пользователь опыт работы со специализированным ПО?
8	Конструирование и проектирование КИС	Является ли конструирование и проектирование КИС одним из направлений работ пользователя?
9	Подготовка испытаний	Является ли подготовка испытаний одним из направлений работ пользователя?
10	Проведение испытаний	Является ли проведения испытаний одним из направлений работ пользователя?
11	Повышение квалификации	Является ли целью обучения пользователя повышение квалификации?
12	Образовательная программа	Является ли целью обучения пользователя прохождение образовательной программы?
13	Самообучение	Проходит ли пользователь учебный курс в режиме самообучения?
14	Теоретический курс	Курс пользователя ориентирован на теоретические знания?
15	Практический курс	Курс пользователя ориентирован на развитие практических навыков?
16	Полный курс	Курс пользователя дается в полном объеме?
17	Ознакомительный	Глубина представления материала ознакомительная?
18	Базовый	Глубина представления материала базовая?
19	Углубленный	Глубина представления материала углубленная?

Каждый эталонный вектор описывает отдельный класс и соответствующую ему траекторию обучения. Эталонные векторы и траектории обучения задаются преподавателем при формировании учебного курса.

Вектор признаков обучающегося состоит из характеристик, указанных в таблице 1. Для построения векторов выполнена интерпретация значений бинарных признаков.

Например, характеристики пользователя и целей его обучения представлены следующим описанием: высшее образование; оператор эксплуатирующий программное обеспечение организации, имеет опыт работы со специализированным ПО; направление работ — подготовка испытаний; цель обучения — повышение квалификации; обучение происходит без преподавателя; тип изучаемого курса — практический курс; глубина изучения материала — базовая. Вектор признаков для описанного пользователя имеет вид: (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0).

Предлагаемый алгоритм позволяет найти максимально схожий эталонный класс для вектора признаков пользователя.

Пусть $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ — множество эталонных векторов, сформированных в системе. Эталонные векторы имеют одинаковую длину — d . Каждому эталонному вектору однозначно соответствует одна из множества траекторий обучения $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$. E — вектор признаков пользователя. Требуется для заданного вектора признаков пользователя E найти наиболее схожий эталонный вектор

P_i и, тем самым, определить траекторию обучения T_i для пользователя.

Вектор признаков пользователя E проверяется на схожесть со всеми эталонными векторами, существующими в системе. В качестве оценки степени схожести вектора признаков и каждого из существующих эталонных векторов используется критерий из алгоритма ART1 [3]:

$$\frac{\|P_i \cap E\|}{\beta + \|P_i\|} > \frac{\|E\|}{\beta + d}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $\| \cdot \|$ — операция, возвращающая количество значимых элементов; \cap — операция побитового «И»; β — параметр «разрушения связи». Применение параметра β позволяет выбирать эталоны, в которых больше значимых элементов. Одно из преимуществ данного критерия заключается в том, что он чувствителен к ситуациям, когда признак присутствует в эталонном векторе, но не присутствует в векторе признаков пользователя.

Из эталонных векторов, удовлетворяющих критерию (1), выбирается вектор, максимально схожий с вектором признаков пользователя. Для этой цели используется критерий (2).

$$\max_{i=1, \dots, n} \left(\frac{\|P_i \cap E\|}{\|E\|} \right) \quad (2)$$

Обучающемуся предоставляется траектория обучения, соответствующая найденному по критерию эталонному вектору.

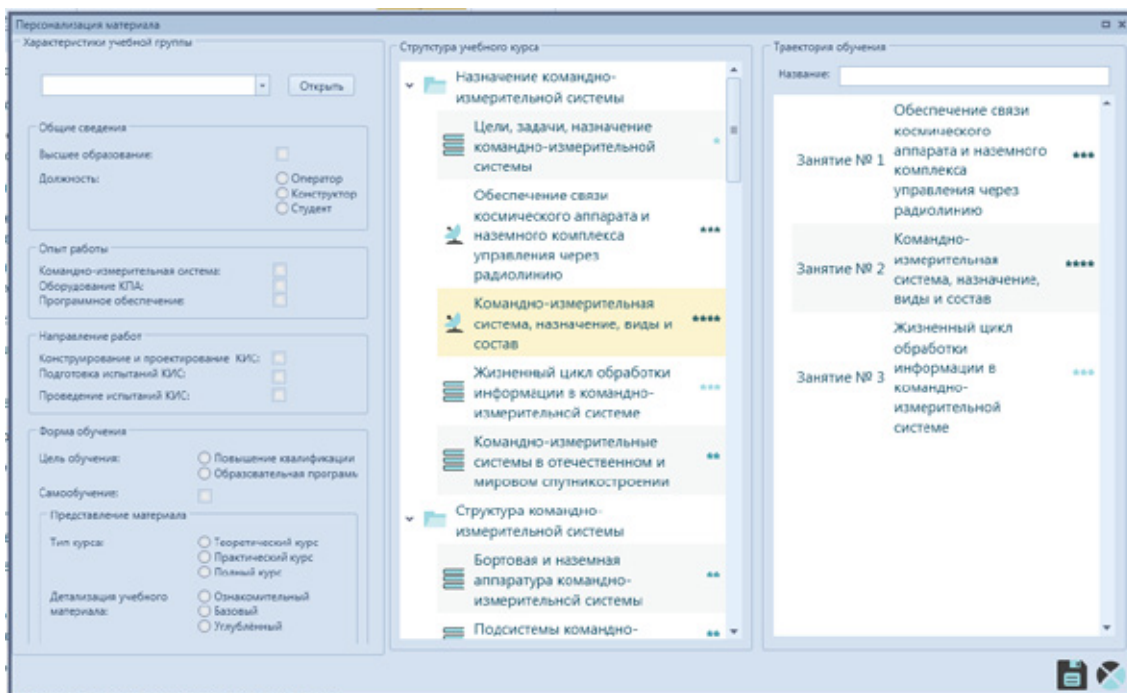


Рис. 1. Создание эталонных векторов и рекомендаций по освоению курса

Добавление пользователя

Имя пользователя:

Логин: Пароль:

Повторите пароль: Пароли совпадают

Отдел: Тип пользователя:

Образование: Цель обучения:

Тип курса: Глубина:

Самообучение: Сложность курса:

Направление работ

Конструирование и проектирование КИС

Подготовка испытаний КИС

Проведение испытаний КИС

Опыт работы

Опыт работы с КИС

Опыт работы с КПА

Опыт работы с ПО

+ ✕

Рис. 2. Анкетирование пользователя

Создание эталонных векторов и рекомендаций по изучению материалов для каждого эталона выполняет разработчик учебного курса (рис. 1).

При регистрации в системе пользователь заполняет анкету (рис. 2), на основе которой в дальнейшем формируется его вектор признаков. Вектор признаков проверяется на схожесть с эталонными векторами, существующими в системе. Если в системе сформирован эталонный вектор, который удовлетворяет критериям (1) и (2), то пользователю будет рекомендована траектория обучения, соответствующая этому эталонному вектору.

Описанный алгоритм решает задачу дифференциации учебного процесса в учебно-исследовательской подсистеме ПММ БА КИС. В дальнейшем планируется реализовать алгоритм кластеризации пользователей на основе их траекторий обучения. Данный алгоритм позволит рекомендовать пользователю темы, прошедшие другие представители кластера, к которому был отнесен пользователь. Объединение этих рекомендаций и установленных экспертом траекторий обучения позволит формировать расширенные рекомендации к выбору учебных тем и направлений исследований, характеризующих пользователей со схожими целями и динамикой обучения.

Литература:

1. Башмаков А.И., Башмаков И.А. Разработка компьютерных учебников и обучающих систем. — М.: Информационно-издательский дом «Филинь», 2003. — 616 с.
2. Ноженкова Л.Ф., Исаева О.И., Грузенко Е.А. Построение программно-математической модели командно-измерительной системы космического аппарата // Информатизация и связь, 2014. — № 1. — с. 87–93.
3. Джонс М.Т. Программирование искусственного интеллекта в приложениях // Пер. с англ. / А.И. Осипов. — М.: ДМК Пресс, 2013. — 312 с.

Математические модели «ухода» от конкуренции

Колпак Евгений Петрович, доктор физико-математических наук, профессор;
Горыня Екатерина Валерьевна, студент
Санкт-Петербургский государственный университет

Введение. Первые математические модели конкуренции, разработанные для биологических популяций, принадлежат, по-видимому, Вольтерра [15]. В рамках этих моделей в условиях конкуренции «выживает» тот вид, который при прочих равных условиях быстрее остальных размножается. Однако в среде биологических популяций есть множество примеров [10, 22, 90] «мирно» существующих на одном и том же трофическом ресурсе видов с разными скоростями воспроизводства потомства. Постоянное конкурентное подавление одного сообщества другим должно было бы значительно уменьшить число видов. Однако факт существования в природе множества животных и растений не согласуется, в целом, с этой гипотезой [90]. Обилие видов можно объяснить и тем, что конкуренция была в прошлом и со временем виды нашли свои экологические ниши в виде иных трофических ресурсов и мест обитаний.

Существование в биоценозах множества не погибающих из-за конкуренции видов можно объяснить наличием у каждого из них своей экологической ниши [10, 22, 53]. То есть, модель Вольтерра объясняет, по-видимому, один из возможных вариантов эволюции взаимодействующих популяций. Последователями Вольтерра были разработаны модели, которые допускали одновременное устойчивое существование двух конкурирующих видов [4, 10, 98]. То есть предлагались варианты описания «выживания слабых видов» среди «сильных», которые с точки зрения модели конкуренция Вольтерра должны были бы погибнуть.

В системе экономических взаимоотношений, как и в системе взаимоотношений между популяциями в биоценозах, между производителями товаров и услуг существует конкуренция [22, 53, 68]. Конкуренция носит разнообразный характер, по-разному влияет на эволюцию производств и систему перераспределения ресурсов [32, 33, 38, 80, 85]. Производители материальных ценностей ищут различные способы уменьшения внутренних потерь («внутренняя конкуренция») [5, 21, 25, 62, 65, 72, 77, 78, 83] и ослабления внешних факторов («межвидовая конкуренция»), мешающих увеличению собственных материальных ценностей [28, 54, 56, 61, 67, 74, 79, 82, 86, 87, 93, 94]. В экономической системе взаимоотношений производители, в конечном итоге, также ищут свою «экономическую нишу». Аналогичные процессы происходят и на международном рынке товаров и услуг. Здесь происходит самоорганизация производителей внутри страны, приводящая к такому перераспределению реализуемых ресурсов, при котором потребность в них на международном рынке постоянно растет, несмотря на конкуренцию между странами. Например, оборот внешней тор-

говли России с 1995 года по 2013 год постоянно возрастал [73]. На рис. 1 отражена динамика объема экспорта внешней торговли со странами ближнего и дальнего зарубежья, на рис. 2 — импорта. Небольшое падение оборота торговли в 1990-е годы объясняется падением производства в стране, а падение в 2008–2010 годы — финансовым кризисом 2008 года. В целом объемы торговли постоянно растут (рис. 1–2). То есть, судя по этому показателю, с 1995 по 2013 год конкуренция на международном рынке не оказывала влияние на торговый оборот России.

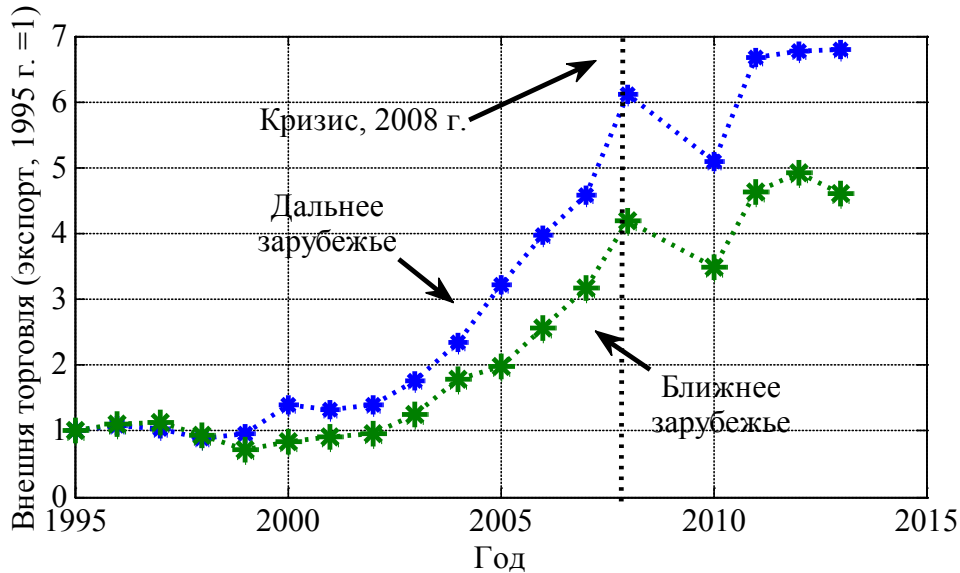


Рис. 1.

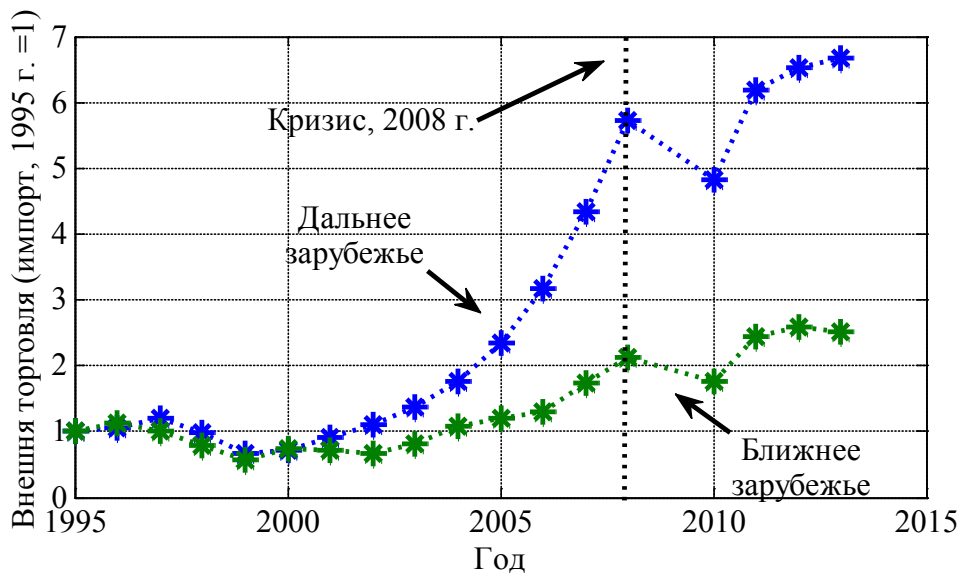


Рис. 2.

Наряду с моделями конкуренции Вольтерра были разработаны и иные математические модели биологических сообществ, в которых учитывались и конкурентные взаимоотношения [2–4, 6–8, 16, 30, 31, 37, 41, 47, 48, 57, 84, 88, 92, 97, 99], и модели конкуренции в системе экономических взаимоотношений [11, 12, 14, 35, 66]. Ниже предлагаются варианты математических моделей ухода от конкуренции или, другими словами, уход популяции в другую экологическую нишу.

Математическая модель конкуренции (Вольтера — Бигон). Для описания динамики численности двух конкурирующих популяций используется «модифицированная» математическая модель Вольтерра, учитывающая как межвидовую, так и внутривидовую конкуренцию [4, 10, 47]

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_1(c_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2), \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= x_2(c_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2). \end{aligned} \tag{1}$$

В этих уравнениях x_1 и x_2 — численности двух конкурирующих популяций, c_1 , c_2 , a_{12} , a_{21} , a_{11} и a_{22} — положительные постоянные, c_1 и c_2 — удельные скорости роста популяций при их малой численности, a_{12} и a_{21} — коэффициенты, определяющие скорость уменьшения численности популяций за счет межвидовой конкуренции, а a_{11} и a_{22} — за счет внутривидовой конкуренции [4, 10, 47].

Система уравнений (1) заменой [2]

$$x_1 = \frac{c_1}{a_{11}}u_1 \text{ и } x_2 = \frac{c_2}{a_{22}}u_2 \quad \tau = t/c_1$$

приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma_2 u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1), \end{aligned} \tag{2}$$

где $\gamma_1 = \frac{c_2 a_{12}}{c_1 a_{22}}$, $\gamma_2 = \frac{c_1 a_{21}}{c_2 a_{11}}$, $\gamma = \frac{c_2}{c_1}$.

Система уравнений (2) имеет четыре стационарные точки [4, 10, 47]

1. $u_1 = 0, u_2 = 0$.
2. $u_1 = 1, u_2 = 0$.
3. $u_1 = 0, u_2 = 1$.
4. $u_1 = (1 - \gamma_1)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$, $u_2 = (1 - \gamma_2)/(1 - \gamma_1\gamma_2)$, если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 > 1$ или $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$.

Первая стационарная точка является неустойчивой, вторая будет устойчивой, если $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 > 1$, а третья, если $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 1$. Четвертая стационарная точка реализуется и будет устойчивой, если $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$.

Неравенство $\gamma_1 = \frac{c_2 a_{12}}{c_1 a_{22}} < 1$, а это условие существования первой популяции в условиях конкуренции, обеспечивается большей скоростью роста ее численности по сравнению со скоростью роста численности второй популяции ($c_2 \square c_1$) и меньшим влиянием на нее второй популяции ($a_{12} \square a_{22}$). При этом если внутривидовая конкуренция значительно меньше межвидовой ($a_{11} \ll a_{21}$) настолько, что выполнится неравенство $\gamma_2 = \frac{c_1 a_{21}}{c_2 a_{11}} > 1$, то вторая популяция может погибнуть.

В четвёртой стационарной точке собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (2), являющиеся корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2)\lambda + \gamma(1 - \gamma_1\gamma_2)\gamma u_1 u_2 = 0,$$

отрицательные. Поэтому эта стационарная точка будет устойчивой.

Таким образом, модель конкуренции (2) допускает одновременное устойчивое существование двух популяций.

«Активный» уход от конкуренции. Эволюция видов происходила таким образом, что под влиянием внешних факторов и внутренних изменений в организмах отдельных особей изменялся внутренний метаболизм, и они постепенно начинали использовать новые трофические ресурсы [10, 22]. При этом виды продолжали существовать совместно. Это можно учесть, считая, что в модели (2) γ_1 и γ_2 функциями времени. Тогда модель «ухода» от конкуренции принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1), \\ \frac{d\gamma_1}{dt} &= -\alpha_1 \gamma_1 \varphi_1(u_1, u_2, t), \\ \frac{d\gamma_2}{dt} &= -\alpha_2 \gamma_2 \varphi_2(u_1, u_2, t). \end{aligned}$$

В этой модели предполагается, что $\varphi_1(u_1, u_2, t) \geq 0$ и $\varphi_2(u_1, u_2, t) \geq 0$. То есть считается, что функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$ не возрастающие функции времени. Это обеспечивает постепенный «уход от конкурентных взаимоотношений». Принятие в качестве функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= 0, \text{ если } \frac{du_1}{dt} > 0, \text{ и } \varphi_1(t) = 1, \text{ если } \frac{du_1}{dt} \leq 0, \\ \varphi_2(t) &= 0, \text{ если } \frac{du_2}{dt} > 0, \text{ и } \varphi_2(t) = 1, \text{ если } \frac{du_2}{dt} \leq 0 \end{aligned}$$

означает, что популяции «чувствуют» уменьшения их численности и сразу «реагируют» на это. В этой модели предполагается, что каждая популяция пытается уменьшить влияние на себя конкурирующей с ней популяции.

На рис. 3 для случая $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \gamma_1 = 0.95, \gamma_2 = 1.05, \gamma = 0.7$ (модель (1)) отражены зависимости $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (кривые 1), для случая $\alpha_1 = 0.2, \alpha_2 = 0.1, \gamma_1 = 0.95, \gamma_2 = 1.05, \gamma = 0.7$ этим же зависимостям соответствуют кривые 2 в рассматриваемой модели. Выбранный набор постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2$ в модели (1) соответствуют случаю гибели второй популяции (рис. 3, кривые 1).

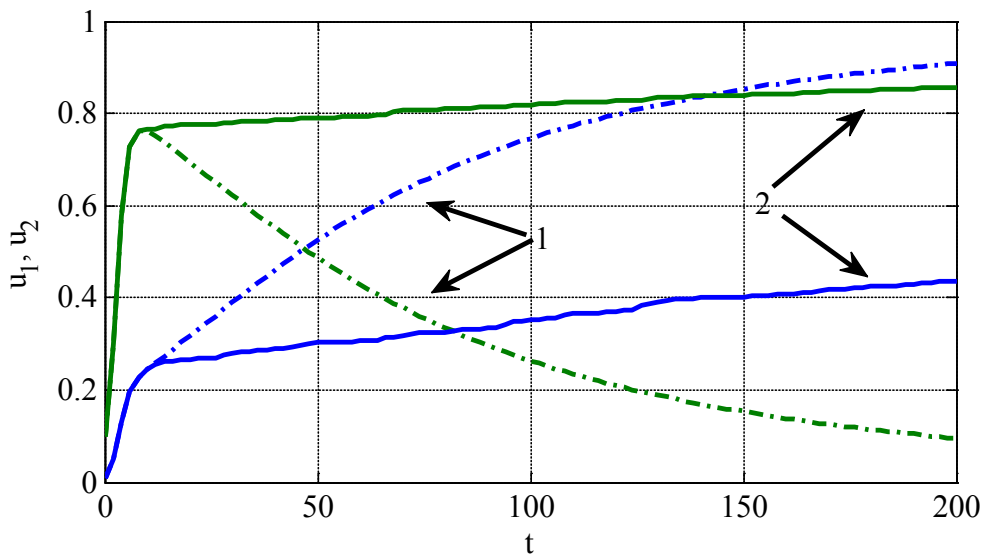


Рис. 3.

«Пассивный» уход от конкуренции. В этой модели предполагается, что уход от конкуренции происходит «естественным» путем

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 e^{-\alpha_1 u_2} u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 e^{-\alpha_2 u_1} u_1), \end{aligned} \tag{3}$$

Слагаемое $\gamma_1 e^{-\alpha_1 u_2} u_1 u_2$ в первом уравнении — скорость уменьшения численности первой популяций вызванная конкуренцией, а слагаемое $\gamma_1 e^{-\alpha_1 u_2} u_1 u_2$ во втором уравнении — скорость уменьшения второй популяций обусловленная конкуренцией.

Нетривиальная стационарная точка системы уравнений (3), в которой $0 < u_1 < 1$ и $0 < u_2 < 1$, находится как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} 1 - u_1 - \gamma_1 e^{-\alpha_1 u_2} u_2 &= 0, \\ 1 - u_2 - \gamma_2 e^{-\alpha_2 u_1} u_1 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Функция $f(z) = 1 - \alpha e^{-\beta z} z$ в точке $z = 0$ положительна ($f(0) = 1$) и является убывающей ($f'(0) = -\alpha$), а в точке $z = 1$ будет принимать положительные значения, если выполняется неравенство $\alpha e^{-\beta} < 1$. При выполнении неравенства $\beta < 1$ на промежутке $[0, 1]$ $f(z)$ будет монотонно убывающей функцией. При одновременном выполнении неравенств $\gamma_1 e^{-\alpha_1} < 1$, $\gamma_2 e^{-\alpha_2} < 1$, $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$ система уравнений (4) будет иметь единственное решение, удовлетворяющее условиям $0 < u_1 < 1$ и $0 < u_2 < 1$. При выполнении неравенства $\beta > 1$ функция $f(z)$ будет иметь минимум на промежутке $[0, 1]$ в точке $z = 1/\beta$. Поэтому при выполнении неравенства $\alpha_1 > 1$ или $\alpha_2 > 1$ система уравнений (4), в зависимости от значений постоянных, входящих в уравнения (3), может иметь два решения, удовлетворяющих условиям $0 < u_1 < 1$ и $0 < u_2 < 1$. Таким образом в этой модели могут существовать три стационарные точки.

Собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (3) являются корнями полинома

$$\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2) \lambda + \gamma u_1 u_2 (1 - \gamma_1 \gamma_2 e^{-\alpha_1 u_2 - \alpha_2 u_1} (1 - \alpha_1 u_2)(1 - \alpha_2 u_1)) = 0.$$

При одновременном выполнении неравенств $\gamma_1 e^{-\alpha_1} < 1$, $\gamma_2 e^{-\alpha_2} < 1$, $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$ свободный член этого полинома положителен его корни будут иметь отрицательные вещественные части и, соответственно, нетривиальная стационарная точка будет устойчивой.

Сезонность конкуренции. Интенсивность потребления общего трофического ресурса популяциями может изменяться во времени. Это зависит от периодичности рождения потомства, физических возможностей особей, климатических условий и других причин [10]. То есть интенсивность конкурентных взаимоотношений может зависеть от времени [10]. Учесть это в модели (2) можно, полагая γ_1 и γ_2 функциями, зависящими от времени

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 \varphi_1(t) u_2), \\ \frac{du_2}{dt} &= \gamma u_2(1 - u_2 - \gamma_2 \varphi_2(t) u_1). \end{aligned}$$

Для случая функций

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{1 + |a_1|} (1 - a_1 \cos \omega_1 t) \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{1 + |a_2|} (1 - a_2 \cos \omega_2 t) \end{aligned}$$

где $|a_1| \leq 1$ и $|a_2| \leq 1$, результаты решения уравнений в виде зависимостей $u_1(t)$ и $u_2(t)$ для случая $\gamma = 0.7$, $\gamma_1 = 1.1$, $\gamma_2 = 1.3$, $a_1 = 0.2$, $a_2 = 0.4$, $\omega_1 = \pi$, $u_1(0) = 1$, $u_2(0) = 1$ представлены на рис. 4–5. Рис. 4 соответствует $\omega_2 = 0.06$, а рис. 5 — $\omega_2 = 0.2$. В качестве начальных условий взяты $u_1(0) = 1$ и $u_2(0) = 1$. Это соответствует случаю, когда конкурентные взаимоотношения начинаются в начальный момент времени при максимальных значениях u_1 и u_2 . При принятых значениях $\gamma_1 = 1.1$ и $\gamma_2 = 1.3$ в случае $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, как это следует из анализа уравнений (1), одновременное устойчивое существование двух популяций невозможно, а в рассматриваемой модели совместное существование с периодическим изменением численности возможно.

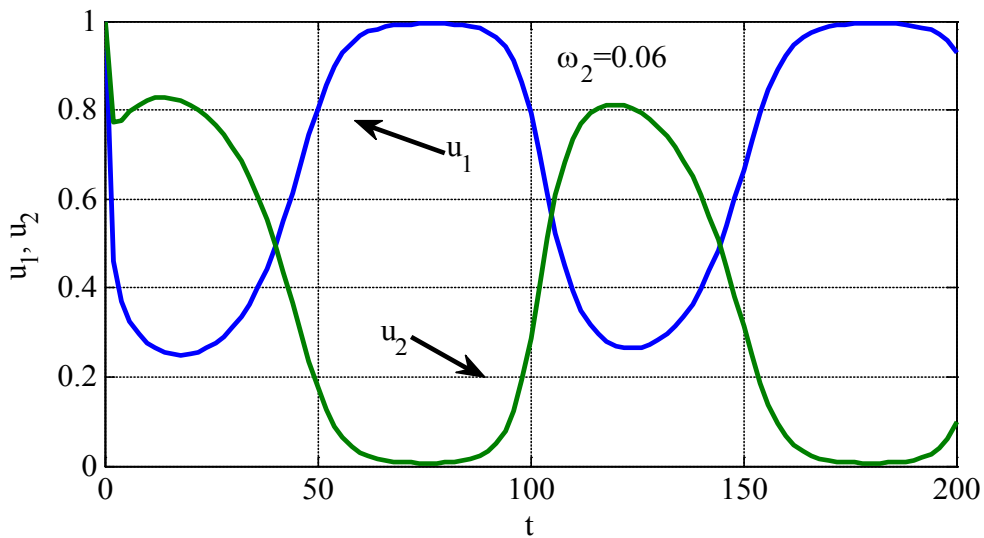


Рис. 4.

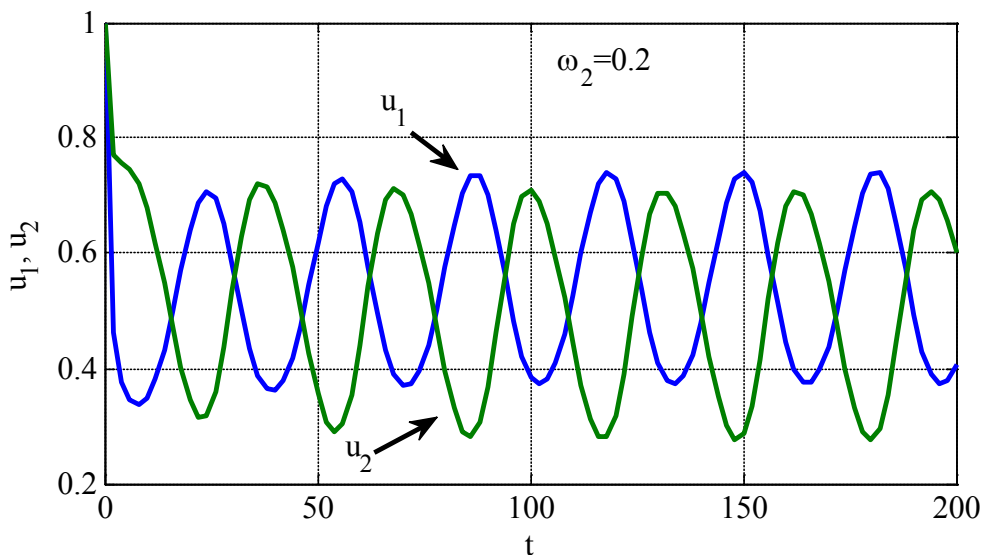


Рис. 5.

Смена ареала. При наличии конкуренции один из видов может постепенно уйти от конкурентных взаимоотношений на другой трофический ресурс [10, 21]. Пусть две конкурирующие популяции существуют на общей территории или одном трофическом ресурсе, а одна из них может переходить на трофический ресурс не доступный для другой популяции. Пусть v_1 — численность первой популяции на новом трофическом ресурсе. Тогда модель (2) переходит в модель

$$\begin{aligned}
 \frac{du_1}{dt} &= u_1(1 - u_1 - \gamma_1 u_2) - bu_1, \\
 \frac{du_2}{dt} &= \gamma_2 u_2(1 - u_2 - \gamma_2 u_1), \\
 \frac{dv_1}{dt} &= \gamma_v v_1(1 - v_1) + bu_1,
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

в которой γ_v — постоянная, а b — скорость перехода особей первой популяции на новый трофический ресурс.

Как следует из анализа системы уравнений (2) при $\gamma_1 > 1$ и $\gamma_2 < 1$ первая популяция в модели (2) погибает. При значениях γ_1 и γ_2 , удовлетворяющих этим неравенствам, стационарная точка системы уравнений (5)

$$u_1 = 0, v_1 = 1, u_2 = 1$$

будет устойчивой, поскольку все собственные значения

$$\lambda_1 = -(\gamma_1 + b - 1), \lambda_2 = -\gamma, \lambda_3 = -\gamma_v$$

матрица Якоби правой части уравнений (5) в этой стационарной точке будут отрицательными. Это соответствует случаю полному переходу первой популяции на новый трофический ресурс.

При одновременном выполнении неравенств $\gamma_1 < 1$ и $\gamma_2 < 1$ система уравнений может иметь нетривиальную стационарную точку

$$u_1 = \frac{1 - b - \gamma_1}{1 - \gamma_1 \gamma_2},$$

$$u_2 = \frac{1 - \gamma_2(1 - b)}{1 - \gamma_1 \gamma_2},$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4bu_1 / \gamma_v} \right),$$

если выполняется неравенство $b + \gamma_1 < 1$. При этом собственные значения матрицы Якоби правой части уравнений (5) являющиеся корнями уравнения

$$\left(\lambda + \gamma_v \sqrt{1 + 4bu_1 / \gamma_v} \right) \left(\lambda^2 + (u_1 + \gamma u_2) + \gamma u_2 u_1 (1 - \gamma_1 \gamma_2) \right) = 0,$$

будут иметь отрицательные вещественные части. То есть в случае реализации эта стационарная точка будет устойчивой.

Таким образом, в рамках подходов, применяемых в математической популяционной биологии при разработке математических моделей [4, 10], можно предложить математические модели «ухода» от конкуренции, обусловленным изменением «метаболизма» особей («пассивный уход» или «активный уход») или переходом особей на иной трофический ресурс. Влияние на эволюцию конкурирующих популяций могут оказывать различные факторы, с учетом которых можно строить и другие модели «ухода» от конкуренции. Это антропогенное воздействие, климатические условия, агрессивная внешняя среда, резкое изменение метаболизма особей, недостаток или избыток жизненно необходимых веществ [10, 20, 24, 36, 51, 52]. Математические модели конкуренции можно разрабатывать на основе моделей, описывающих другие системы взаимоотношений биологических популяций (например, хищник-жертва, симбиоз) [4, 10, 17, 23, 42–44, 50, 55]. Для учета пространственного распределения популяций можно использовать методы механики сплошных сред, находящихся под внешним воздействием, с учетом происходящих в среде «химических реакций» [18, 26, 27, 39, 40, 45, 46, 49, 58–60, 69–71, 89, 91, 95, 96]. На конкуренцию в системе экономических взаимоотношений могут влиять: выбор оптимальной стратегии предприятия [5, 12, 19, 25], умение принимать решения в условия неполноты информации [9, 11, 34, 64], рациональный ответ на внешнее воздействие [21], переход от конкуренции к партнерству [35, 54], уменьшение внутренних потерь за счет формирования «грамотного» персонала [13, 15, 50, 55, 62, 63, 76, 81]. Учет большего числа факторов в математических моделях приведет и к увеличению искомым функций, для нахождения которых необходимы и соответствующие методы решения математических задач [1, 29, 49, 64, 75].

Заключение. Рассмотренные математические модели эволюционных изменений во взаимоотношениях между конкурирующими популяциями объясняют возможные механизмы «ухода» от конкуренции либо путем изменения внутреннего метаболизма отдельных особей, либо постепенным уходом части популяции на новую «территорию». Наряду с этим возможно совместное существование нескольких популяций в условиях «жесткой» конкуренции, если она является «сезонной».

Литература:

1. Аббасов, М. Э. О. Условия экстремума в терминах несобственных экзостеров) // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2011. — № 2. — с. 3–8.
2. Абдулина, К. А., Старков В. Н. Квазистационарный подход в исследовании распространения насекомых в лесной системе // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 5–15.
3. Александров, А. Ю., Платонов А. В. О предельной ограниченности и перманентности решений одного класса дискретных моделей динамики популяций с переключениями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 1. — с. 5–16.

4. Базыкин, А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 368 с.
5. Балакирева, А. Е., Костина В. В., Меркушова Н. И. Интеграция классических и современных методик разработки конкурентной стратегии организации с целью повышения конкурентоспособности предприятия // Молодой ученый. — 2014. — № 2 (61). — с. 405–412.
6. Балькина, Ю. Е., Колпак Е. П. Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — с. 20–31.
7. Балькина, Ю. Е., Колпак Е. П. Модель роста фолликулярной клетки щитовидной железы / В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013) сборник трудов VI международной конференции. 2013. — с. 31–32.
8. Балькина, Ю. Е., Колпак Е. П. Точечная однокамерная модель функционирования фолликула щитовидной железы / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятое Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др.. Тверь, 2013. — с. 157–158.
9. Басков, О. В. Критерий непротиворечивости «квантов» информации о нечетком отношении предпочтения лица, принимающего решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 2. — с. 12–18.
10. Бигон, М., Харпер Дж., Таунсенд К. Экология. Особи, популяции и сообщества: в 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1989. — 477 с.
11. Буре, А. В. Конкурентное прогнозирование в случае несобственного распределения вероятностей // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 2. — с. 19–26.
12. Буре, А. В. Об одной теоретико-игровой модели тендера // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 25–32.
13. Буре, В. М., Екимов А. В., Сvirкин М. В. Имитационная модель формирования профиля мнений внутри коллектива // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 93–98.
14. Валиотти, Н. А. Нейросетевая модель для дифференцированной оценки влияния одновременных внешних событий в сфере розничной торговли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 2. — с. 111–119.
15. Вольтерра, В. Математическая теория борьбы за существование. Москва-Ижевск., Институт компьютерных технологий, 2004. — 288 с.
16. Гасратова, Н. А., Бойцов Д. С., Габриелян Л. А., Тюганова Т. М. Математическая модель иммунного ответа организма млекопитающих на поражение кожи ожогом // Молодой ученый. — 2014. — № 12 (71). — с. 1–7.
17. Гасратова, Н. А., Столбовая М. В., Бойцов Д. С., Степанова Д. С. Математическая модель хищник-жертва на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 11. — с. 1–10.
18. Гасратова, Н. А. Решение некоторых классических пространственных задач теории упругости в напряжениях // Молодой ученый. — 2014. — № 3 (62). — с. 1–6.
19. Гасратова, Н. А., Гасратов М. Г. Сетевая модель управления запасами для случая количественной конкуренции // Сибирский журнал индустриальной математики. — 2015. — Т. 18. — № 1. — с. 14–27.
20. Гасратова, Н. А., Столбовая М. В., Неверова Е. Г., Бербер А. С. Математическая модель «ресурс-потребитель» // Молодой ученый. — 2014. — № 10 (69). — с. 5–14.
21. Герасимчук, З. В., Билык О. С. Анализ эколого-экономических конкурентных преимуществ регионов Украины // Молодой ученый. — 2013. — № 10. — с. 298–300.
22. Гиляров, А. М. В поисках универсальных закономерностей организации сообществ: прогресс на пути нейтрализма // Журнал общей биологии. — 2010. — Т. 71. — № 5. — с. 386–401.
23. Горбунова, Е. А., Колпак Е. А. Математические модели одиночной популяции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2012. — № 4. — с. 18–30.
24. Горбунова, М. В., Колпак Е. П., Крицкая А. В. Математическая модель антропогенного воздействия на одиночную популяцию / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятое Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др. Тверь, 2013. — с. 165.
25. Гравшина, И. Н. Конкурентная стратегия в системе управления конкурентоспособностью предприятия // Молодой ученый. — 2013. — № 6. — с. 296–298.

26. Даль, Ю. М., Пронина Ю. Г. Деформация шаровой поры в нелинейно-упругом теле // Известия Российской академии наук. Серия физическая. — 2006. — Т. 70. — № 9. — с. 1341–1343.
27. Даль, Ю. М., Пронина Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 1998. — № 5. — с. 78.
28. Дегтярева, А. В. Роль рекламы в новой экономике // Молодой ученый. — 2014. — № 20. — с. 257–261.
29. Жук, В. В., Тумка О. А., Козлов Н. А. О константах в неравенствах типа Джексона для наилучших приближений периодических дифференцируемых функций // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 33–41.
30. Жукова, И. В., Колпак Е. П. Математическая модель солидной опухоли // Естественные и математические науки в современном мире. — 2013. — № 13. — с. 18–25.
31. Жукова, И. В., Колпак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 5–18.
32. Казарова, А. Я. Формирование рыночных механизмов функционирования жилищно-коммунального комплекса // Молодой ученый. — 2013. — № 12 (59). — с. 312–314.
33. Капранова, Н. Н. Современное предприятие в конкурентной среде // Молодой ученый. — 2014. — № 21 (80). — с. 328–332.
34. Карелин, В. В. Один подход к задаче оценки параметров динамической системы в условиях неопределенности // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2012. — № 4. — с. 31–36.
35. Колабутин, Н. В. Двухуровневая кооперация в дифференциальной игре технологического альянса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 42–63.
36. Колесин, И. Д., Старков В. Н., Гасратова Н. А. Одиночная популяция под антропогенным давлением // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2014. — № 6 (96). — с. 226–232.
37. Колобов, А. Н. Численно-аналитическое исследование модели роста дерева в условиях конкуренции за свет // Математическая биология и биоинформатика. — 2012. — Т. 7. — № 1. — с. 125–138.
38. Колокольцов, В. Н., Малафеев О. А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) // Вестник гражданских инженеров. — 2010 — № 4 — с. 144–153.
39. Колпак, Е. П. Устойчивость и критические состояния безмоментных оболочек при больших деформациях // диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук / Санкт-Петербург, 2000.
40. Колпак, Е. П. Введение в механику сплошных сред учебное пособие / Е. П. Колпак; С.-Петербург. гос. ун-т. СПб. 2004.
41. Колпак, Е. П., Балыкина Ю. Е., Котина Е. Д., Жукова И. В. Математическая модель нарушений функционирования щитовидной железы // Молодой ученый. — 2014. — № 2 (61). — с. 19–24.
42. Колпак, Е. П., Бронникова А. И., Полежаев В. Ю. Математическая модель стачечного движения в России в начале XX века // Молодой учёный. — 2015. — № 3 (83). — с. 4–15.
43. Колпак, Е. П., Габриелян Л. А., Бронникова А. И., Крылова В. А. О математических моделях симбиоза // Молодой ученый. — 2015. — № 4 (84). — с. 6–14.
44. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Балыкина Ю. Е., Гасратова Н. А. Математическая модель одиночной популяции на биолокальном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 1. — с. 28–33.
45. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Жукова И. В. Математическая модель популяционной волны // Естественные и математические науки в современном мире. — 2014. — № 16. — с. 25–41.
46. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Столбовая М. В., Балыкина Ю. Е. Математическая модель логистической популяции на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 3 (62). — с. 6–14.
47. Колпак, Е. П., Горыня Е. В., Крылова В. А., Полежаев Д. Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 12 (71). — с. 12–22.
48. Колпак, Е. П., Горыня Е. В., Полежаев В. Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций (линейный ареал) / В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. Воронеж, 2014. с. 206–209.
49. Колпак, Е. П., Жукова И. В., Степанова Д. С., Крицкая А. В. О численных методах решения эволюционных уравнений на примере математической модели «хищник-жертва» // Молодой ученый. — 2014. — № 4. — с. 20–30.
50. Колпак, Е. П., Селицкая Е. А., Габриелян Л. А. Математическая модель коррупции в системе «власть-общество» // Молодой ученый. — 2015. — № 10 (90). — с. 9–16.

51. Колпак, Е. П., Столбовая М. В. Математическая модель кинетики роста растений // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2013. — № 12 (90). — с. 230–232.
52. Колпак, Е. П., Столбовая М. В. Математическая модель роста растений / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятое Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др. Тверь, 2013. с. 186.
53. Кондратов, М. В. Формирование и развитие теории конкуренции // Молодой ученый. — 2010. — № 6. — с. 146–149.
54. Кошечева, П. П. Россия и НАТО: партнерство или конкуренция? // Молодой ученый. — 2012. — № 5. — с. 354–356.
55. Крылова, В. А., Колпак Е. П., Сыромолотова К. И., Воротова Т. А. Математические модели формирования спортивных групп // Молодой учёный. — 2015. — № 8 (88). — С. 10–19.
56. Кузнецова, Е. А. Влияние развития малого и среднего предпринимательства на развитие конкуренции // Молодой ученый. — 2012. — № 2. — с. 126–128.
57. Малков, С. Ю., Кирилук И. Л. Моделирование динамики конкурирующих сообществ: варианты взаимодействия // Информационные войны. — 2013. — № 2 (26). — с. 49–56.
58. Мальков, В. М., Малькова Ю. В. Анализ сингулярности напряжений в нелинейной задаче фламана для некоторых моделей материала // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72. — № 4. с. 652–660.
59. Мальков, В. М., Малькова Ю. В. Нелинейная задача Фламана для материала Бартенева-Хазановича // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2005. — № 1–2. — с. 49–55.
60. Мальков, В. М., Малькова Ю. В. Плоские задачи о сосредоточенных силах для полулинейного материала // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — с. 83–96.
61. Миндлин, Ю. Б., Колпак Е. П., Балыкина Ю. Е. Проблемы использования кластеров в Российской Федерации // Вестник НГУЭУ. — 2014. — № 1. — с. 22–32.
62. Молчанова, Е. Н. Конкурентоспособность персонала как один из ключевых факторов конкурентоспособности организации // Молодой ученый. — 2014. — № 6 (65). — с. 458–460.
63. Морозова, Н. С. Виртуальные формации и виртуальные лидеры в задаче о движении строем группы роботов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 135–149.
64. Олемской, И. В., Фирюлина О. С. Алгоритм поиска наибольшего независимого множества // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 1. — с. 79–89.
65. Орлова, Е. В., Ульмасова И. С. Методы ценообразования и их использование на высоко конкурентном рынке // Молодой ученый. — 2014. — № 3 (62). — с. 495–497.
66. Полякова, Л. Н., Карелин В. В., Буре В. М., Хитров Г. М. Точные штрафные функции в задаче управления одной системой массового обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 75–82.
67. Попова, И. Ю. Информационная составляющая упаковки, как одна из составляющих конкурентных преимуществ предприятий индустрии питания // Молодой ученый. — 2015. — № 2. — с. 297–300.
68. Поспелов, И. Г., Радионов С. А. Динамика количества фирм в рамках концепции экономики разнообразия // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26. — № 2. — с. 65–80.
69. Пронина, Ю. Г. Периодическая задача о точечных воздействиях в упругой полуплоскости с отверстиями // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2009. — № 3. — с. 118–128.
70. Пронина, Ю. Г. Сосредоточенные силы и моменты в упругой полуплоскости с отверстием // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2009. — № 2. — с. 104–114.
71. Пронина, Ю. Г. Центры расширения-сжатия в упругой полуплоскости // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. — 2007. — № 2. — с. 140–149.
72. Решетько, Н. И., Понявина М. Б., Абрамова К. В. Конкуренция в сетевой фирме // Молодой ученый. — 2014. — № 6–2 (65). — с. 49–52.
73. Российский статистический ежегодник. М.: Статистика России, 2013. — 717 с.
74. Сандомирская, М. С. Цена внезапного раскрытия инсайдерской информации на фондовом рынке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 1. — с. 120–127.

75. Слупко, К. А. Периодические дифференциально-разностные системы. алгоритм построения матрицы Ляпунова // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 150–159.
76. Смирнова, М. В., Колпак Е. П. Математическое моделирование снижения детской заболеваемости в России / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятые Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др.. Тверь, 2013. — с. 222.
77. Суска, А. А. Конкурентный потенциал как категория конкуренции и объект управления // Молодой ученый. — 2012. — № 12. — с. 277–279.
78. Ткаченко, О. Н. Значение информационных технологий в формировании конкурентных преимуществ промышленных предприятий // Молодой ученый. — 2015. — № 6 (86). — с. 469–471.
79. Ульянченко, А. В., Евчук Л. А. Роль информационных технологий в формировании конкурентных преимуществ сельскохозяйственных предприятий // Молодой ученый. — 2012. — № 8. — с. 146–149.
80. Файзрахманов, И. М., Файзрахманова А. Л. Формирование ценностно-коммуникативной составляющей готовности будущих учителей к конкурентным отношениям // Молодой ученый. — 2013. — № 3. — с. 502–504.
81. Фириюлина, О. С. Нахождение всех максимальных независимых множеств неориентированного графа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 1. — с. 63–69.
82. Харламов, О. И., Булатов Б. Р. Особенности монополистической конкуренции // Молодой ученый. — 2014. — № 15–1. — с. 148–150
83. Цю, Ш. Разработка системы управления конкурентной стратегией // Молодой ученый. — 2014. — № 21 (80). — с. 456–458.
84. Шестакова, Т. П. Исследование одной математической модели конкуренции трех популяций // Инновации в науке. — 2012. — № 7. — с. 6–11.
85. Шоев, А. Х. Некоторые аспекты конкурентной борьбы за ресурсы в мировой экономике // Молодой ученый. — 2014. — № 6 (65). — с. 532–534.
86. Шустов, А. А. Роль инновационной деятельности в конкурентной борьбе предприятия // Молодой ученый. — 2013. — № 10. — с. 412–416.
87. Яковлева, Ю. А. Роль конкуренции в рыночной экономике // Молодой ученый. — 2014. — № 3 (62). — с. 610–613.
88. Balykina, Y. E., Kolpak E. P., Kotina E. D. Mathematical model of thyroid function // Middle East Journal of Scientific Research. — 2014. — T. 19. — № 3. — с. 429–433.
89. Dal' Yu. M., Pronina Yu. G. On concentrated forces and moments in an elastic half-plane // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. — 1998. — № 1. — с. 57–60.
90. Hutchinson, G. E. Homage to Santa Rosalia, or why are there so many kinds of animals? // American Naturalist. — 1959. — V. 93. — С. 145–159.
91. Kolpak, E. P., Ivanov S. E. Mathematical and computer modeling vibration protection system with damper // Applied Mathematical Sciences. — 2015. — V. 9. — no. 78. — С. 3875–3885.
92. Mirrahimi, S., Perthame B., Yuichiro Wakano J. Direct competition results from strong competition for limited resource // Journal of Mathematical Biology. — 2014. — V. 68. — 931–949.
93. Mozzherina, E. An approach to improving the classification of the New York Times annotated corpus // Communications in Computer and Information Science. — 2013. — T. 394. — с. 83–91.
94. Peresada, V. P., Smirnov N. V. E., Smirnova T. E. Development control of a multicommodity economy based on the dynamical input-output model // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 4. — с. 119–132.
95. Pronina, Y. Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — T. 50. — № 22–23. — с. 3626–3633.
96. Pronina, Y. G. Estimation of the life of an elastic tube under the action of a longitudinal force and pressure under uniform surface corrosion conditions // Russian metallurgy (Metally). — 2010. — T. 2010. — № 4. — с. 361–364.
97. Sanling Yuan, Dongmei Xiao, Maoan Han Competition between plasmid-bearing and plasmid-free organisms in a chemostat with nutrient recycling and an inhibitor // Mathematical Biosciences. — 2006. — V. 202. — N 1. — P. 1–28.
98. Sze-Bi Hsu, Xiao-Qiang Zhao A Lotka–Volterra competition model with seasonal succession // Journal of Mathematical Biology. — 2012. — DOI 10.1007/s00285–011–0408–6.
99. Zhukova, I. V., Kolpak E. P., Balykina Yu. E. Mathematical Model of Growing Tumor // Applied Mathematical Sciences. — V. 9. — 2014. N 30. — 1455–1466.

Анализ натуральных измерений на озере Шира в летний период 2013–2014 гг.

Компаниец Лидия Алексеевна, кандидат физико-математических наук, доцент
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск);

Липина Ольга Андреевна, студент;
Корсакова Полина Александровна, студент
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

Соленые озера представляют собой неоценимую кладовую для такого важного ресурса как лечебные воды и грязи. Очень часто они становятся центром курортной зоны и актуальнейшая задача современности — сохранение ценнейших природных объектов. Примером такого озера в республике Хакасия (Россия) является озеро Шира. При функционировании курортных зон очень часто возникают проблемы, связанные с антропогенным воздействием, т.е. загрязнением озер вследствие производственной деятельности человека. Для озера Шира такая опасность возникает, например, при попадании сточных вод в озеро. Известно, что изменение состава воды способно привести к появлению сине-зеленых водорослей и уменьшению лечебных свойств воды. Нахождение взаимосвязи между различными гидрофизическими параметрами течения по результатам натуральных измерений представляет собой очень сложную и трудоемкую задачу гидрофизики стратифицированных водоемов и решается она, как правило, большим научным коллективом [1], [2].

Ввиду возможной опасности загрязнения озера Шира проводится постоянный мониторинг экологической обстановки. Он включает в себя целый комплекс исследований: биологических и химических свойств воды; длительные измерения температуры, ветра и скорости в озере. Полученные значения с одной стороны являются показателями экологического состояния озера, с другой представляют собой начальные данные и средство верификации для программ трехмерных расчетов при математическом моделировании течений в озере Шира.

Измерения глубины озера, температуры воды, солености, химического состава воды начались еще в 1957 году. Используя современные измерительные приборы, оказалось возможным определить скорость движения воды в озере в летний период [3], [4]. В данной работе анализируются длительные измерения основных гидрофизических величин в озере Шира в летний период.

1. Озеро Шира представляет собой бессточное озеро с единственным притоком в виде речки Сон. Количество пресной воды, поставляемой этим притоком, невелико, и до некоторых пор это не принималось во внимание. По данным измерений известно, что глубина озера изменяется в пределах 5 метров с периодом в несколько десятилетий (рис. 1).

Определяющим фактором движения в озере Шира является ветровое воздействие.

2. Измерения скорости и направления ветра проводились с использованием локальной метеостанции Vantage PRO 2, размещенной непосредственно на берегу озера. Расположение поселка Шира и местом на берегу озера, где проводились измерения, видны из рис. 2. Расстояние между поселком и озером около 12 км.

Результаты измерения ветра в районе озера Шира (июнь-июль 2014 г.) представлены в виде розы ветров на рис. 3 (левая часть). Видно, что преобладающим в этот период был юго-западный ветер 5-7 м/с (слева).

На правой части рис. 3 изображена роза ветров, полученная с использованием данных метеостанции, расположенной в районе станции Шира.

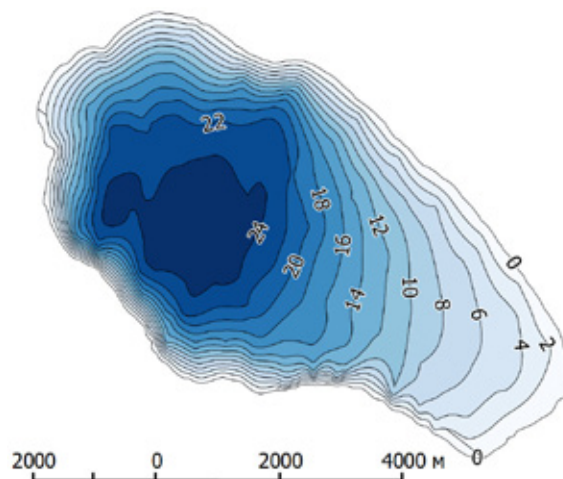


Рис. 1. Батиметрия озера Шира



Рис. 2. Расположение поселка Шира и озера Шира

Сравнение данных для двух метеостанций показывает хорошее совпадение по величине ветра, что касается направлений, то основные направления повернуты относительно друг друга на угол порядка 40 градусов,

что необходимо учитывать при дальнейших исследованиях.

Рис. 4 детализирует изменчивость силы ветра в период с 3-го по 30 июля 2014 г., измерения на берегу озера.

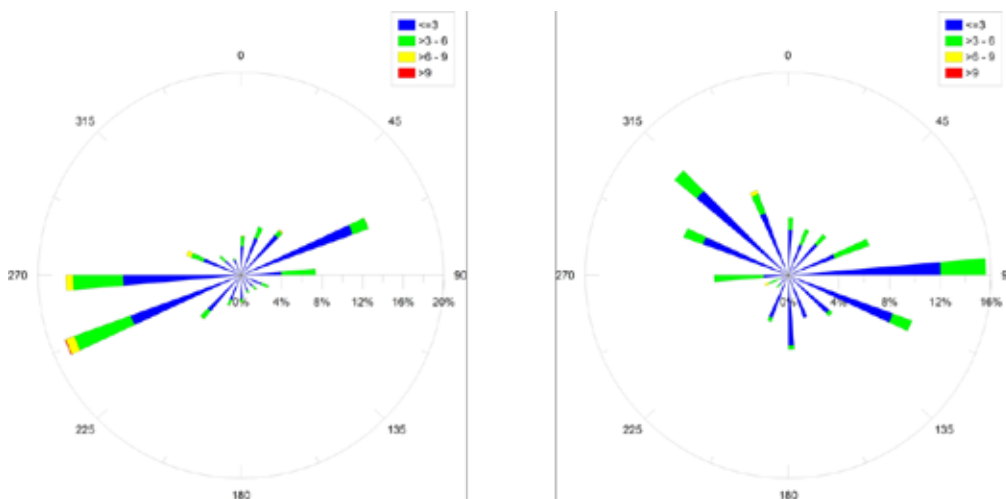


Рис. 3. Роза ветров для озера Шира в период с 19 июня по 31 июля 2014 г.

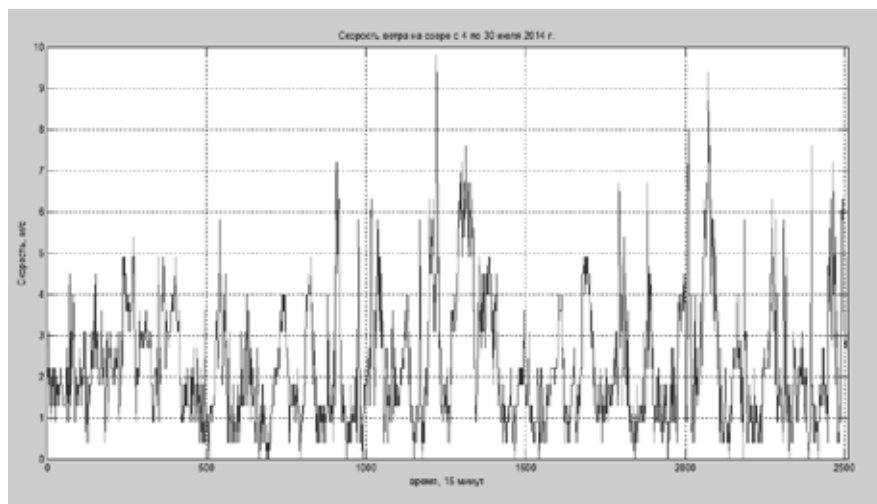


Рис. 4. Величина скорости ветра в июле месяце (3-30) на озере Шира, данные получены при сглаживании по трем точкам

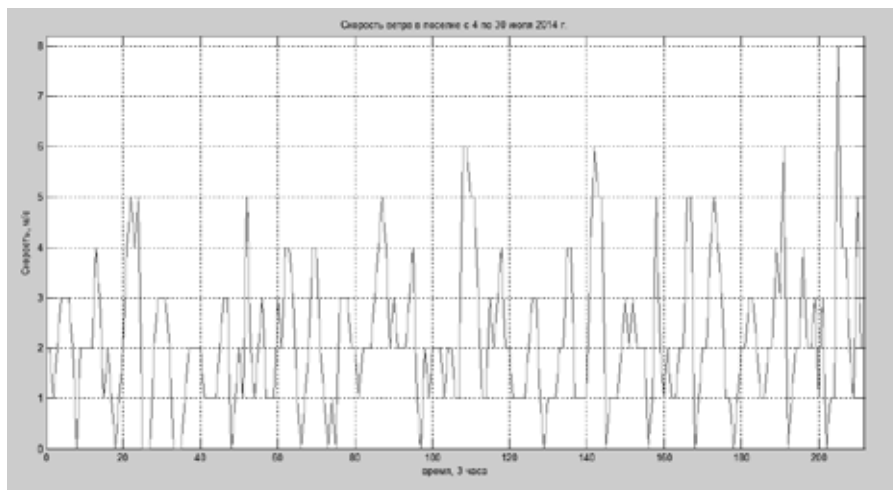


Рис. 5. Величина скорости ветра в июле месяце (3-30) в поселке Шира, данные взяты с сайта <http://rp5.ru/>

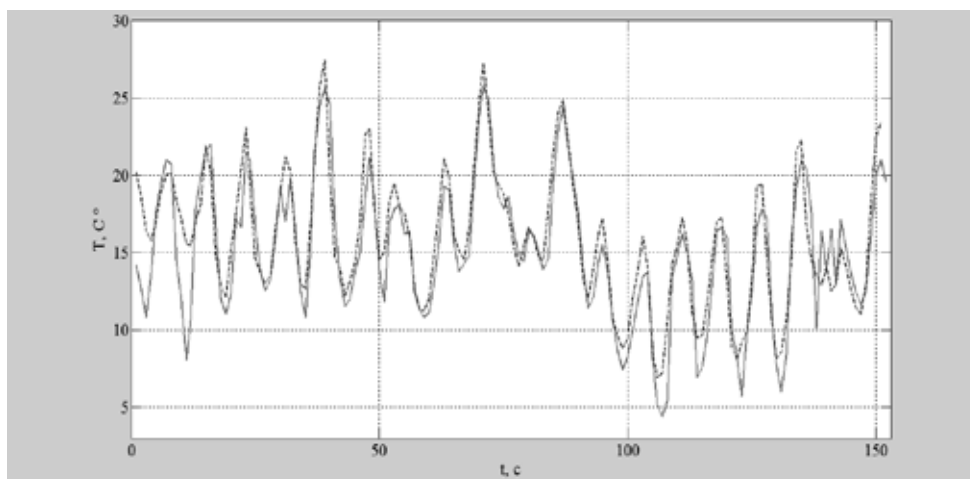


Рис. 6. Значения температуры воздуха в период с 11 по 30 июня 2013 г. по измерениям локальной метеостанции (озеро Шира) и в поселке Шира. Пунктирная линия — температура на озере, сплошная линия — температура в поселке.

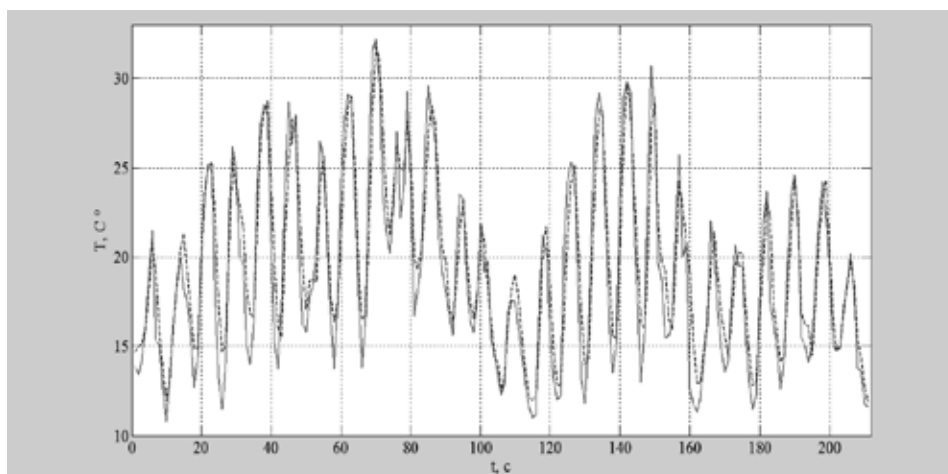


Рис. 7. Значения температуры воздуха в период с 4 по 30 июля 2014 г. по измерениям локальной метеостанции (озеро Шира) и в поселке Шира. Пунктирная линия — температура на озере, сплошная линия — температура в поселке.

Анализ показывает, что среднее значение величины скорости ветра в поселке равно 2.2054 м/с (рис. 5), а на озере 2.2999 м/с. Из рис. 4 видно, что на озере практически всегда есть, пусть и небольшой (1 м/с), ветер.

3. Измерения температуры воздуха проводились на берегу озера и в поселке Ши́ра в 2013–2014 гг.

Из рис. 6–7 видно, что точки локальных экстремумов температуры совпадают, но в точках локальных минимумов значения температуры воздуха на озере больше, чем в поселке.

4. Длительные измерения температуры воды проводились в 2013–2014 гг. термисторными датчиками (рис. 8).

Длительные измерения температуры воды 2013 г. проводились с точностью до 0.5 градуса, но, тем не менее, позволили выяснить картину появления устойчивой летней стратификации в результате весеннего нагрева. Были обнаружены колебания изотерм, типичные для внутренних волн, что подтвердилось наблюдениями 2014 г. (рис. 9–10).

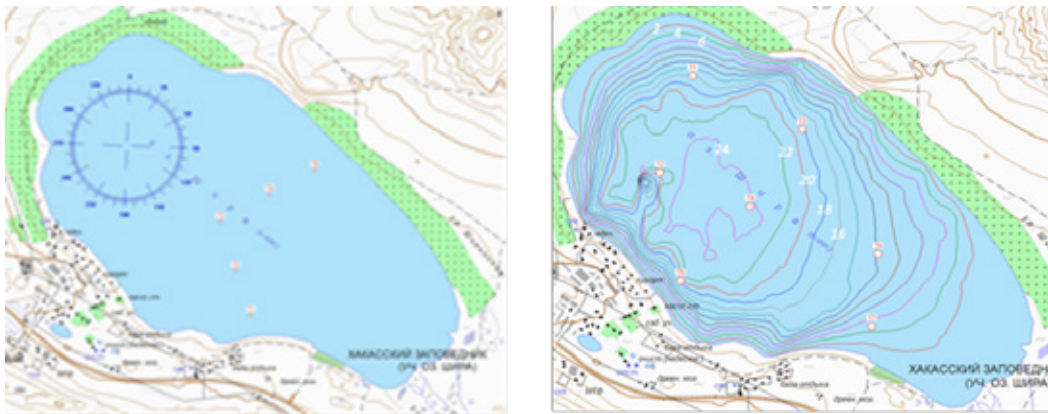


Рис. 8. Картина установки датчиков температуры воды на озере 2013 г. — слева и 2014 г. — справа

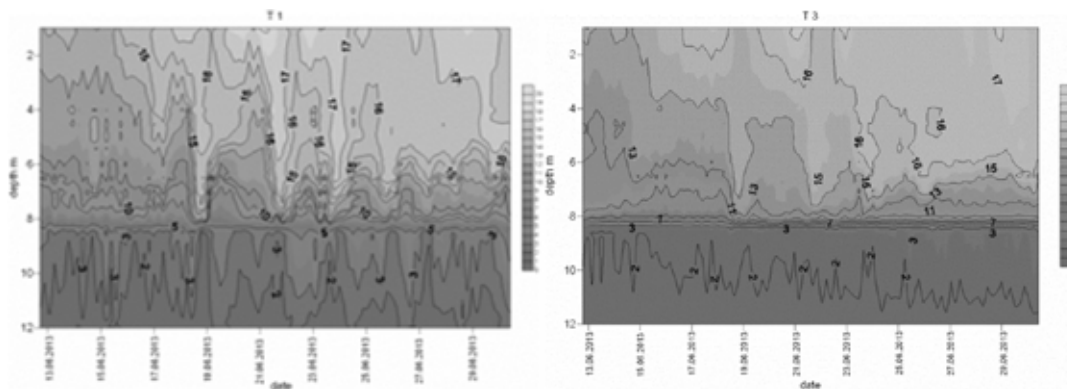


Рис. 9. Колебания изотерм в двух точках озера 2013 г.

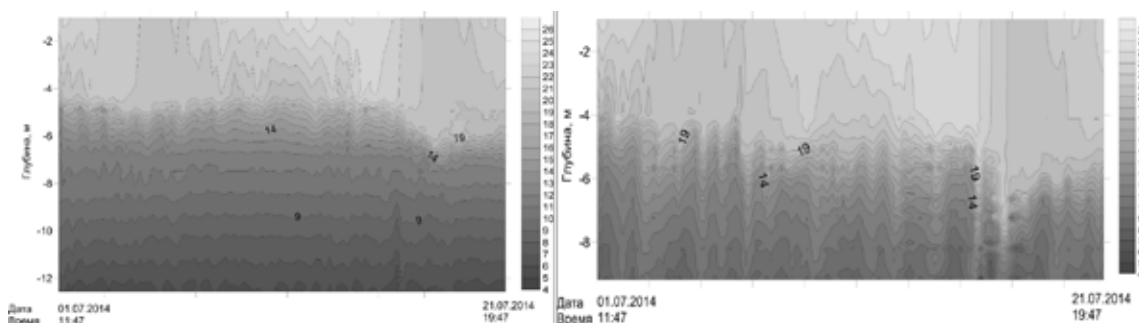


Рис. 10. Колебания изотерм в двух точках озера 2014 г.

5. Измерения скорости течения (рис. 11) проводились доплеровскими профилографами скорости ADCP 1200 и ADCP 600.

Измерения скорости течения на нескольких горизонтах позволили определить средние значения скорости течения на различных глубинах.

В таблице 1 приведены средние значения при измерении прибором ADCP 1200.

Максимальные значения средних скоростей наблюдаются на верхней границе термоклина (глубина 3.7 м) и в зоне термоклина (глубина 9.7 м).

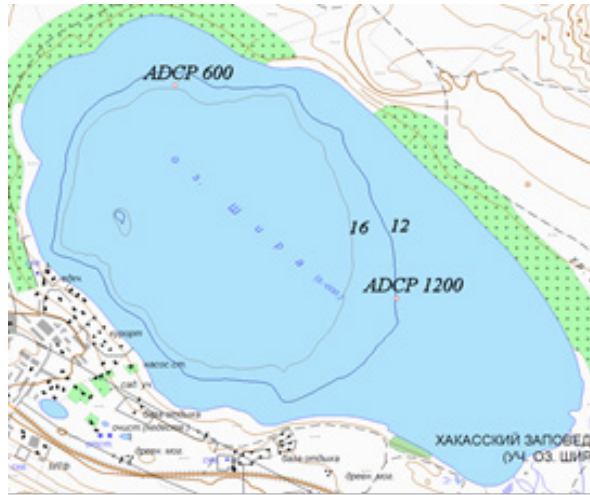


Рис. 11. Расположение точек измерения течения 2014 г.

Таблица 1. Таблица средних значений модуля горизонтальной составляющей скорости на всех измеренных горизонтах

Глубина, м	Среднее значение модуля скорости	Глубина, м	Среднее значение модуля скорости
9.7	01.04.91	5.2	3.31561
8.95	3.76456	4.45	3.73625
8.2	3.50519	3.7	3.77629
7.45	3.34472	2.95	3.62584
6.7	3.18509	2.2	3.6123
5.95	3.23297		

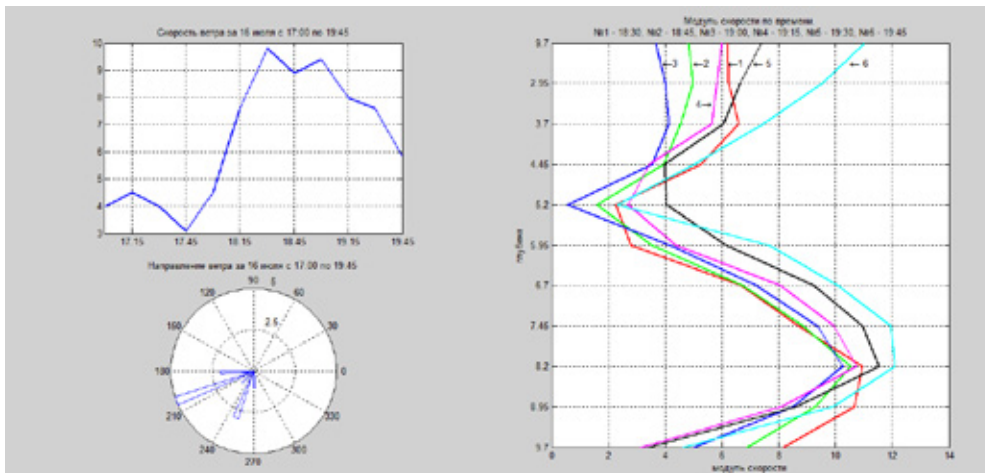


Рис. 12. Слева: значения скорости ветра по измерениям локальной метеостанции (озеро Шира) в период резкого изменения ветра; справа: значения модуля горизонтальной скорости на тот же период времени

Влияние резкого уменьшения силы ветра демонстрирует рис. 12.

Выводы

1. В первом приближении для расчетов можно брать начальные данные для температуры и ветра из измерений в поселке Ши́ра с учетом поправки на направление ветра.

2. Соответствие между величинами скорости ветра и средних значений скорости горизонтального течения следующее: при средней величине скорости ветра порядка 2 м/с средние скорости течения 2-4 см/с.

3. Резкие изменения силы ветра приводят к появлению эффектов колебания для горизонтальных составляющих скорости течения.

Литература:

1. Гилл, А. Динамика атмосферы и океана / А. Гилл. Пер. с англ. В.Э. Рябина, Ф.Н. Филатова, ред. Г.П. Курбаткина. — М.: Мир, 1986. — 415 с
2. Зацепин А.Г. Изменчивость поля течений в прибрежной зоне Чёрного моря по измерениям донной станции ADCP / В.Б. Пиотух, А.О. Корж, О.Н. Куклева, Д.М. Соловьёв. Океанология, 2012. — № 5. — с. 629–642.
3. Баранов В.И. Пространственно-временная изменчивость основных характеристик озера Ши́ра в сезоне наблюдений 2011–2012 гг. / В.И. Баранов и др. Вестник Бурятского государственного университета. Математика Информатика, 2013. — № 9. — с. 148–156.
4. Компаниец Л.А. Теоретические и экспериментальные исследования скоростного режима озера Ши́ра в летний период / Л.А. Компаниец, Т.В. Якубайлик, Л.В. Гаврилова. Препринт, ИВМ СО РАН, СФУ. — Красноярск, 2012. — 47 с.

Моделирование ударных волн сжатия в пористых металлах

Краснов Александр Александрович, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

Моделирование поведения различных сред под воздействием внешних сил имеет большое значение для многих прикладных областей: материаловедение, машиностроение, геологические отрасли науки. Пористые металлы — достаточно новые, перспективные материалы. Для них характерны низкая плотность и способность поглощать большое количество энергии в процессе деформации при относительно низком уровне напряжения. Исследованию свойств пористых металлов и их поведения при деформации посвящены работы многих зарубежных и отечественных исследователей.

Модель

При построении модели используется реологический метод. На рис. 1 приведена реологическая схема пористой среды [1].

В этой схеме поведение пористого металла до момента схлопывания пор имитирует пружина с модулем упругой податливости a , а повышение жесткости после схлопывания пор — пружина с модулем b . Жесткий контакт описывает пороговое повышение жесткости среды при уплотнении. Также эта схема учитывает пластические свойства пористого металла.

Диаграмма связи между напряжением и деформацией пористой среды при одноосном сжатии изображена на рис. 2. Процесс упругой деформации описывается уравнением $\sigma = \varepsilon / a$, а процесс упругопластической деформации материала после схлопывания пор — уравнением $\sigma = (\varepsilon + \varepsilon_0) / b - \sigma_s^-$. Точка $\varepsilon = -\varepsilon_0$ соответствует моменту схлопывания пор. Приведенная диаграмма качественно соответствует результатам практических экспериментов по сжатию пористых металлов [2, 3].

Используя реологическую схему, можно получить определяющие соотношения, которые совместно с уравнениями движения образуют замкнутую математическую модель пространственного динамического деформирования пористого металла [4, 5]:

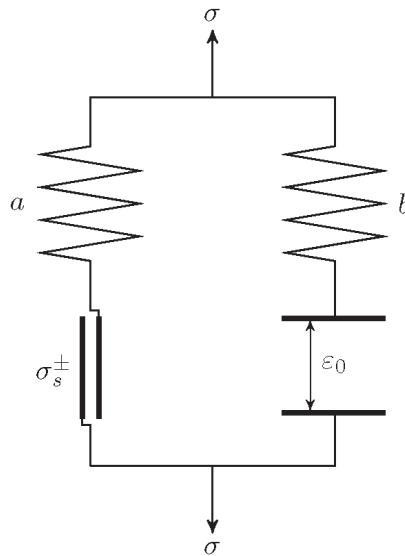


Рис. 1. Реологическая схема

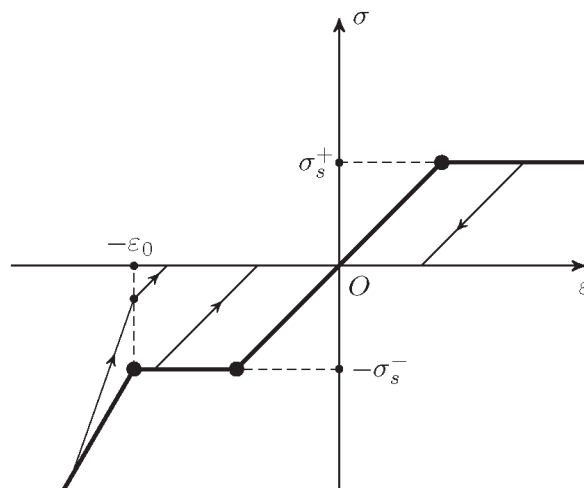


Рис. 2. Диаграмма связи между напряжением и деформацией

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \dot{v} = \nabla \cdot \sigma + f, \\ \sigma = s + \pi(q + q^0), \\ (\tilde{s} - s) : (a : \dot{s} - \nabla v) \geq 0 \quad (\tilde{s}, s \in F), \\ 2b : \dot{q} = \nabla v + \nabla v^*. \end{array} \right.$$

Здесь $\rho_0 = \rho(1 - \Theta_0)$ — плотность; q^0 — тензор, характеризующий пористость; v — вектор скорости; σ — тензор напряжений; f — вектор объемных сил; ∇ — оператор Гамильтона; * обозначает сопряженный тензор. Используются механические характеристики пористого материала: тензоры упругой податливости a, b и определяющие их модули сдвига μ_a, μ_b и модули объемного сжатия k_a, k_b ; предел текучести среды τ_s ; начальная пористость Θ_0 — вычисленные для материала с малой пористостью в работе [6].

Рассмотрим продолжительное по времени мгновенно приложенное одноосное сжимающее воздействие, перпендикулярное плоской границе пористой среды. Модель описывает два варианта решения:

- схлопывание пор происходит на этапе упругой деформации, пластичность проявляется после уплотнения среды;
- уплотнение среды наступает после наступления пластичности.

Диаграммы связи между напряжением и деформацией для этих двух вариантов схематически изображены на рис. 3.

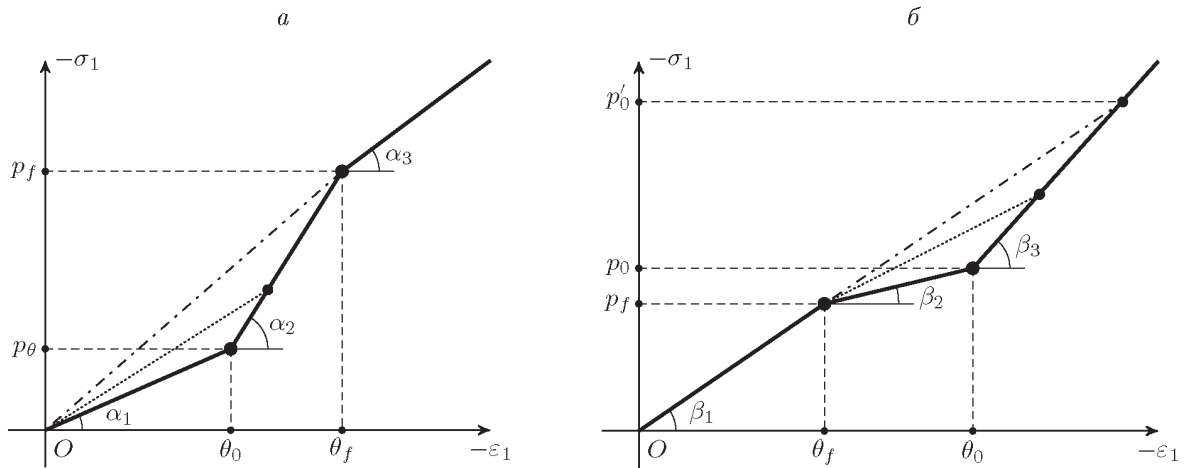


Рис. 3. Диаграммы одноосного сжатия:

a — схлопывание пор на этапе упругой деформации,
б — схлопывание пор после наступления пластичности

В первом варианте $\Theta_0 \leq \Theta_f$, где $\Theta_f = \tau_s / \mu_a$. Первое звено ломаной соответствует упругой деформации, и напряжения определяются по закону Гука:

$$\sigma_1 = \left(k_a + \frac{4\mu_a}{3} \right) \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \left(k_a - \frac{2\mu_a}{3} \right) \varepsilon_1. \quad (1)$$

Второе звено соответствует упругой деформации уплотненной среды, и напряжения определяются следующими уравнениями:

$$\sigma_1 = \left(k_a + k_b + \frac{4\mu_a}{3} \right) \varepsilon_1 + k_b \Theta_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \left(k_a + k_b - \frac{2\mu_a}{3} \right) \varepsilon_1 + k_b \Theta_0.$$

Третье звено — пластическое течение уплотненного материала. С учетом условия пластичности и закона упругого изменения объема, уравнения напряжений имеют следующий вид:

$$\sigma_1 = -\frac{4\tau_s}{3} + (k_a + k_b) \varepsilon_1 + k_b \Theta_0, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2\tau_s}{3} + (k_a + k_b) \varepsilon_1 + k_b \Theta_0. \quad (2)$$

Переход из состояния упругой деформации к пластическому течению непрерывен, поэтому наступление пластичности происходит при $\varepsilon = -\tau_s / \mu_a$. Угловые коэффициенты каждого из звеньев равны:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= k_a + 4\mu_a / 3 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= k_a + k_b + 4\mu_a / 3, \text{ при этом } \alpha_1 < \alpha_2 \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= k_a + k_b \end{aligned} \quad \alpha_2 > \alpha_3.$$

Во втором варианте $\Theta_0 > \Theta_f$ первоначальная упругая деформация с напряжениями, вычисляемыми по формулам (1), сменяется пластическим течением пористого скелета. Напряжения на стадии пластической деформации определяются уравнениями:

$$\sigma_1 = -\frac{4\tau_s}{3} + k_a \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2\tau_s}{3} + k_a \varepsilon_1.$$

После этого происходит уплотнение среды. С учетом условия пластичности и закона упругого изменения объема напряжения находятся по формулам (2). Угловые коэффициенты каждого звена в этом случае равны:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 &= k_a + 4\mu_a / 3 \\ \operatorname{tg} \beta_2 &= k_a, \text{ при этом } \beta_1 > \beta_2 \\ \operatorname{tg} \beta_3 &= k_a + k_b \end{aligned} \quad \beta_2 < \beta_3.$$

Продольные ударные волны

Учитывая приведенные выше диаграммы связи между напряжением и деформацией и уравнения для вычисления напряжений и угловые коэффициенты звеньев ломаных, можно описать распространение продольных ударных волн в результате приложения к границе ненапряженного полупространства мгновенного постоянного давления $\sigma_1 = -p$.

Рассмотрим первый случай (рис. 3 а). Если $p \leq p_\Theta$, где $p_\Theta = (k_a + 4\mu_a/3)\Theta_0$ — давление, при превышении которого происходит схлопывание пор, то в среде распространяется продольная упругая волна со скоростью $c_p^0 = \sqrt{(k_a + 4\mu_a/3)/\rho_0}$. Этой волне соответствует первое звено ломаной. Если $p_\Theta < p \leq p_f$, где $p_f = 4\tau_s/3 + (k_a + k_b)\tau_s/\mu_a - k_b\Theta_0$ — давление, при превышении которого происходит пластическое течение, то скорость волны равна $c_p = \sqrt{(k_a + k_b + 4\mu_a/3)/\rho_0}$. Это упругая волна уплотнения, на которой происходит схлопывание пор. Ей соответствует пунктирная линия от начала координат до точки второго звена ломаной. Если $p > p_f$, то в среде будут распространяться две волны: первая — волна уплотнения со скоростью c_p , соответствующей предельному напряжению $p = p_f$ (ей соответствует штрихпунктирная линия от начала координат до точки перехода к пластическому течению); вторая — пластическая ударная волна в уплотненной среде со скоростью $c_f = \sqrt{(k_a + k_b)/\rho_0}$ (ей соответствует третье звено ломаной).

Во втором случае (рис. 3 á) давление p может принимать значения из четырех различных диапазонов. Если $p \leq p_f$, где $p_f = (4/3 + k_a/\mu_a)\tau_s$ — предельное упругое давление, при превышении которого начинается пластическое течение, то в среде распространяется продольная упругая волна со скоростью c_p^0 . Этой волне соответствует первое звено ломаной. Если $p_f < p \leq p_0$, где $p_0 = k_a\Theta_0 + 4\tau_s/3$ — давление, при превышении которого происходит схлопывание пор, то в среде распространяются две волны: первая — упругий предвестник со скоростью c_p^0 (ей соответствует первое звено ломаной); вторая — пластическая ударная волна со скоростью $c_f^0 = \sqrt{k_a/\rho_0}$ (ей соответствует второе звено ломаной). Если $p > p_0$, то волн будет две, только следом за упругим предвестником будет распространяться волна пластического уплотнения со скоростью c_p' , которая определяется из уравнения:

$$\left(\frac{c_p'}{c_f^0}\right)^2 = \frac{p_0 - p_f}{p_0 - p_f + k_b(\Theta_0 - \tau_s/\mu_a)}.$$

Этой волне соответствует пунктирная линия от точки перехода к пластическому течению до точки третьего звена ломаной. Возможен четвертый вариант: в высокопористой среде при выполнении условия $k_b > 4\mu_a/3$ и достижении давлением p значения p'_0 волна пластического уплотнения догоняет упругий предвестник, а при $p > p'_0$ возникает единственная волна со скоростью c'_0 , которая определяется из уравнения:

$$\left(\frac{c'_0}{c_f^0}\right)^2 = \frac{p_0}{p_0 + k_b\Theta_0 - \tau_s/3}.$$

Этой волне соответствует штрихпунктирная линия от точки перехода к пластическому течению до точки третьего звена ломаной.

Литература:

1. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред. — М.: Физматлит, 2008. — 368 с.
2. Banhart, J., Baumeister J. Deformation Characteristics of Metal Foams // Journal of Materials Science, 1998. — V. 33, Iss. 6. — P. 1431–1440.
3. Ashby M.F. Plastic Deformation of Cellular Materials. Encyclopedia of Materials: Science and Technology (ISBN: 978-0-08-043152-9). Pergamon Press, 2001. — P. 7068–7071.
4. Садовский В.М., Садовская О.В., Лукьянов А.А. Радиальное расширение сферической и цилиндрической полостей в безграничной пористой среде // Прикладная механика и техническая физика, 2014. — Т. 55, № 4. — с. 160–173.

5. Sadovskii V.M., Sadovskaya O.V. Mathematical Modeling of a Metal Foam as an Elastic-Plastic Continuum with Changing Resistance // AIP Conf. Proc. 2015. — V. 1648. — P. 63005-1–63005-4 (DOI: 10.1063/1.4912863).
6. Золотухин А.В. Численное моделирование свойств пористых металлов // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Актуальные проблемы авиации и космонавтики». — Красноярск, СибГАУ, 2011. — Т. 1. — с. 138–139.

Система распознавания интернет угроз по журналам веб-сервисов

Кулясов Никита Владимирович, программист

Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск);

магистр, Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики (г. Красноярск)

В последние два десятилетия получила огромное распространение глобальная информационная сеть Интернет. По данным рейтинговых исследований к концу 2011 г. число пользователей, регулярно использующих сеть Интернет, составило около 2,3 млрд человек. На сегодняшний день наибольшее распространение получил протокол HTTP. Большинство информационных ресурсов в современной сети Интернет основаны именно на этом протоколе.

Параллельно с ростом популярности «всемирной паутины» растет и количество всевозможных угроз, связанных с информационной безопасностью, направленных на кражу или порчу личной информации пользователей, попытками фальсифицировать данные или вовсе сделать информационный ресурс недоступным. В связи с этим возникла необходимость в своевременном обнаружении и последующей ликвидации этих угроз. Функционирование веб-сервиса на основе протокола HTTP предполагает использование двух категорий программного обеспечения:

- Серверы — как основные поставщики услуг хранения и обработки информации (обработка запросов);
- Клиенты — конечные потребители услуг сервера (отправка запроса).

Мы будем рассматривать только безопасность сервера, как наиболее существенного компонента, без которого работа сервиса невозможна. Наиболее популярными в настоящее время являются веб-серверы: Apache, Internet Information Services (IIS), lighttpd.

В качестве сервера в данной работе был рассмотрен Apache, поскольку он является Open Source, и, согласно данным [1], наиболее распространённым в мире (рис. 1).

Любой веб-сервис ведёт запись всех действий его пользователей в журнал (Log-файл) [2]. Лог-файл является документом, в котором запротоколирована информация о пользователе и его действиях (запросах) по отношению к веб-сервису [3]. Apache предоставляет гибкие инструменты журналирования, что реализовано средствами ведения Log-файлов. Структура лог-файла приведена на рис. 2.

Одним из методов решения проблемы обнаружения интернет-угроз является анализ журналов веб-сервиса на

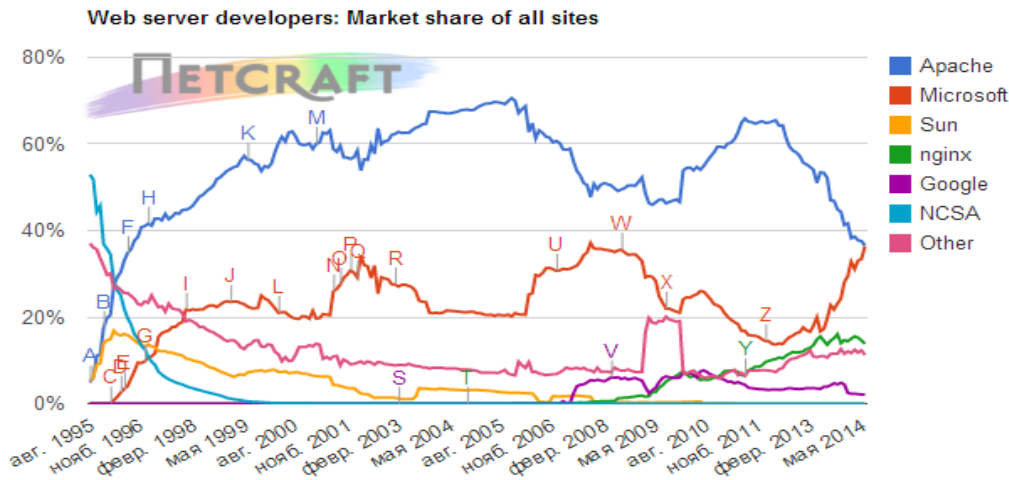
предмет подозрительных действий со стороны его пользователей [4]. Эти меры позволят построить защищённый интернет-сервис, предоставляющий своим пользователям стабильность и определённую степень информационной безопасности.

Для наиболее эффективного администрирования веб-сервиса, построенного на базе HTTP сервера Apache, нам потребуется объективная информация о его функционировании. Для получения этой информации необходимо произвести анализ Log-файла, сгенерированного нашим сервером. Поскольку Log-файлы зачастую содержат огромное количество записей, то самостоятельный анализ без привлечения каких-либо программных средств является очень затратным по времени. Поэтому в настоящее время разработано большое количество программного обеспечения, облегчающего процесс анализа [5].

В ходе работы были рассмотрены следующие средства анализа:

1. Analog 6.0 (<http://www.analog.cx/>);
2. Apache Log Analyzer 1.0 (<http://on-line-teaching.com/>);
3. Sawmill Enterprise 8.6.2 (<http://www.sawmill.net/>);
4. WebSpy Vantage Ultimate 2.2.0.84 (<http://www.webspy.com/>);
5. WebLog Expert Lite 8.1 (<http://www.weblogexpert.com/>);
6. OSSEC (<http://www.ossec.net/>);
7. Prelude (<http://www.prelude-siem.com/>).

При проведении анализа первые пять инструментов предоставили исчерпывающую информацию о посещаемости ресурса, его рентабельности, о популярности тех или иных разделов, о географическом расположении пользователей и многом другом; но ни один не предоставил какой-либо информации об интернет угрозах, оставшиеся два инструмента узконаправлены на обнаружение вторжений и какой-либо побочной информации не дают, также в их составе по умолчанию отсутствует графический интерфейс с возможностью представления статистики (таблица 1).



Developer	May 2014	Percent	June 2014	Percent	Change
Apache	366,262,346	37.56%	353,672,431	36.50%	-1.05
Microsoft	325,854,054	33.41%	352,208,487	36.35%	2.94
nginx	142,426,538	14.60%	133,763,494	13.81%	-0.80
Google	20,685,165	2.12%	20,192,595	2.08%	-0.04

Рис. 1. Рейтинг веб серверов

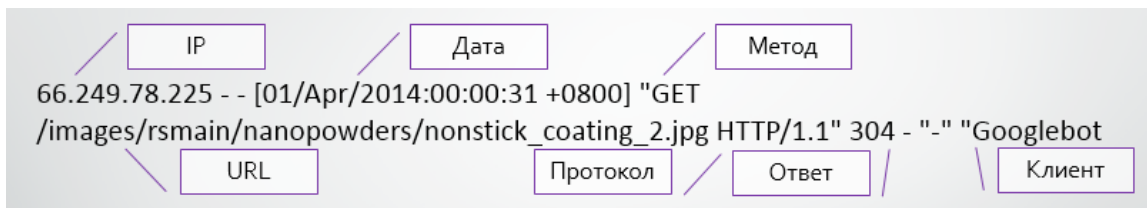


Рис. 2. Структура лог-файла

Исходя из результатов проведенного анализа, встала задача реализации автономной системы обнаружения интернет-угроз со следующими функциями:

Автономное обнаружение и хранение информации об интернет-угрозах.

Визуализация полученных данных.

В качестве интернет-угроз были рассмотрены следующие частные случаи:

- поиск точек входа и уязвимостей в административной части сайта;
- попытки нагрузочных атак на сайт (DOS). Большое количество запросов за короткое время от одного пользователя;
- попытки получения доступа к файловой системе сервиса по протоколу FTP.
- перебор пары логин-пароль для последующего получения доступа;
- поиск ошибок при администрировании ресурса.

Реализация данной системы была произведена на базе операционной системы семейства UNIX в виде «демона», написанного на языке PHP. Для автоматизации процесса

обнаружения использовался демон-планировщик «Cron»; в роли хранилища данных выступает база данных MySQL; в качестве визуализации используется веб-страница с java скриптами dc.js, d3.js и crosfilter.js, позволяющими создать интерактивную инфографику [6].

Выбор операционной системы семейства UNIX обусловлен тем, что большинство веб-сервисов базируется на веб-сервер Apache [1], который в свою очередь наиболее корректно функционирует на ее базе. PHP в современном интернете используется как язык для реализации веб-сервисов, но при подключении CLI библиотеки веб-скрипт может функционировать как локальное приложение, что в нашем случае исключает необходимость в использовании дополнительных программных средств для реализации и функционирования системы. База данных MySQL — распространенный инструмент для хранения данных веб-ресурса (к примеру, учетные записи пользователей); для хранения информации об интернет-угрозах просто необходимо добавить новую таблицу. Визуальный интерфейс в виде веб-страницы позволяет оперативно и наглядно предоставлять информацию об угрозах, а также

Таблица 1. Сравнения существующих средств анализа

Название	Уровень доступа	ОС	Тип	Обнаружение угроз	Интерфейс
Analog 6.0	Freeware	Cross platform	Analyzer	-	Console + html отчёт
Apache Log Analyzer	Freeware	Windows	Analyzer	-	Windows + xls
Sawmill Enterprise	Shareware	Cross platform	Analyzer	-	WEB
WebSpy Vantage	Shareware	Windows	Analyzer	-	WEB
WebLog Expert Lite	Shareware	Windows	Analyzer	-	WEB
OSSEC	Open-source	Cross platform	Host IDS	+	WEB-конфигурирование
Prelude	Open-source	Cross platform	IDS	+	Средствами дополнительного модуля

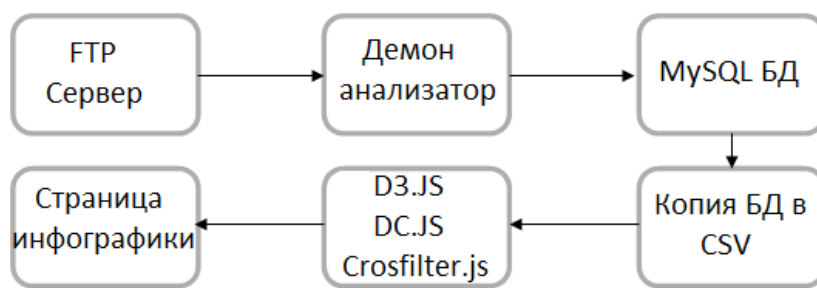


Рис. 3. Общая структура системы

имеет возможность интеграции в административные разделы веб-сервиса.

Принцип работы системы заключается в автономном получении, анализе и занесении информации в базу данных. В нашем случае лог-файлы хранятся на удаленном файловом сервере FTP (рис. 3).

При помощи «Cron» было запланировано задание о запуске RHP демона каждый час. После запуска демон скачивает с удаленного сервера лог-файлы веб-сервисов, указанных в списке конфигурации, после чего происходит фильтрация не интересующей нас информации. Затем запускается анализ на предмет интернет-угроз. В случае обнаружения демон вносит в базу данных запись, в которой указывает IP-адрес подозреваемого пользователя; тип угрозы; имя веб-сервиса, к которому относилась угроза; дата и время; продолжительность; количество запросов; начальный фрагмент из лог-файла, подтверждающий факт угрозы. По окончании анализа, демон при наличии изменений в базе данных, экспортирует ее в CSV-файл для возможности последующего использования в веб-интерфейсе.

В ходе проделанной работы был произведен анализ журналов нескольких веб-сервисов периодом с 2012 г. по сегодняшний день, по результатам которого были выявлены неоднократные случаи интернет-угроз для ресурсов.

На рис. 4–8 показан веб-интерфейс системы в виде интерактивной инфографики, отвечающий за визуализацию накопленных данных. Интерактивность интерфейса заключается в перестроении в реальном времени диаграмм и графиков в зависимости от данных, выбранных пользователем. Таким образом, каждый элемент интерфейса является своеобразным графическим «фильтром» выводимой информации.

На рис. 4 изображена первая часть интерфейса, дающая наглядное представление о временных границах интернет-угроз за весь период анализа. Здесь представлены диаграммы, показывающие количество обнаруженных интернет-угроз в рамках год, месяц, день, а также пользователей. Рис. 5 отображает аналогичную информацию только с применением пользовательского фильтра. Рис. 6, 7 содержат диаграммы о количестве обнаруженных интернет-угроз того или иного типа, а также подверженность угрозам среди веб-сервисов. Рис. 8 является сводным графиком всех угроз на протяжении всего периода анализа. На основании всех диаграмм и графиков (за весь период) можно сделать следующий вывод:

В 2013 г. была наибольшая активность пользователей, направленная на нанесение вреда веб-сервисам. Наибольшую активность пользователи проявляют в феврале. В течение месяца активность пользователей фактически

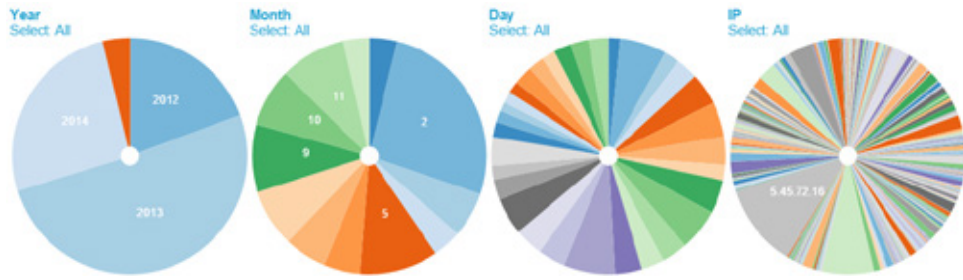


Рис. 4. Диаграммы даты и IP

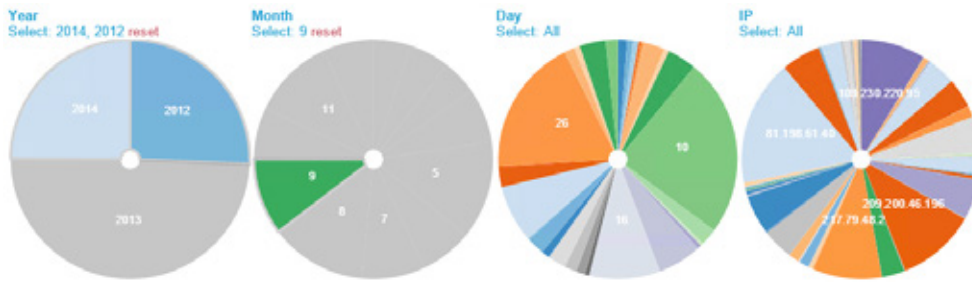


Рис. 5. Пример интерактивности. Диаграммы даты и IP с использованием фильтра. «данные за сентябрь 2014 и 2012 гг.»

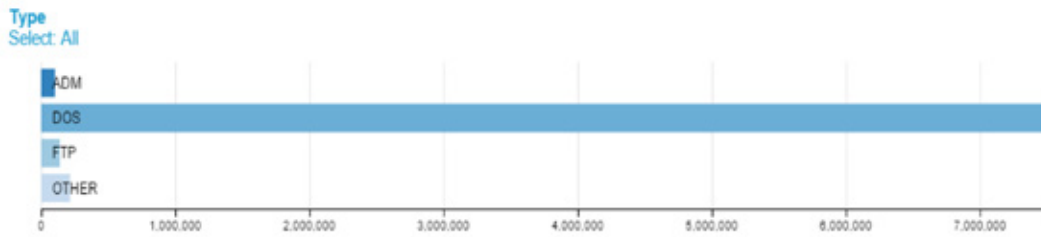


Рис. 6. Диаграмма типов угроз

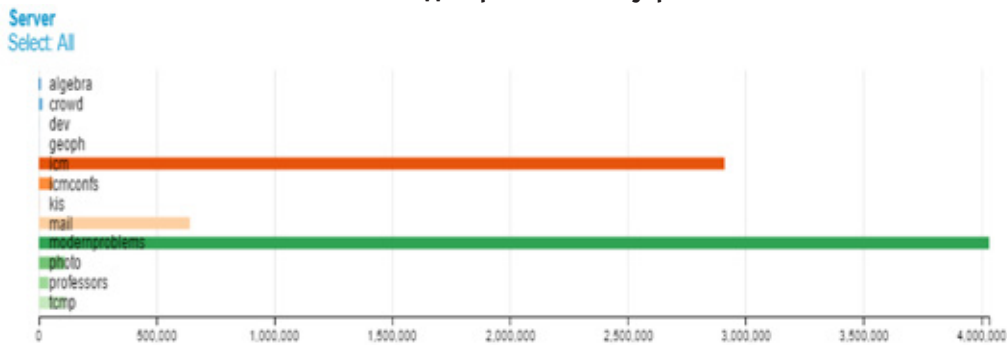


Рис. 7. Диаграмма сервисов

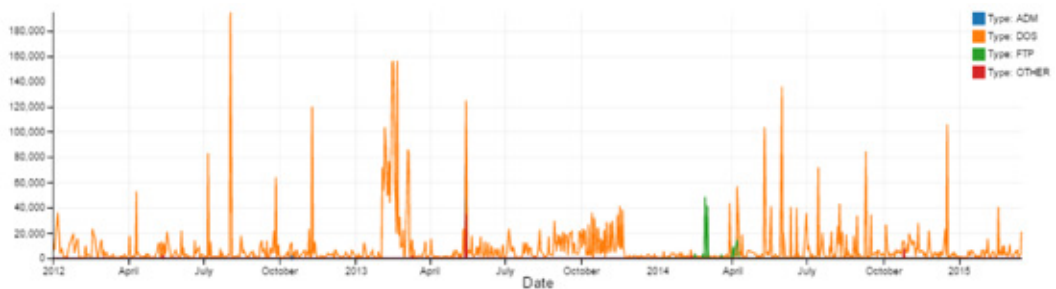


Рис. 8. Сводный график

равномерна и не имеет резких перепадов. Наибольшее число запросов, расцененных системой как интернет-угроза, произвел пользователь с IP-адресом 5.45.72.16.

Наибольшее число угроз относится к типу нагрузочных атак (DOS). Веб-сервисы modernproblems, icm и mail больше всего подвержены интернет-угрозам.

Разработанная система позволяет получать актуальную информацию о возможных интернет-угрозах на веб-сервисы, что даёт возможность оперативно их предотвращать.

На данный момент система находится на стадии доработки и оптимизации. Одной из главных проблем является

ресурсоемкость веб-интерфейса и низкая скорость обработки большого объема данных. Также существует проблема выявления новых типов угроз, поскольку злоумышленники разрабатывают новые алгоритмы атак, которые плохо поддаются обнаружению и требуют более глубокого анализа данных.

В дальнейшем планируется расширение функционала системой оповещений и автономного принятия решения о блокировке доступа пользователя к веб-сервису для пресечения дальнейших интернет-угроз от этого пользователя.

Литература:

1. June 2014 Web Server Survey [Электронный ресурс]: Netcraft // web-server-survey — Режим доступа <http://news.netcraft.com/archives/category/web-server-survey/>
2. Log Files [Электронный ресурс]: ASF// Apache Software Foundation — Режим доступа <http://httpd.apache.org/docs/1.3/logs.html>
3. Ashok, A. Administering and Securing the Apache Server: technical manual/A. Ashok. — Portland: Premier Press, 2002. — 442 с.
4. Обеспечение безопасности веб-сайтов [Электронный ресурс]: Яндекс//Яндекс помощь вебмастеру — Режим доступа <http://help.yandex.ru/webmaster/protecting-sites/shared-hosting.xml>
5. Анализ и интерпретация лог-файлов [Электронный ресурс]: Gilbert webkontor//веб-аналитика — Режим доступа <http://www.web-patrol.net/webanalytics-logfile.html>
6. Интерактивная инфографика [Электронный ресурс]: Com agency//полезно знать — Режим доступа <http://comagency.ru/interaktivnaja-infografika>

Решение трехмерного уравнения Пуассона с использованием трикватратных эрмитовых конечных элементов

Магденко Роман Петрович, студент
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск);

Гилева Лидия Викторовна, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Введение

При численном решении уравнений математической физики методом конечных элементов лагранжевы элементы используются значительно чаще, чем эрмитовы элементы. Однако в ряде случаев эрмитовы элементы обладают некоторыми преимуществами перед лагранжевыми. В статье [1] проведено сравнение применения некоторых лагранжевых и эрмитовых конечных элементов одинаковых степеней. Показано, что для достижения сходимости одинакового порядка размерность системы уравнений метода конечных элементов для эрмитовых элементов ощутимо меньше, чем при использовании лагранжевых элементов. Особенно существенной эта разница становится в трехмерном случае.

В литературе по методу конечных элементов описание эрмитовых элементов начинается с бикубических элементов. Между тем, в предположении большей эффективности интерес представляют также эрмитовы элементы меньшей степени. В статье [2] впервые представлены бикватратные эрмитовы элементы и численно подтвержден их теоретический порядок точности, а также установлен повышенный порядок точности сходимости производных. В статье [1] продолжено их теоретическое исследование и тоже представлены результаты численных экспериментов. Кроме того, для решения трехмерных задач предложены трикватратные элементы. В данной работе для них изложена теоретическая оценка сходимости и приведены результаты численного решения краевой задачи для уравнения Пуассона в единичном кубе, полученного методом конечных элементов с использованием этих элементов.

Триквадратные эрмитовы элементы на кубе

Определим «эталонный» триквадратный эрмитов элемент как тройку [3]

$$(e, Q_e, \Sigma_e), \tag{1}$$

где $e = [0,1]^3$ – единичный куб в пространстве \square^3 с вершинами $a^l = (i, j, k)$, $l = 1, \dots, 8$, $i, j, k \in \{0,1\}$, которые являются узлами элемента; Q_e – пространство полиномов вида

$$Q_e = Q_2^{(3)} \setminus \text{span} \{x_1^2 x_2^2, x_1^2 x_3^2, x_2^2 x_3^2, x_1^2 x_2^2 x_3, x_1^2 x_2 x_3^2, x_1 x_2^2 x_3^2, x_1^2 x_2^2 x_3^2\}, \tag{2}$$

(здесь $Q_2^{(3)}$ – пространство полиномов степени не выше 2 по каждой переменной); Σ_e – множество степеней свободы (рис. 1)

$$\Sigma_e = \left\{ \begin{array}{l} \psi_{s,i,j,k} (s = 0,1,2,3) : \psi_{0,i,j,k} (p) = p(i, j, k) \forall i, j, k = 0,1; \\ \psi_{1,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_1 (i, j, k), \psi_{2,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_2 (i, j, k), \\ \psi_{3,i,j,k} (p) = \partial p / \partial x_3 (i, j, k), \\ \forall (i, j, k) = (0,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1); \forall p \in Q_e \end{array} \right\}. \tag{3}$$

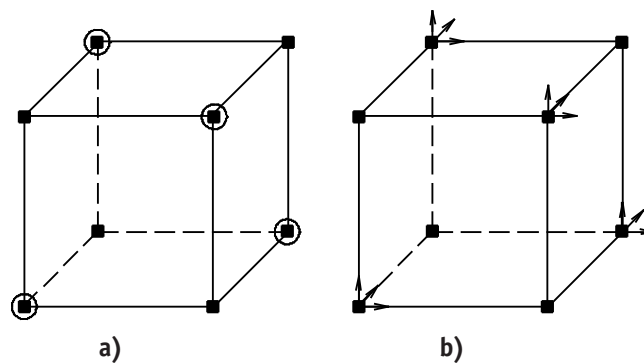


Рис. 1. Схематическое обозначение степеней свободы. В общепринятой классификации жирные точки в узлах означают задание значения функции, а кружки в варианте а) — задание всех (трех) первых производных. В варианте б) эти же степени свободы изображены стрелками в соответствующих направлениях

Справедливо следующее утверждение [1].

Лемма 1. Тройка (e, Q_e, Σ_e) определяет корректный конечный элемент с унисольвентной парой (Q_e, Σ_e) .

Обоснование Леммы осуществлялось прямым построением базиса Лагранжа. Напомним [3], что функции

$$\begin{cases} \varphi_{s,i,j,k} \in Q_e, s = 0,1,2,3; i, j, k = 0,1 \text{ при } s = 0; \\ (i, j, k) = (0,0,0), (1,0,1), (1,1,0), (0,1,1) \text{ при } s = 1,2,3 \end{cases}$$

образуют базис Лагранжа в пространстве Q_e относительно множества степеней свободы Σ_e , если они удовлетворяют условию

$$\psi_{s_1,i_1,j_1,k_1} (\varphi_{s,i,j,k}) = \delta_{s,s_1} \delta_{i,i_1} \delta_{j,j_1} \delta_{k,k_1}, \forall s, s_1 = 0,1,2,3; \forall i, i_1, j, j_1, k, k_1 = 0,1,$$

где $\delta_{i,i}$ – символ Кронекера.

Непосредственная проверка показывает, что базис Лагранжа имеет следующий вид [1]:

$$\begin{aligned} \varphi_{0,0,0,0} &= (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1+x_1+x_2+x_3), & \varphi_{1,0,0,0} &= x_1(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3), \\ \varphi_{2,0,0,0} &= (1-x_1)x_2(1-x_2)(1-x_3), & \varphi_{3,0,0,0} &= (1-x_1)(1-x_2)x_3(1-x_3), \\ \varphi_{0,0,1,0} &= (1-x_1)x_2(x_2-x_1-x_3)(1-x_3), & \varphi_{0,1,0,0} &= x_1(1-x_2)(1-x_3)(x_1-x_2-x_3), \\ \varphi_{0,1,1,0} &= x_1x_2(1-x_3)(3-x_1-x_2+x_3), & \varphi_{1,1,1,0} &= x_1(x_1-1)x_2(1-x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_{2,1,1,0} &= x_1 x_2 (x_2 - 1)(1 - x_3), & \varphi_{3,1,1,0} &= x_1 x_2 x_3 (1 - x_3), \\
 \varphi_{0,0,0,1} &= (1 - x_1)(1 - x_2)x_3 (x_3 - x_1 - x_2), & \varphi_{0,1,1,1} &= x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3 - 2), \\
 \varphi_{0,0,1,1} &= (1 - x_1)x_2 x_3 (3 + x_1 - x_2 - x_3), & \varphi_{1,0,1,1} &= (1 - x_1)x_1 x_2 x_3, \\
 \varphi_{2,0,1,1} &= (1 - x_1)x_2 (x_2 - 1)x_3, & \varphi_{3,0,1,1} &= (1 - x_1)x_2 x_3 (x_3 - 1), \\
 \varphi_{0,1,0,1} &= x_1 (1 - x_2)x_3 (3 - x_1 + x_2 - x_3), & \varphi_{1,1,0,1} &= x_1 (x_1 - 1)(1 - x_2)x_3, \\
 \varphi_{2,1,0,1} &= x_1 x_2 (1 - x_2)x_3, & \varphi_{3,1,0,1} &= x_1 (1 - x_2)x_3 (x_3 - 1).
 \end{aligned}$$

Введем обозначения для норм, которые мы будем использовать при оценке сходимости. Пусть $\Omega \subset \square^n$.

Обозначим через $L_2(\Omega)$ пространство функций, определённых и измеримых на Ω со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega, \quad u, v \in \Omega$$

и конечной нормой

$$\|u\|_{0,\Omega} = (u, u)^{1/2}, \quad u \in \Omega.$$

Для частных производных порядка k введем полунорму

$$|u|_{k,\Omega} = \left(\sum_{i_1+\dots+i_n=k} \left\| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right\|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Через $H^k(\Omega)$ обозначим пространство функций, определённых и измеримых на Ω вместе с производными до порядка k включительно, с конечной нормой [4]

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left(\|u\|_{0,\Omega}^2 + |u|_{1,\Omega}^2 + \dots + |u|_{k,\Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Пусть $u \in H^3(e)$. По теореме вложения Соболева $H^3(e)$ непрерывно вложено в $C^1(e)$ [4].

Поэтому для функции u мы можем определить ее интерполянт $u_I \in Q_e$. Введем обозначение $I = \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ для множества узлов, в которых степени свободы содержат производные. Тогда

$$u_I(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j,k=0}^1 \psi_{0,i,j,k}(u) \varphi_{0,i,j,k}(x_1, x_2, x_3) + \sum_{s=1}^3 \sum_{(i,j,k) \in I} \psi_{s,i,j,k}(u) \varphi_{s,i,j,k}(x_1, x_2, x_3).$$

Теорема 1. Пусть $u \in H^3(e)$. Тогда для любого $m \leq 3$

$$|u - u_I|_{m,e} \leq c_1 |u|_{3,e}, \tag{4}$$

где константа c_1 не зависит от функции u .

Доказательство. Как отмечено выше, пространство $H^3(e)$ непрерывно вложено в $C^1(e)$. Кроме того, пространство Q_e содержит пространство полиномов полной степени не выше 2, определённых на e . Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 [2, глава 3, параграф 10], откуда следует оценка (4). \square

Численное решение уравнения Пуассона

В области $\Omega = (0, 1)^3$ с границей Γ рассмотрим следующую задачу:

$$-\Delta u = 3x_1 x_2 x_3 \sin(1 - x_1 - x_2 - x_3) + 2 \cos(1 - x_1 - x_2 - x_3)(x_1 x_3 + x_1 x_2 + x_2 x_3) \text{ на } \Omega \tag{5}$$

$$u = \begin{cases} 0 & \text{при } x_1=0 \\ 0 & \text{при } x_2=0 \\ 0 & \text{при } x_3=0 \\ x_2x_3 \sin(-x_2-x_3) & \text{при } x_1=1 \\ x_1x_3 \sin(-x_1-x_3) & \text{при } x_2=1 \\ x_1x_2 \sin(-x_1-x_2) & \text{при } x_3=1 \end{cases} \quad \text{на } \Gamma. \quad (6)$$

Ей соответствует точное решение

$$u(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 \sin(1-x_1-x_2-x_3).$$

Построим на Ω равномерную триангуляцию, поделив Ω на N^3 одинаковых кубиков-ячеек меньшего размера. Для этого проведем плоскости

$$x_{k,i} = ih, \quad k = 1, 2, 3, \quad i = 0, \dots, N, \quad \text{где } h = 1/N.$$

На каждую элементарную ячейку $[x_{1,i}, x_{1,i+1}] \times [x_{2,j}, x_{2,j+1}] \times [x_{3,k}, x_{3,k+1}]$ отобразим «эталонный» элемент одним из двух аффинных отображений

$$x'_1 = x_{1,i} + hx_1, \quad x'_2 = x_{2,j} + hx_2, \quad x'_3 = x_{3,i} + hx_3, \quad (7)$$

когда величина $i + j + k$ принимает четное значение, либо

$$x'_1 = x_{1,i} + h(1-x_1), \quad x'_2 = x_{2,j} + hx_2, \quad x'_3 = x_{3,i} + hx_3 \quad (8)$$

в остальных случаях. В нашем случае обойтись одним преобразованием (7) нельзя. Дело в том, что при использовании только одного отображения (7) для соседних элементов, имеющих один или несколько общих узлов, число степеней свободы в этих узлах может не совпадать (см. рис. 2 а)). Чтобы избежать этого, отображения (7) и (8) чередуются на соседних ячейках. Например, если элемент является образом «эталонного» элемента (1)–(3), полученным отображением (7), то все соседние элементы, имеющие с ним общие грани, должны быть получены отображением (8). В этом случае степени свободы у соседних элементов совпадают во всех узлах триангуляции. Пример двух соседних элементов, полученных с использованием разных отображений, показан на рис. 2 б). Базисные функции каждого элемента являются образами базисных функций «эталонного» элемента при соответствующем аффинном отображении.

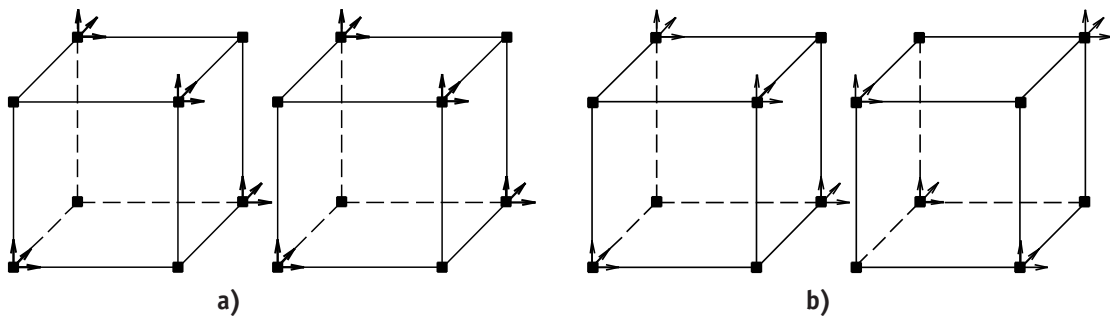
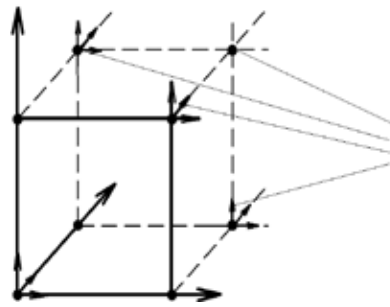


Рис. 2. а) — неправильное примыкание двух ячеек, б) — правильное примыкание

Теперь обсудим альтернативу с заданием некоторых граничных значений. Для этого обратимся к рис. 3. Дело в том, что некоторые степени свободы, например, производные в начале координат, можно вычислить непосредственно из краевых условий. А в принципе, можно оставить их неизвестными и попытаться найти в ходе решения всей задачи в целом. В общем, второй вариант может незначительно увеличить число неизвестных, но облегчить подготовку данных. Однако второй вариант оказался полностью неприменимым. В этом случае происходит нарушение главных краевых условий в пространстве тестовых функций, что выливается в дополнительную погрешность приближенного решения, ухудшающую порядок сходимости. Это отчетливо проявляется в вычислительных экспериментах. Таким образом, степени свободы — первые производные, которые могут быть вычислены из известных краевых условий, должны быть заданы явно. И это несмотря на то, что решается краевая задача Дирихле, в которой заданы только значения функции на границе области.



Четыре степени свободы, порождающие четыре неизвестных дискретной задачи

Рис. 3. Угол области решения. Жирными точками и стрелками в узлах триангуляции помечены степени свободы конечных элементов. Лишь четыре степени свободы из изображенных здесь являются неизвестными. Остальные вычисляются непосредственно из известных граничных значений решения и не порождают неизвестных

Чтобы оценить порядок точности приближенного решения, сравним значения погрешности при различных значениях шага h . Построим систему алгебраических уравнений метода конечных элементов, используя триквадратные эрмитовы элементы для $N = 4, 8, 16, 32$. Зная точное решение, можно вычислить значение погрешности $u - u^h$, где u^h – приближенное решение. Мы будем использовать дискретные нормы

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_{0,h}^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1}} \left(u(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) - u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) \right)^2 h^3, & (9) \\ \|u - u^h\|_{1,h}^2 &= \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1}} \left(u(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) - u^h(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) \right)^2 h^3 + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1, \\ \text{если } i+j+k \text{ четно}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) - \frac{\partial u^h}{\partial x_1}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) \right)^2 2h^3 + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1, \\ \text{если } i+j+k \text{ четно}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) - \frac{\partial u^h}{\partial x_2}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) \right)^2 2h^3 + \\ &+ \sum_{\substack{1 \leq i \leq n-1, \\ 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n-1, \\ \text{если } i+j+k \text{ четно}}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_3}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) - \frac{\partial u^h}{\partial x_3}(x_{1,i}, x_{2,j}, x_{3,k}) \right)^2 2h^3. & (10) \end{aligned}$$

Заметим, что значения производных во второй норме совпадают со значениями степеней свободы и поэтому не требуют дополнительных вычислений.

Для решения из $H^3(\Omega)$ мы имеем следующие теоретические оценки.

Теорема 2. Пусть $u \in H^3(\Omega)$. Тогда справедливы следующие оценки:

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq c_2 h^2 \|u\|_{3,\Omega} \tag{11}$$

и

$$\|u - u^h\|_{0,\Omega} \leq c_3 h^3 \|u\|_{3,\Omega} \tag{12}$$

с константами c_2 и c_3 , независящими от u и h .

Доказательство. Оценка (11) получается стандартным способом из оценки (4) с учетом вида отображения (7),(8) [3, 4]. Оценка (12) следует из (11) с использованием приема Нитше [3, 4].

Таким образом, теоретически для решения задачи (5),(6) мы имеем сходимость второго порядка в норме H^1 и третьего порядка в норме L_2 .

Таблица 1. Точность приближенного решения

h	$\delta_h = \ u - u^h\ _{0,h}$	$\sigma_h = \ u - u^h\ _{1,h}$	δ_{2h} / δ_h	σ_{2h} / σ_h	$\log_2(\delta_{2h} / \delta_h)$	$\log_2(\sigma_{2h} / \sigma_h)$
0.25	$2.07 \cdot 10^{-4}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$				
0.125	$1.47 \cdot 10^{-5}$	$1.23 \cdot 10^{-3}$	14.13	2.14	3.82	1.1
0.0625	$9.72 \cdot 10^{-7}$	$3.92 \cdot 10^{-4}$	15.1	3.13	3.92	1.65
0.03125	$6.25 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-4}$	15.56	3.57	3.96	1.84

В таблице 1 приведены значения нормы погрешности $\delta_h = \|u - u^h\|_{0,h}$ и $\sigma_h = \|u - u^h\|_{1,h}$ для разных значений шага h . Анализ полученных результатов показывает, что при уменьшении h величина σ_h стремится ко второму порядку точности, как и соответствующая теоретическая оценка (11). Что касается величины δ_h , характеризующей погрешность в норме L_2 , то здесь, как и в двумерном случае [1], ее порядок выше, чем в теоретической оценке (12). При малых значениях h он близок к 4. Мы полагаем, что это можно объяснить следующим образом. На равномерной сетке мы получаем конечно-разностную схему с симметричным шаблоном. Такая схема не позволяет получить нечетный порядок аппроксимации, поскольку при разложении в ряд Тейлора, слагаемые нечетной степени сокращаются. В результате после сокращения слагаемых третьего порядка точности остаются только слагаемые четвертого порядка. Именно они обеспечивают четвертый порядок сходимости для дискретного набора значений.

Заключение

Итак, в этой работе продолжено изложение свойств эрмитовых трикватратных конечных элементов. Теоретические оценки сходимости подтверждены результатами проведенных численных экспериментов. Более того, как и в случае бикватратных конечных элементов, на равномерной сетке получен повышенный порядок точности в дискретной среднеквадратичной норме. На основании представленных результатов мы полагаем, что трикватратные конечные элементы могут быть эффективно использованы при аппроксимации функций из $H^3(\Omega)$.

Литература:

1. Shaidurov, V., Shut S., Gileva L. Some properties of Hermite finite elements on rectangles, AIP Conference Proceedings 1629, 32(2014). — Pp. 32–43.
2. Шайдуров В.В., Шуть С.В. Применение эрмитового бикватратного конечного элемента // Вестник СибГАУ, 2014. — № 2. — с. 80–85.
3. Сьярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. — Москва, Мир, 1980. — 512 с.
4. Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов. — Казань, Казанский университет, 2011. — 240 с.
5. Adams R.A., Fournier J.J.F. Sobolev Spaces. Academic Press. — New York, 2003.

Актуальные задачи комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории

Метус Анна Михайловна, аспирант

Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Динамика развития быстропотекающих видов чрезвычайных ситуаций (ЧС), таких как наводнения, сели, лесные пожары и др., весьма ограничивает запас времени для принятия решений по ликвидации ЧС и минимизации ущербов. Дефицит времени на принятие решений при наступлении ЧС обуславливает необходимость развития методов раннего предупреждения ЧС природного и техногенного характера путем комплексного оценивания состояния объектов техносферы и окружающей среды на основе данных мониторинга. Методы раннего предупреждения направлены на повышение эффективности управления и обеспечение приемлемого уровня безопасности территории.

На сегодняшний день создана обширная сеть мониторинга и контроля потенциальных источников возникновения чрезвычайных ситуаций, развернуты сети метеостанций и сейсмостанций, внедряются датчики контроля параметров функционирования на различных объектах хозяйствования, активно используются системы видеомониторинга [1, 2]. Кроме инструментальных средств контроля развиваются и теоретические исследования. В России и в мире ведется большое количество исследований по разработке методов анализа рисков, внедряются автоматизированные системы информационно-аналитической поддержки предупреждения и ликвидации ЧС [1, 3–5]. Эффективное управление территориальной безопасностью основывается на интеграции данных различных систем мониторинга и комплексном аналитическом оценивании факторов опасности. Существующая методологическая и технологическая база, а также накопленная статистика, являются достаточными предпосылками для разработки средств комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории на основе оперативного моделирования и аналитического обобщения показателей риска с учетом территориально-ориентированных нормативов.

Комплексный подход к оцениванию безопасности территории включает в себя обеспечение оперативного и стратегического управления. Оперативное управление безопасностью территории подразумевает постоянный контроль в режиме реального времени за параметрами состояния опасных объектов и своевременное выявление предпосылок к возникновению ЧС. Стратегический контроль подразумевает создание теоретических и методологических основ для планирования и осуществления ряда административно-правовых и экономических мероприятий с целью снижения риска. Стратегический контроль направлен на повышение эффективности управления территориальной безопасностью в целом. Системы опе-

ративного и стратегического контроля относительно независимы и отличаются временными рамками действий, однако, управление территориальной безопасностью, основанное на реализации этих двух основных направлений, наиболее эффективно [3].

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных детальному исследованию различных сторон природной и техногенной безопасности различных территорий: исследование метеорологической и гидрологической напряженности территории Томской области [6]; горно-таежной местности с точки зрения ведения туристической деятельности [7]; биоклиматических показателей Волгоградской области [8]; рисков экологической обстановки Краснодарского края [9]; производственных объектов техносферы: больших технических систем, гидротехнических сооружений [10]; техногенного и комплексного рисков территориально-промышленных образований на примере Красноярского края [11]; антропогенных рисков территорий Сибири [12]; исследование и расчет индивидуальных и комплексных рисков возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера для населения городов и районов Красноярского края [13].

Часть работ направлена на анализ статистических данных [2, 6, 8, 11], другие — на разработку управленческих рекомендаций по снижению рисков, предупреждению катастроф, организацию систем защиты в результате оценивания текущей обстановки [5, 9, 10].

Важнейшей составляющей комплексного подхода к оцениванию безопасности территории является анализ факторов риска, характеризующих различные виды опасностей. Например, по данным региональной системы мониторинга Красноярского края можно выделить следующие основные виды обстановок:

- метеорологическая обстановка — погодные явления;
- гидрологическая обстановка — уровень воды в реках, функционирование гидроэлектростанций, неблагоприятные ледовые явления в зимний период;
- сейсмическая обстановка — зарегистрированные землетрясения и промышленные взрывы;
- радиационная обстановка — уровень экспозиционной дозы гамма-излучения;
- паводковая обстановка — затопления жилых и производственных объектов;
- обстановка в системе жизнеобеспечения — давление и температура горячего водоснабжения жилых объектов;

— пожароопасная обстановка — лесные пожары.

Комплексная оценка безопасности территории аналитически обобщает факторы риска по каждой обстановке и по территории в совокупности. В формальном виде комплексная оценка $K(S)$ для территории S может быть представлена в виде:

$$K(S) = f(k_1(S), k_2(S), \dots, k_n(S)),$$

где n — количество обстановок; $k_i(S)$, $i = 1..n$ — оценка факторов риска i -й обстановки с учетом территориально-ориентированных нормативов; f — функция, аналитически обобщающая частные оценки факторов опасности различных сфер мониторинга.

Оценивание текущего состояния безопасности является ключевым этапом процесса принятия управленческих решений, и качество решений во многом зависит от системы используемых показателей и способа вычисления оценок. Методы оценивания безопасности территорий условно можно отнести к реализации трех разных подходов, каждый из которых применяется для конкретного класса задач:

Вероятностный подход позволяет рассчитать оценку риска возникновения ЧС с помощью математических моделей, связывающих предпосылки к возникновению ЧС с возможностью их проявления, рассматривает риск-факторы различного происхождения: природные, техногенные и природно-техногенные. Данный подход чаще всего используется для расчета индивидуальных, коллективных и социальных рисков при аварии на производственном объекте.

Территориальный риск рассчитывают по обобщенной формуле:

$$\text{Риск} = \text{Вероятность} \times \text{Уязвимость} \times \\ \times \text{Живучесть} \times \text{Защищенность} \times \text{Потери}$$

В соответствии с данной формулой риск представляется как кортеж значений соответствующих показателей. Вероятность оценивает возможность наступления чрезвычайной ситуации. Уязвимость характеризует чувствительность объекта или территории к воздействию определенного риск-фактора или группы риск-факторов. Живучесть характеризует способность технической, природной или социальной системы выполнять основные функции при наличии повреждений ее элементов. Защищенность характеризует обеспеченность системы ресурсами для противодействия внешним и внутренним риск-факторам, а также для локализации и ликвидации аварии. Потери характеризуют возможный ущерб.

В работе [12] данный метод применяется для анализа антропогенных рисков угледобывающих и нефтегазовых территорий Сибири. Формируются модели перманентной антропогенной нагрузки в процессе нефтегазодобычи; модель аварийного риска, с учетом последствий для территории; определяется комплексная оценка экологической обстановки в виде обобщенного бального показателя, рассчитанного на основе показателей выбросов загряз-

няющих веществ, сбросов загрязненных сточных вод, отчуждения земель, лесистости. В работе [11] выполняется оценка рисков территориально-промышленных образований на примере Красноярского края. Рассчитываются значения индивидуальных, коллективных и комплексных рисков, на основе которых проводится ранжирование территорий по уровням риска.

Метод оценки рисков характеризуется повышенной трудоемкостью и требует большого числа исходных данных. В каждом конкретном случае оценка компонентов территориального риска представляет собой нетривиальную задачу. Кроме того, данные методы, как правило, ориентированы на конкретный производственный объект, и их применение к территории в целом не представляется возможным.

Статистический подход позволяет сформировать количественную оценку на основе анализа данных за определенный период наблюдения с помощью методов прикладной статистики. Для расчета рисков статистическим методом требуется достаточно большое количество данных наблюдения.

В работе [7] для оценки природной и техногенной опасности территорий парка Ергаки, расположенного в Ермаковском районе Красноярского края, проводится расчет интенсивности чрезвычайных ситуаций на основе статистики за ряд лет. Рассчитываются индивидуальные и комплексные риски чрезвычайной ситуации для населенных пунктов и районов Красноярского края с учетом количества населения. В работе [8] оценивается жесткость биоклиматических условий на примере Волгоградской области. На основе мониторинговых данных о метеорологических показателях рассчитываются оценки климатического благополучия, ранжируются территории Волгоградской области и определяются зоны комфорта. В работе [6] рассматриваются в совокупности гидрологическая и метеорологическая обстановки на территории Томской области на основе данных за последние 30 лет. Определяются и классифицируются основные факторы, влияющие на эти обстановки, рассчитываются комплексные показатели напряженности климатической и гидрологической обстановки.

Достоинствами статистических методов является объективность, возможность исследования динамики изменений наблюдаемых параметров и получения сводных показателей. К недостаткам можно отнести ограничение применимости в случае редко наблюдаемых событий.

Недостатки и ограничения вероятностного и статистического подходов в ряде случаев позволяют преодолеть эвристический подход, основанный на применении методов экспертного оценивания в сочетании с теорией нечетких множеств. Для получения экспертной оценки используются различные методы: анкетирование, интервьюирование, мозговой штурм, дискуссия и другие. Анкетирование представляет собой опрос экспертов в письменной форме с помощью анкет, в которой содержатся вопросы, позволяющие выяснить существо и аргументацию ответов. Интервьюирование — это устный опрос, проводимый в

форме беседы-интервью. Мозговой штурм — групповое обсуждение с целью получения новых идей, вариантов решения проблем. Дискуссия применяется для обсуждения проблем, путей их решения, анализа факторов. Сама дискуссия проводится как открытое коллективное обсуждение проблемы, основной задачей которого является анализ всех факторов, всех последствий, выявление позиций участников.

В работе [9] для отбора контрольных показателей привлекается группа экспертов, которые определяют состав показателей, их свойства, параметры процессов и явлений и проводят анализ исходной информации. На основе экспертных оценок оценивается состояние и качество экологической обстановки региона и формируется информация для принятия решений. В работе [13] проводится расчет значений индивидуальных и комплексных рисков возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера для населения городов и районов Красноярского края. Для формирования оценок используются результаты анализа риска, представленные в декларациях безопасности опасных производственных объектов на территории Красноярского края, и оценки экспертных центров.

Такие методы относятся к группе качественных оценок и используются, когда формальные методы слишком сложны, а исходная база данных недостаточна для получения однозначного аналитического решения. Кроме того, данные методы не исключают ошибок субъективного характера.

Применимость рассмотренных подходов определяется типом задачи оценивания риска, используемыми технологиями сбора и хранения исходных данных, практическим приложением конечных результатов. Результаты анализа проблем управления территориальной безопасностью, достоинства и недостатки существующих подходов и методов показали, что сложность комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории опреде-

ляется необходимостью анализировать множество различных факторов риска возникновения ЧС с учетом их взаимного влияния и временного развития, необходимостью формирования количественного выражения уровня безопасности с возможностью интерпретации, необходимостью аналитического обобщения показателей с учетом особенностей территории.

Выводы

Развитие методических средств комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории необходимо для повышения эффективности управления территориальной безопасностью и раннего предупреждения ЧС природного и техногенного характера. Методические средства комплексного оценивания природно-техногенной безопасности территории должны решать следующие задачи:

- поддержка оперативного контроля состояния объектов техносферы и окружающей среды с возможностью многомерного анализа контролируемых параметров и оценивания факторов риска с использованием аналитических индикаторов;

- поддержка стратегического управления на основе аналитического обобщения показателей природной и техногенной безопасности с возможностью формирования управляющих воздействий, направленных на снижение рисков для населения и достижение приемлемого уровня безопасности, как в краткосрочной, так и в долгосрочной перспективе;

- формирование количественной интегрированной оценки факторов риска по каждой обстановке и по территории в целом с возможностью качественной интерпретации;

- оценивание факторов риска с учетом территориально-ориентированных нормативов.

Литература:

1. Ноженкова Л.Ф., Ничепорчук В.В., Исаев С.В., Евсюков А.А., Морозов Р.В., Марков А.А., Ноженков А.И. ЭСПЛА-ПРО — система сбора, аналитической обработки данных и поддержки принятия решений по предупреждению и ликвидации чрезвычайных ситуаций // Безопасность и живучесть технических систем: Труды III Всероссийской конференции. — Красноярск, 2009. ИВМ СО РАН. — с. 51–55.
2. Ноженкова Л.Ф., Ничепорчук В.В., Бадмаева К.В., Пенькова Т.Г., Коробко А.В., Евсюков А.А., Ноженков А.И., Марков А.А., Морозов Р.В., Есавкин С.Е. Система консолидации и анализа данных мониторинга чрезвычайных ситуаций в Красноярском крае // Проблемы безопасности и чрезвычайных ситуаций, 2012. — № 4. — с. 63–73.
3. Ямалов И.У. Моделирование процессов управления и принятия решений в условиях чрезвычайных ситуаций. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2007. — 288 с.
4. Mendonca, D. Collaborative adhocracies and mix-and-match technologies in emergency management. Communications of the ACM, 2007. — Vol. 50. — P. 44–49.
5. Akgun, I., Gumusbuga F., Tansel B. Risk based facility location by using fault tree analysis in disaster management // Omega, 2015. — Vol. 52. — P. 168–179.
6. Невидимова О.Г., Янкович Е.П. Исследование природно-климатических опасностей с использованием ГИС-технологий // Геоинформационные технологии и математические модели для мониторинга и управления экологическими и социально-экономическими системами, 2011. — С. 169–174.

7. Трофимова Н.В., Антамошкин О.А., Антамошкина О.А., Ничепорчук В.В. Разработка технологий обеспечения безопасности туристической деятельности (на примере природного парка «Ергаки») // Материалы науч.-практ. конф. «Проблемы, пути и направления дальнейшего совершенствования природной, техногенной, пожарной безопасности населения и территорий субъектов Российской Федерации Сибирского федерального округа», 2011. — Новосибирск. — с. 137–141.
8. Сергеева Г.А. Оценка биоклиматических условий Волгоградской области по индексу патогенности метеорологической ситуации // Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Проблемы современной гидрометеорологии и геоэкологии», Ростов-на-Дону, 2007. — с. 115–121.
9. Яйли Е.А., Музалевский А.А. Методология и способ оценки качества компонентов природной среды урбанизированных территорий на основе индикаторов, индексов и риска // Экологические системы и приборы, 2006. — № 12. — с. 23–29.
10. Махутов Н.А., Москвичев В.В., Гаденин М.М., Лепихин А.М., Черняев А.П. Формирование нормативной базы безопасности и защищенности ГЭС Сибири от тяжелых катастроф // Проблемы безопасности в чрезвычайных ситуациях, 2011. — № 4. — с. 28–39.
11. Тридворнов А.В. Оценка техногенного и комплексного рисков территориально-промышленных образований (на примере Красноярского края) // Сборник статей Международной конференции по вычислительно-информационным технологиям для наук об окружающей среде: «CITES-2007», Томск, 2007. — с. 97.
12. Лепихин А.М., Москвичев В.В., Шокин Ю.И., Чернякова Н.А. Антропогенные риски Сибири: концепции и модели // Геоинформационные технологии и математические модели для мониторинга и управления экологическими и социально-экономическими системами, 2011. — С. 15–21.
13. Берунов, С. Б., Москвичев В.В., Лепихин А.М., Буров А.Е., Журавлева И.В., Князьков Н.В., Ничепорчук В.В., Тридворнов А.В., Черняев А.П., Чернякова Н.А. Расчет значений индивидуальных и комплексных рисков возникновения чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера для населения городов и районов края, районирование территорий Красноярского края по степени риска // Информационно-методический материал. — Красноярск: Агентство по ГО, ЧС и ПБ адм. Красноярского края, 2007. — 38 с.

Расчет дифференциальных уравнений химической кинетики модифицированным методом Ческино

Новиков Антон Евгеньевич, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

Введение

При численном решении жестких задач большой размерности возникает необходимость использования алгоритмов на основе явных методов [1–3]. Методы интегрирования на основе неявных или полужявных численных схем используют обращение матрицы Якоби [1]. В данном случае это отдельная трудоемкая задача. В такой ситуации предпочтительнее применять алгоритмы на основе явных формул, если жесткость задачи позволяет за разумное время получить приближение к решению. Здесь с применением предложенного в [3] способа оценки максимального собственного числа матрицы Якоби построено неравенство для контроля устойчивости метода Ческино второго порядка точности [4]. На основе стадий численной формулы Ческино разработан метод первого порядка точности с расширенным до 32 интервалом устойчивости. Сформулирован алгоритм интегрирования переменного порядка и шага. Приведены результаты расчетов.

Метод Ческино

Рассматривается задача Коши

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (1)$$

где y и f — N -мерные вещественные вектор-функции; t — независимая переменная, которая изменяется на заданном интервале $[t_0, t_k]$. Для решения (1) будем использовать явные формулы типа Рунге-Кутты

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + p_{m1}k_1 + p_{m2}k_2 + p_{m3}k_3 + p_{m4}k_4, \\
 k_1 &= hf(t_n, y_n), \quad k_2 = hf(t_n + 0.25h, y_n + 0.25k_1), \\
 k_3 &= hf(t_n + 0.5h, y_n + 0.5k_2), \quad k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3),
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

где h — шаг интегрирования; $k_i, 1 \leq i \leq 4$ — стадии метода; $p_{mi}, 1 \leq i \leq 4$ — числовые коэффициенты; m — порядок точности метода. При коэффициентах

$$p_{21} = 1, \quad p_{22} = -2, \quad p_{23} = 2, \quad p_{24} = 0
 \tag{3}$$

схема (2), (3) имеет второй порядок точности [4].

Схема (2) с коэффициентами

$$p_{41} = 1/6, \quad p_{42} = 0, \quad p_{43} = 2/3, \quad p_{44} = 1/6$$

имеет четвертый порядок. Тогда для контроля точности схемы второго порядка можно использовать оценку ошибки $\delta_{n,2}$ вида

$$\delta_{n,2} = (p_{41} - p_{21})k_1 + (p_{42} - p_{22})k_2 + (p_{43} - p_{23})k_3 + (p_{44} - p_{24})k_4.$$

В результате для контроля точности вычислений применяется неравенство $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ — есть некоторая норма в R^N , а ε — требуемая точность расчетов. Имеет место соотношение $\delta_{n,2} = O(h^3)$. Тогда шаг h^{ac} по точности будем выбирать по формуле $h^{ac} = q \cdot h$, где значение q находится из уравнения $q^3 \cdot \|\delta_{n,2}\| = \varepsilon$. Если $q < 1$, то происходит повторное вычисление решения (возврат) с шагом h , равным $q \cdot h$. В противном случае вычисляется приближенное решение, а прогнозируемый шаг h_{n+1} вычисляется по формуле $h_{n+1} = q \cdot h$. Неравенство $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$ хорошо зарекомендовало себя при решении многих задач и далее будет использоваться здесь. Ниже алгоритм переменного шага на основе схемы (2), (3) с неравенством для контроля точности $\|\delta_{n,2}\| \leq \varepsilon$ назовем CESCH42.

Контроль устойчивости

Построим неравенство для контроля устойчивости схемы (2). Для этого применим (2) для решения линейной задачи $y' = Ay$ с постоянной матрицей A . Первые три стадии k_1, k_2 и k_3 применительно к данной задаче имеют вид

$$k_1 = X \cdot y_n, \quad k_2 = (X + 0.25X^2) \cdot y_n, \quad k_3 = (X + 0.5X^2 + 0.125X^3) \cdot y_n,$$

где $X = h \cdot A$. Нетрудно видеть, что имеют место соотношения

$$k_1 - 2k_2 + k_3 = 0.125X^3 \cdot y_n, \quad 0.5(k_2 - k_1) = 0.125X^2 \cdot y_n.$$

Оценку максимального собственного числа матрицы Якоби системы (1) можно вычислить степенным методом [3]. Введем обозначение

$$v_n = 2 \cdot \max_{1 \leq i \leq N} |(k_1 - 2k_2 + k_3)_i / (k_2 - k_1)_i|.
 \tag{4}$$

Для контроля устойчивости метода Ческино можно применять неравенство $v_n \leq D$, где число D ограничивает интервал устойчивости.

Устойчивость методов типа Рунге-Кутта обычно исследуется на скалярном тестовом уравнении $y' = \lambda y$, где λ есть произвольное комплексное число, $\text{Re}(\lambda) < 0$. Смысл λ — некоторое собственное число матрицы Якоби системы (1). Применяя (2), (3) для решения $y' = \lambda y$, получим, что функция устойчивости $Q_2(x)$ метода второго порядка имеет вид $Q_2(x) = 1 + x + 0.5x^2 + 0.25x^3$, $x = h \cdot \lambda$, а функция устойчивости $Q_4(x)$ метода четвертого порядка — $Q_4(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$, $x = h \cdot \lambda$. Интервал устойчивости метода второго порядка равен двум (рис. 1), а схемы четвертого порядка приблизительно равен 2.8 (рис. 2). Поэтому в неравенстве $v_n \leq D$ положим $D = 2$. Учитывая, что $v_n = O(h)$, шаг h^{st} по устойчивости можно выбирать по формуле $h^{st} = r \cdot h$, где r вычисляется из равенства $r \cdot v_n = 2$.

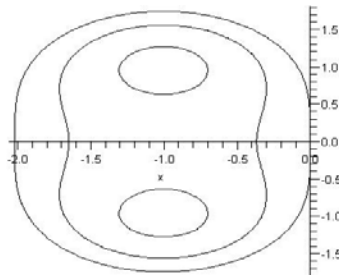


Рис. 1. Область устойчивости метода второго порядка

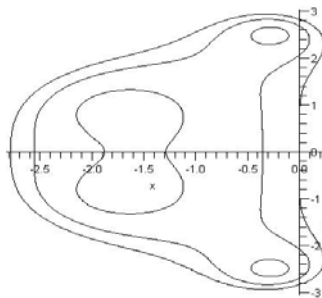


Рис. 2. Область устойчивости метода четвертого порядка

Оценка (4) является грубой, потому что вовсе не обязательно максимальное собственное число сильно отделено от остальных, в степенном методе применяется мало итераций и дополнительные искажения вносит нелинейность задачи (1). Поэтому контроль устойчивости используется как ограничитель на размер шага интегрирования. В результате прогнозируемый шаг вычисляется по формуле

$$h_{n+1} = \max \left\{ h_n, \min \left[h^{ac}, h^{st} \right] \right\}, \tag{5}$$

где h_n есть последний успешный шаг интегрирования. Отметим, что формула (5) применяется для прогноза величины шага интегрирования h_{n+1} после успешного вычисления решения с предыдущим шагом h_n , и поэтому фактически не приводит к увеличению вычислительных затрат. Если шаг по устойчивости меньше последнего успешного, то он уменьшен не будет, потому что причиной этого может быть грубость оценки максимального собственного числа. Однако шаг не будет и увеличен, потому что не исключена возможность неустойчивости численной схемы. Если шаг по устойчивости должен быть уменьшен, то в качестве следующего шага будет применяться последний успешный шаг h_n . В результате для выбора шага и предлагается формула (5), которая позволяет стабилизировать поведение шага на участке установления решения, где определяющую роль играет устойчивость. Именно наличие данного участка существенно ограничивает возможности применения явных методов для решения жестких задач.

В дальнейшем алгоритм переменного шага с дополнительным контролем устойчивости численной схемы будем называть **CESCH42st**. Данный алгоритм основан на численной формуле невысокого (второго) порядка точности, и поэтому он ориентирован на решение нежестких задач с небольшой точностью расчетов (порядка 1% и ниже), а также задач умеренной жесткости. Из результатов расчетов алгоритмом **CESCH42st** следует, что фактическая точность вычислений на участке установления значительно выше задаваемой точности. Это естественно, потому что на данном участке старые ошибки подавляются за счет контроля устойчивости, а новые невелики за счет малости производных решения. В такой ситуации эффективнее проводить расчеты по методу низкого порядка с более широкой областью устойчивости.

Метод первого порядка

На основе стадий численной схемы (2) построим метод первого порядка точности вида

$$y_{n+1,1} = y_n + p_{11}k_1 + p_{12}k_2 + p_{13}k_3 + p_{14}k_4 \tag{6}$$

с более широкой областью устойчивости. Для этого применим (6) для решения тестового уравнения $y' = \lambda y$. Получим $y_{n+1,1} = Q_1(x)y_n$, где $x = h \cdot \lambda$,

$$Q_1(x) = 1 + (p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14})x + (p_{12}/4 + p_{13}/2 + p_{14})x^2 + (p_{13}/8 + p_{14}/2)x^3 + 0.25p_{14}x^4. \tag{7}$$

Требование первого порядка точности численной формулы (7) означает выполнение соотношения $p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} = 1$. Остальные коэффициенты p_{1i} , $1 \leq i \leq 4$ применим для расширения области устойчивости.

Условие устойчивости схемы (6) имеет вид $|Q_1(x)| \leq 1$. Для построения метода с максимальным интервалом устойчивости рассмотрим многочлен Чебышева вида $T_4(z) = 8z^4 - 8z^2 + 1$. Известно, что полином $T_4(z)$ наименее отклоняется от нуля для $z \in [-1, 1]$. Проведем замену переменных $z = 1 - 2x/\gamma$, при этом отрезок $[\gamma, 0]$ отображается на промежуток $[-1, 1]$. В результате многочлен $T_4(x)$ записывается в виде

$$T_4(x) = 1 - 32x/\gamma + 160x^2/\gamma^2 - 256x^3/\gamma^3 + 128x^4/\gamma^4. \tag{8}$$

Нетрудно показать [3], что для полинома $T_4(x)$ неравенство $|T_4(x)| \leq 1$ выполняется на максимальном интервале $[\gamma, 0]$, $\gamma = -32$ (рис. 3). Сравнивая соотношения (7) и (8) при $\gamma = -32$, получим коэффициенты p_{1i} , $1 \leq i \leq 4$ метода (2) первого порядка точности с максимальным интервалом устойчивости, то есть

$$p_{11} = 895/2048, p_{12} = 257/512, p_{13} = 31/512, p_{14} = 1/2048. \tag{9}$$

Область устойчивости метода первого порядка (6), (9) по вещественной оси в 16 раз шире области устойчивости численной схемы (2), (3). Вычислительные затраты в методах первого и второго порядков совпадают. Поэтому для задач, в которых шаг ограничен в основном по устойчивости, предполагаемое теоретическое повышение эффективности в 16 раз.

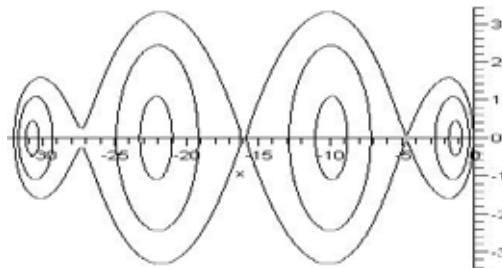


Рис. 3. Область устойчивости метода первого порядка

В неравенстве для контроля точности будем применять оценку ошибки вида

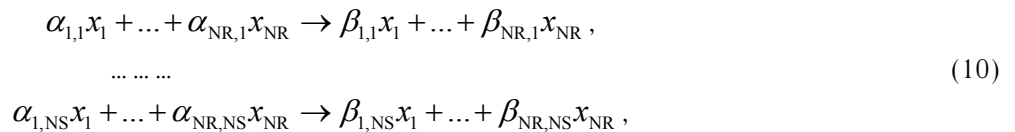
$$\delta_{n,1} = (p_{41} - p_{11})k_1 + (p_{42} - p_{12})k_2 + (p_{43} - p_{13})k_3 + (p_{44} - p_{14})k_4.$$

Для контроля точности численной формулы (6), (9) можно применять неравенство $\|\delta_{n,1}\| \leq \varepsilon$. Так как интервал устойчивости численной схемы (6), (9) ограничен числом 32, то для ее контроля устойчивости можно применять неравенство $v_n \leq 32$, где v_n определяется по формуле (4).

Метод первого порядка с расширенной областью устойчивости эффективен на участках установления, где шаг ограничен по устойчивости. На переходных участках эффективнее будет метод (2), (3). Повышения эффективности можно достичь за счет применения каждого метода на том участке, где он наиболее эффективен. В качестве критерия переключения с метода на метод можно использовать неравенство для контроля устойчивости. При расчетах по методу (2), (3) переход на численную схему (6), (9) осуществляется при нарушении неравенства $v_n \leq 2$. При расчетах методом первого порядка обратный переход происходит в случае выполнения $v_n \leq 2$. Вычисления методом первого порядка сопровождаются дополнительным (наряду с точностью) контролем неравенства $v_n \leq 32$, а шаг выбирается по формуле типа (5). Ниже алгоритм переменного порядка и шага будем называть CESCH42vp.

Химическая кинетика

Численное исследование построенных алгоритмов интегрирования проводилось на дифференциальных уравнениях химической кинетики. Кинетическая схема химической реакции состоит из элементарных стадий вида



где x_i , $1 \leq i \leq NR$ — реагенты; NR и NS — соответственно, число реагентов и число стадий в реакции; α_{ij} и β_{ij} , $1 \leq i \leq NR$, $1 \leq j \leq NS$ — стехиометрические коэффициенты. Для каждой элементарной реакции заданы константы скоростей стадии k_j , $1 \leq j \leq NS$. Процессу (10) в рамках сосредоточенной модели изотермического реактора постоянного объема соответствует система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$C' = A^T V, \quad C(0) = C_0.$$

Здесь A^T — стехиометрическая матрица; C и V — вектор концентраций реагентов и скоростей стадий, соответственно. В случае протекания реакции в неизотермических условиях к данной системе добавляется уравнение теплового баланса

$$T' = [Q^T V - \alpha(T - T_{01})] / (C_V^T C),$$

где T — температура смеси в реакторе; T_{01} — температура стенок реактора; Q^T — вектор удельных теплот стадий; C_V^T — вектор теплоемкостей реагентов; $\alpha = \tilde{\alpha} s / r$, $\tilde{\alpha}$ — коэффициент теплоотдачи; s и r — площадь поверхности и объем реактора, соответственно. Верхний индекс T у векторов Q^T и C_V^T означает транспонирование. Теплоемкости реагентов и коэффициент теплоотдачи могут быть функциями концентраций реагентов c_i , $1 \leq i \leq NR$, а α может еще зависеть от температуры.

Если реакция протекает в изотермическом реакторе постоянного объема с обменом вещества (открытая система, реактор идеального смешения), система дифференциальных уравнений записывается в виде

$$C' = A^T V + (C_p - C) / \Theta, \quad C(0) = C_0.$$

где C_p — вектор концентраций реагентов на входе в реактор; Θ — время пребывания смеси в реакторе; $\Theta = r / u$, u — объемная скорость течения смеси через реактор. В неизотермических условиях система дополняется уравнением теплового баланса

$$T' = [Q^T V - \alpha(T - T_{01})] / (C_V^T C) - (T - T_{02}) / \Theta,$$

где T_{02} — температура смеси на входе в реактор. Температура реагирующей смеси может задаваться в виде функции времени t и концентраций реагентов c_i , $1 \leq i \leq NR$.

Если стадия обратима, то под скоростью стадии W_s принимается разность скоростей прямого W_s^+ и обратного W_s^- процессов, то есть $W_s = W_s^+ - W_s^-$, $1 \leq s \leq NS$. Если в стадии участвует третья частица, то скорость V_s вычисляется по формулам [5]

$$V_s = P_s W_s, \quad P_s = \sum_{i=1}^{NR+NI} \varepsilon_{si} c_i, \quad 1 \leq s \leq NS,$$

где ε_{si} , $1 \leq s \leq NS$, $NR+1 \leq i \leq NR+NI$ — эффективности третьих частиц; NI — число инертных веществ; ε_{si} и c_i — эффективности и концентрации инертных веществ, соответственно. Значения компонент вектора W_s определяются из схемы химической реакции (10) по соотношениям

$$W_s^+ = k_s \prod_{i=1}^{NR+NI} c_i^{\alpha_{ij}}, \quad W_s^- = k_{-s} \prod_{i=1}^{NR+NI} c_i^{\beta_{ij}},$$

где k_s и k_{-s} , $1 \leq s \leq NS$ — константы скоростей прямой и обратной стадий, соответственно. Константы скоростей стадий вычисляются по формулам

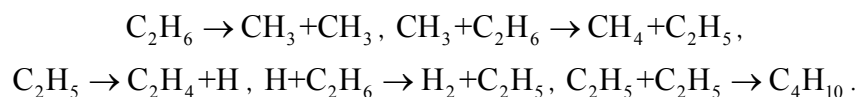
$$k_j = A_j T^{n_j} \exp\left(-\frac{E_j}{RT}\right),$$

где T — температура смеси в реакторе; A_j , n_j и E_j/R — заданные постоянные. Заметим, что, вообще говоря, константы скоростей в случае неизотермического реактора постоянными не являются — они зависят от температуры. Однако исторически сначала рассматривался изотермический реактор, и k_j , $1 \leq j \leq \text{NS}$ в настоящее время по-прежнему называют константами.

Стехиометрическая матрица A^T с элементами a_{ij} формируется из кинетической схемы (10) по следующему правилу. Номер стадии совпадает с номером столбца, а номер реагента с номером строки матрицы A^T . Если x_i выступает как исходный реагент, то $a_{ij} = -\alpha_{ij}$, если x_i — продукт, то $a_{ij} = \beta_{ij}$. Если x_i является одновременно исходным реагентом и продуктом, то $a_{ij} = -\alpha_{ij} + \beta_{ij}$. Обычно в элементарной стадии участвует небольшое количество реагентов, то есть стехиометрическая матрица сильно разрежена.

Пиролиз этана

Запишем систему дифференциальных уравнений, описывающих пиролиз этана. Пиролиз этана в отсутствие кислорода описывается небольшой последовательностью стадий. Механизм пиролиза этана неоднократно обсуждался в литературе. Здесь принята схема реакции, предложенная и исследованная в [6]



Здесь константы скоростей стадий имеют вид:

$$k_1 = 1.34 \cdot 10^{-5}, \quad k_2 = 3.73 \cdot 10^2, \quad k_3 = 3.69 \cdot 10^3, \quad k_4 = 3.66 \cdot 10^5, \quad k_5 = 1.62 \cdot 10^7.$$

Обозначим концентрации реагентов следующим образом:

$$\begin{aligned} c_1 &= [\text{C}_2\text{H}_6], \quad c_2 = [\text{CH}_3], \quad c_3 = [\text{CH}_4], \quad c_4 = [\text{C}_2\text{H}_5], \\ c_5 &= [\text{C}_2\text{H}_4], \quad c_6 = [\text{H}], \quad c_7 = [\text{H}_2], \quad c_8 = [\text{C}_4\text{H}_{10}]. \end{aligned}$$

Тогда соответствующая система состоит из 8 обыкновенных дифференциальных уравнений вида $C' = A^T V$, то есть

$$\begin{aligned} c_1' &= -k_1 c_1 - k_2 c_1 c_2 - k_4 c_1 c_6, \quad c_2' = 2k_1 c_1 - k_2 c_1 c_2, \\ c_3' &= k_2 c_1 c_2, \quad c_4' = k_2 c_1 c_2 - k_3 c_4 + k_4 c_1 c_6 - 2k_5 c_4^2, \\ c_5' &= k_3 c_4, \quad c_6' = k_3 c_4 - k_4 c_1 c_6, \quad c_7' = k_4 c_1 c_6, \quad c_8' = k_5 c_4^2. \end{aligned} \tag{11}$$

Начальная концентрация этана $c_1 = [\text{C}_2\text{H}_6]$ равна 0.14, для остальных реагентов концентрации равны нулю.

Результаты расчетов

Расчеты осуществлялись с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$. Эффективность алгоритмов интегрирования оценивалась по числу вычислений правой части if задачи (11) на интервале интегрирования. Численное решение осуществлялось на промежутке $[0, 0.26]$. Данная задача удовлетворяет "классическому" определению жесткости. В начале интервала интегрирования наблюдается переходный участок (сотые доли секунды), а затем происходит медленное установление (рис. 4).

Сравнение эффективности построенных алгоритмов проводилось с известным методом Мерсона (MERSON, [7]). Для обоих методов фактическая точность не хуже задаваемой точности. В случае применения явных методов для решения жестких задач шаг почти на всем промежутке интегрирования ограничен устойчивостью. В результате фактическая точность вычисления решения получается значительно выше задаваемой. На рис. 4 графики решений для метода Мерсона и построенного алгоритма CESCH42 практически совпадают. Алгоритму CESCH42 без контроля устойчивости для нахождения решения потребовалось $if = 22\ 853$, для алгоритма с контролем устойчивости

CESCH42st имеет место $if=20\ 403$, для алгоритма переменного порядка и шага CESCH42vp затраты $if = 2\ 588$, а для метода Мерсона $if = 25\ 796$.

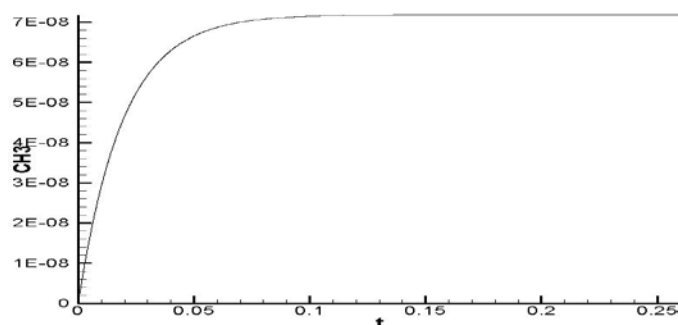


Рис. 4. Зависимость CH_3 от времени

Заключение

Из результатов расчетов можно сделать следующие выводы. Во-первых, построенный алгоритм интегрирования второго порядка с контролем точности вычислений и устойчивости численной схемы, а также алгоритм переменного порядка и шага можно применять для решения достаточно жестких задач. Во-вторых, по вычислительным затратам алгоритм переменного порядка и шага CESCH42vp эффективнее метода Мерсона почти в 10 раз. Это является следствием контроля устойчивости численной схемы и расчетов с переменным порядком. Представляется, что при достаточно большой размерности задачи (1) метод CESCH42vp может конкурировать с неявными методами на задачах умеренной жесткости, потому что в нем не обращается матрица Якоби. При решении двенадцати тестовых задач [1] и десяти примеров [8] преимущество алгоритма CESCH42vp выше.

Литература:

1. Хайрер, Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: монография / Э. Хайрер, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1999. — 685 с.
2. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: монография / Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
3. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем: монография / Е.А. Новиков. — Новосибирск: Наука, 1997. — 197 с.
4. Ceschino, F. Numerical solution of initial value problems: monograph / F. Ceschino, G. Kuntzman. — New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Clis, 1966. — 347 p.
5. Новиков Е.А. Численное моделирование модифицированного орегонатора (2,1)-методом решения жестких задач / Е.А. Новиков // Вычислительные методы и программирование. — 2010. — Т. 11, № 2. — с. 123–130.
6. Kulich D.M. Mathematical simulation of the oxygen ethane reaction / D.M. Kulich and J.E. Taylor J. // Chem. Kinetic. — 1975. — Vol. 8. — P. 89–97.
7. Merson R.H. An operational methods for integration processes / R.H. Merson // Australia: Proc. of Symp. on Data Processing. — 1957. — P. 329–331.
8. Enright W.H. Comparing numerical methods for the solutions of systems of ODE's, / W.H. Enright, T.E. Hull // BIT. — 1975. — No. 15. — P. 10–48.

Классификация линейных однородных систем дифференциальных уравнений с помощью жордановой нормальной формы

Пашенко Зоя Дмитриевна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Шажко Сергей Павлович, студент
Донбасский государственный педагогический университет (г. Славянск, Украина)

В статье получен алгоритм решения линейной однородной системы дифференциальных уравнений, который использует жорданову нормальную форму матрицы этой системы и получено классификацию решений такой системы третьего порядка.

Ключевые слова: жорданова нормальная форма, линейные однородные системы дифференциальных уравнений, решения систем дифференциальных уравнений.

ЖНФ имеет широкое применение. Мы рассматриваем использование ЖНФ для классификации решений линейных однородных систем дифференциальных уравнений (ЛОСДУ). Вообще дифференциальные уравнения и методы исследования их решений широко используются в разнообразных отраслях и разделах современной науки и техники. Поэтому исследование дифференциальных уравнений остается актуальным в современной науке.

Данная работа представляет способ классификации решений ЛОСДУ с постоянными коэффициентами с действительной матрицей системы. Этот способ использует классификацию ЖНФ таких матриц.

ЛОСДУ n -го порядка с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$\frac{dY}{dt} = AY, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица n -го порядка, Y — столбик неизвестных функций y_1, y_2, \dots, y_n , $\frac{dY}{dt}$ — столбик производных этих функций.

Экспонентой e^A квадратной матрицы A называется матрица $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, где $A^0 = E$ — единичная матрица.

Тогда $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$, $t \in \mathbf{R}$. Согласно [1, с.133], система (1) имеет общее решение $Y = e^{At}C$, где C — столбик произвольных коэффициентов.

По основной теореме, каждая квадратная матрица над алгебраически замкнутым полем (в частности, над \mathbf{C}) приводится к ЖНФ. Т. е., для каждой квадратной матрицы $A \in M_n(\mathbf{R})$ существует такая невырожденная матрица U , что $J(A) = U^{-1}AU$ [2]. Существует алгоритм нахождения ЖНФ матрицы A .

1. Найти характеристический многочлен матрицы A и её собственные значения.
2. Для каждого собственного числа λ матрицы A и для каждого $i \in \mathbf{N}$ вычислить количество $N(i, \lambda)$ клеток $J_i(\lambda)$, которые входят в ЖНФ матрицы A . Для этого вычислить числа $r_0(\lambda) = n$, $r_i(\lambda) = \text{rg}(A - \lambda E)^i$ до тех пор, пока не найдется такое m^* , что $r_{m^*}(\lambda) = r_{m^*+1}(\lambda)$. Потом воспользоваться формулой

$$N(i, \lambda) = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}, \quad i = 1, \dots, m^*.$$

3. Построить ЖНФ $J(A)$ как блочно-диагональную матрицу, диагональ которой составляют клетки Жордана $J_i(\lambda)$, где λ пробегает все собственные значения матрицы A , и каждая из клеток $J_i(\lambda)$ встречается $N(i, \lambda)$ раз. [3]

Каждой клетке Жордана порядка m соответствует циклический базис $v, (A - \lambda E)v, \dots, (A - \lambda E)^{m-1}v$ длины m (цепочка длины m). Поэтому количество цепочек длины m корневого подпространства оператора \tilde{A} с матрицей A , соответствующих собственному значению λ , равно $N(m, \lambda)$, а объединение всех таких цепочек образует

цепочный базис, соответствующий λ . Алгоритм нахождения такого базиса описано в [3].

1. Найти ФСР однородной системы с матрицей $(A - \lambda E)^{m^*}$.
2. Для каждого вектора \mathbf{v} из этой ФСР построить цепочку $\mathbf{v}_{i+1} = (A - \lambda E)\mathbf{v}$, $i = 0, \dots, m^* - 1$.
3. Выбрать $N(m, \lambda)$ цепочек длины m^* , состоящих из линейно независимых векторов. (Это будет часть искомого базиса.)
4. Прodelать аналогичные действия со следующим (по убыванию) i , для которого $N(i, \lambda) \neq 0$, следя за линейной независимостью полученных векторов с выбранными ранее.
5. Продолжать таким образом, пока не будут выбраны все цепочки.

После нахождения цепочного базиса для каждого собственного числа матрицы A мы можем привести эту матрицу к жордановой форме, но в этом нужно действовать осмотрительно, нумеруя базисные векторы f_i так, как описано в [3]. Искомая матрица U состоит из координат полученных базисных векторов f_i , записанных столбиками.

Заметим, если действительную матрицу S умножить на столбик функций X , то получим столбик функций $Y = SX$, причем $Y' = SX'$, поскольку

$$y_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j \Rightarrow y_i' = \sum_{j=1}^n s_{ij} x_j'.$$

По рассмотренному выше, $X = e^{Jt}C$ — решение ЛОСДУ $\frac{dX}{dt} = JX$. Пусть $J = J(A)$ — соответствующая ЖНФ матрицы A и $J = U^{-1}AU$. Тогда $(UX)' = UX' = UJX = UJU^{-1}UX = A(UX)$, откуда UX — решение ЛОСДУ $\frac{dY}{dt} = AY$. Значит решение этой системы представляется

$$Y = UX = Ue^{Jt}C.$$

Этот результат позволяет упростить решение системы $\frac{dY}{dt} = AY$, для чего достаточно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. Найти ЖНФ J матрицы A и матрицу U из столбцов жорданового базиса.
2. Вычислить экспоненту e^{Jt} .
3. Общее решение системы (1) записать в виде $Y = Ue^{Jt}C$.

Также этот результат позволяет классифицировать ЛОСДУ (1) по различным видам решений, используя классификацию соответствующих жордановых матриц. Для примера рассмотрим ЛОСДУ третьего порядка. Жордановы матрицы третьего порядка над полем комплексных чисел по клеточно-диагональному разнообразию имеют шесть видов.

- 1^o $J_3(\lambda)$; 4^o $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_3)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$;
- 2^o $J_1(\lambda_1) \oplus J_2(\lambda_2)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 5^o $J_1(\lambda_1) \oplus J_1(\lambda_2) \oplus J_1(\lambda_2)$, где $\lambda_1 \neq \lambda_2$;
- 3^o $J_1(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$; 6^o $J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda) \oplus J_1(\lambda)$. [4].

Если ЖНФ матрицы системы третьего порядка $\frac{dY}{dt} = AY$ имеет вид

$$1^0: J = J_3(\lambda) \text{ и } J = U^{-1}AU, \text{ то } e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} \text{ и общее решение этой системы имеет вид}$$

$$Y = U e^{Jt} C = \begin{pmatrix} C_1 u_{11} e^{\lambda t} + C_2 (u_{11} t + u_{12}) e^{\lambda t} + C_3 \left(u_{11} \frac{t^2}{2} + u_{12} t + u_{13} \right) e^{\lambda t} \\ C_1 u_{21} e^{\lambda t} + C_2 (u_{21} t + u_{22}) e^{\lambda t} + C_3 \left(u_{21} \frac{t^2}{2} + u_{22} t + u_{23} \right) e^{\lambda t} \\ C_1 u_{31} e^{\lambda t} + C_2 (u_{31} t + u_{32}) e^{\lambda t} + C_3 \left(u_{31} \frac{t^2}{2} + u_{32} t + u_{33} \right) e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что столбиками матрицы U являются векторы жорданового базиса f_1, f_2, f_3 , этот вид будет следующим:

$$Y = C_1 f_1 e^{\lambda t} + C_2 (f_1 t + f_2) e^{\lambda t} + C_3 \left(f_1 \frac{t^2}{2} + f_2 t + f_3 \right) e^{\lambda t}.$$

Аналогично, для всех остальных типов жордановых матриц третьего порядка, общие решения ЛОСДУ (1) имеют вид

$$2^0 Y = C_1 f_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 f_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 (f_2 t + f_3) e^{\lambda_2 t}, \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

$$3^0 Y = C_1 f_1 e^{\lambda t} + C_2 f_2 e^{\lambda t} + C_3 (f_2 t + f_3) e^{\lambda t};$$

$$4^0 Y = C_1 f_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 f_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 f_3 e^{\lambda_3 t}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3;$$

$$5^0 Y = C_1 f_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 f_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 f_3 e^{\lambda_2 t}, \lambda_1 \neq \lambda_2;$$

$$6^0 Y = C_1 f_1 e^{\lambda t} + C_2 f_2 e^{\lambda t} + C_3 f_3 e^{\lambda t}, C_1, C_2, C_3 \in \mathbf{R}.$$

Следует заметить, что для ЛОСДУ третьего порядка с вещественной матрицей только в случае 4^0 возможно появление комплексных (причем пары комплексно сопряженных) собственных значений. В этой ситуации можно рассмотреть изменение вида общего решения системы, что не входит в цели данной статьи.

Литература:

1. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982. — 273 с.
2. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: учебник для вузов. — 2-е изд., исправл. / — М.: Физико-математическая литература, 2001. — 368 с.
3. Мазорчук, В. С. Методичний посібник до теми «Жорданова нормальна форма» для студентів механіко-математичного факультету / — Київ: Київський університет імені Тараса Шевченка, 1998. — 123 с.

Алгоритм интегрирования с переменным числом стадий для решения умеренно жестких задач

Рыбков Михаил Викторович, ассистент
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

Введение

При численном исследовании жестких задач вида

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \tag{1}$$

где y и f — гладкие вещественные N -мерные вектор функции; t — независимая переменная; все большее внимание привлекают явные методы [1–2]. Это связано с тем, что при применении L -устойчивых методов возникает проблема с

обращением матрицы Якоби. В случае большой размерности системы дифференциальных уравнений время декомпозиции данной матрицы фактически определяет общие вычислительные затраты. В то же время явные методы не нуждаются в вычислении матрицы Якоби и, если жесткость задачи не слишком велика, то они будут предпочтительнее. В настоящее время применяются алгоритмы переменных порядка и шага, что приводит к существенному повышению эффективности расчетов. На участках установления нет смысла использовать численные формулы высокого порядка точности. Быстродействие можно повысить за счет применения методов низкого порядка, но с большими областями устойчивости. Поэтому дальнейшее повышение эффективности достигается за счет построения алгоритмов интегрирования не только с переменными порядком и шагом, но и с переменным числом стадий.

Здесь разработан алгоритм определения коэффициентов полиномов устойчивости, при которых метод имеет заданную форму и размер области устойчивости. С применением полученных коэффициентов многочленов устойчивости создан алгоритм интегрирования с переменным числом стадий на основе методов первого порядка для решения умеренно жестких задач.

Явные методы типа Рунге-Кутты

Для численного решения жестких задач в [2] предлагается применять явные методы вида

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad k_i = hf \left(t_n + \alpha_i h, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), \quad (2)$$

где k_i , $1 \leq i \leq m$ — стадии метода; p_{mi} , α_{ij} и β_{ij} — коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости схемы (2). Для упрощения выкладок далее рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(y), \quad y(t_0) = y_0, \quad t_0 \leq t \leq t_k, \quad (3)$$

для решения которой применим методы вида

$$y_{n,i} = y_n + \sum_{j=1}^i \beta_{i+1,j} k_j, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_{mi} k_i, \quad (4)$$

где $k_i = hf(y_{n,i-1})$, $1 \leq i \leq m$, $y_{n,0} = y_n$. Все полученные ниже результаты можно использовать для неавтономных задач, если в (2) положить

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq m. \quad (5)$$

Условия порядка

Ниже потребуется матрица B_m с элементами b_{ij} [1–2]

$$\begin{aligned} b_{1i} &= 1, \quad 1 \leq i \leq m, \\ b_{ki} &= 0, \quad 2 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq k-1, \\ b_{ki} &= \sum_{j=k-1}^{i-1} \beta_{ij} b_{k-1,j}, \quad 2 \leq k \leq m, \quad k \leq i \leq m, \end{aligned} \quad (6)$$

где β_{ij} — коэффициенты схемы (2) или (4). Устойчивость одношаговых методов обычно исследуется на линейном скалярном уравнении

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y_0, \quad t \geq 0 \quad (7)$$

с комплексным λ , $\text{Re}(\lambda) < 0$. Применяя вторую формулу (4) к (7), получим

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad z = h\lambda, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=1}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (8)$$

Обозначая $C_m = (c_{m1}, \dots, c_{mm})^T$ и $P_m = (p_{m1}, \dots, p_{mm})^T$, последнее соотношение (8) можно переписать в виде

$$B_m P_m = C_m, \tag{9}$$

где элементы матрицы B_m определены соотношениями (6). Для промежуточных численных схем (4) имеем

$$y_{n+1} = Q_m(z) y_n, \quad z = h\lambda, \quad Q_m(z) = 1 + \sum_{i=1}^m c_{mi} z^i, \quad c_{mi} = \sum_{j=i}^m b_{ij} p_{mj}, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{10}$$

Используя обозначения $\beta_k = (\beta_{k+1,1}, \dots, \beta_{k+1,k})^T$ и $c_k = (c_{k1}, \dots, c_{kk})^T$, получим, что коэффициенты β_{ij} промежуточных схем (4) и коэффициенты соответствующих многочленов устойчивости связаны соотношениями

$$B_k \beta_k = c_k, \quad 1 \leq k \leq m-1. \tag{11}$$

Заметим, что из сравнения (6) и (10) следует, что $b_{ki} = c_{i-1,k-1}$, то есть элементы $(k+1)$ -го столбца матрицы B_m совпадают с коэффициентами многочлена устойчивости $Q_k(z)$. Отсюда следует, что если заданы коэффициенты многочленов устойчивости основной и промежуточной численных схем, то коэффициенты методов (4) однозначно определяются из линейных систем (9) и (11) с верхними треугольными матрицами B_i , $1 \leq i \leq m$.

Разлагая точное и приближенное решения в ряды Тейлора по степеням h , можно записать

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf + h^2 ff' / 2 + h^3 [f''f^2 + f'^2 f] / 6 + O(h^4),$$

$$y_{n+1} = y_n + \left(\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} \right) hf_n + \left(\sum_{j=2}^m b_{2j} p_{mj} \right) h^2 f_n' f_n + \tag{12}$$

$$+ \left(\sum_{j=3}^m b_{3j} p_{mj} \right) h^3 f_n'' f_n + 0.5 \left(\sum_{j=2}^m b_{2j}^2 p_{mj} \right) h^3 f_n'' f_n^2 + O(h^4),$$

где элементарные дифференциалы вычислены на точном $y(t_n)$ и приближенном y_n решениях, соответственно. Из сравнения соотношений (12) при условии $y_n = y(t_n)$ видно, что численная формула (4) будет иметь первый порядок точности, если

$$\sum_{j=1}^m b_{1j} p_{mj} = 1.$$

Отсюда следует, что для построения m -стадийных методов первого порядка точности в линейной системе (9) следует положить $c_{m1} = 1$.

Для того чтобы воспользоваться соотношениями (9) и (11) требуются коэффициенты многочленов устойчивости. Функция устойчивости явного m -стадийного метода типа Рунге-Кутты представляет собой полином степени m . Через заданные коэффициенты схемы (4) можно вычислить коэффициенты этого многочлена по формуле (9).

Многочлены устойчивости

Пусть заданы два целых числа k и m , $k \leq m$. Рассмотрим многочлены вида

$$Q_{m,k}(x) = 1 + \sum_{i=1}^k c_i x^i + \sum_{i=k+1}^m c_i x^i, \tag{13}$$

где коэффициенты c_i , $1 \leq i \leq k$ заданы, а c_i , $k+1 \leq i \leq m$ – свободные. Обычно c_i , $1 \leq i \leq k$ определяются из требований аппроксимации. Поэтому для определенности ниже будем предполагать, что $c_i = 1/i!$, $1 \leq i \leq k$.

Обозначим экстремальные точки (13) через x_1, \dots, x_{m-1} , причем $x_1 > x_2 > \dots > x_{m-1}$. Неизвестные коэффициенты c_i , $k+1 \leq i \leq m$ определим из условия, чтобы многочлен (13) в экстремальных точках x_i , $k \leq i \leq m-1$ принимал заданные значения, то есть

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i, \quad k \leq i \leq m-1, \tag{14}$$

где $F(x)$ есть некоторая заданная функция, $F_i = F(x_i)$. Для этого на x_i , $k \leq i \leq m-1$ и c_j , $k+1 \leq j \leq m$ рассмотрим следующую алгебраическую систему уравнений

$$Q_{m,k}(x_i) = F_i, \quad Q'_{m,k}(x_i) = 0, \quad k \leq i \leq m-1, \quad Q'_{m,k} = \sum_{i=1}^m i c_i x^{i-1}. \tag{15}$$

Перепишем (15) в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого обозначим через y, z, g и r векторы с координатами

$$\begin{aligned}
 y_i &= x_{k+i-1}, \quad z_i = c_{k+i}, \quad g_i = F_{k+i-1} - 1 - \sum_{j=1}^k c_j y_i^j, \\
 r_i &= -\sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1}, \quad 1 \leq i \leq m-k,
 \end{aligned} \tag{16}$$

через E_1, \dots, E_5 — диагональные матрицы с элементами на диагонали вида

$$\begin{aligned}
 e_1^{ii} &= k+i, \quad e_2^{ii} = 1/y_i, \quad e_3^{ii} = \sum_{j=1}^k j c_j y_i^{j-1} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j) z_j y_i^{k+j-1}, \\
 e_4^{ii} &= \sum_{j=2}^k j(j-1) c_j y_i^{j-2} + \sum_{j=1}^{m-k} (k+j)(k+j-1) z_j y_i^{k+j-2}, \\
 e_5^{ii} &= (-1)^{k+i-1}, \quad 1 \leq i \leq m-k,
 \end{aligned} \tag{17}$$

а через A — матрицу с элементами $a^{ij} = y_i^{k+j}$, $1 \leq i, j \leq m-k$. Заметим, что компоненты векторов (16), матриц (17) и A зависят от чисел m и k , причем

$$g = g(y), \quad r = r(y), \quad E_2 = E_2(y), \quad E_3 = E_3(y, z), \quad E_4 = E_4(y, z), \quad A = A(y).$$

Ниже аргументы опущены для упрощения записи. С использованием введенных обозначений задачу (15) можно записать в виде

$$Az - g = 0, \quad E_2 A E_1 z - r = 0. \tag{18}$$

Система (18) плохо обусловлена, что приводит к определенным трудностям при использовании для ее решения метода простой итерации. Для сходимости метода Ньютона требуются хорошие начальные условия, что в данном случае есть трудновыполнимая проблема. Если в (15) положить $F_i = (-1)^i$, $k \leq i \leq m-1$, то есть поставить задачу нахождения полинома с максимальным размером интервала устойчивости, то вопрос о вычислении начального условия y^0 решается достаточно просто с использованием значений экстремальных точек многочлена Чебышева, рассматриваемого на отрезке $[-2m^2, 0]$, где m — есть степень (13). Их можно вычислить по формуле

$$y_i = m^2 [\cos(i\pi / m) - 1], \quad 1 \leq i \leq m-1. \tag{19}$$

Подставляя (19) в первую формулу (18), получим коэффициенты полинома Чебышева, для которого $|Q_{m_1}(x)| \leq 1$ при $x \in [-2m^2, 0]$. При любом k в качестве начальных условий можно взять (19) и, как показывают расчеты, имеется хорошая сходимость. Если же $F_i \neq (-1)^i$, $k \leq i \leq m-1$, то выбор начальных условий является, вообще говоря, искусством.

Опишем способ решения (18), который не нуждается в хороших начальных условиях. Для численного решения (18) используем метод установления, который заключается в том, что для стационарной задачи строится нестационарный процесс, решение которого с течением времени устанавливается к решению исходной задачи. Рассмотрим задачу

$$y' = E_5(E_2 A E_1 A^{-1} g - r), \quad y(0) = y_0. \tag{20}$$

Ясно, что после определения стационарной точки (20) коэффициенты полинома устойчивости можно вычислить из первой системы (18). Заметим, что при использовании матрицы E_5 все собственные числа матрицы Якоби задачи (20) имеют отрицательные вещественные части, то есть задача (20) устойчивая. Из результатов расчетов следует, что (20) является жесткой задачей. Методы решения таких задач предполагают вычисление матрицы Якоби, что в случае (20) связано с трудностями. Поэтому для ее решения используем метод второго порядка точности с численным вычислением и замораживанием матрицы Якоби [3–4].

Метод первого порядка

В [5] описан алгоритм построения многочленов с заданными свойствами на промежутке $[-1, 1]$, который позволяет вычислить коэффициенты многочленов устойчивости, соответствующих методам первого порядка, до степени $m=27$. Если параметры схемы (2) и коэффициенты полинома (13) связаны соотношениями (9) при условии $c_{m_1} = 1$, то решение (9) дает параметры m -стадийной схемы (2) первого порядка точности. При заданных β_{ij} , $2 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq i-1$ и c_{ij} , $2 \leq i \leq m$ задача (13) имеет единственное решение в силу невырожденности матрицы B_m . При выборе β_{ij} можно руководствоваться различными соображениями. Если, например, набор формул (2) используется совместно с методом более высокого порядка точности, то и в схемах первого порядка естественно применять те же самые k_i .

Получим неравенства для контроля точности и устойчивости. Схемы первого порядка предполагается использовать на участке установления, где шаг ограничен устойчивостью, а не точностью. Контроль точности в этом случае носит вспомогательный характер, и для получения соответствующего неравенства будем использовать оценку локальной ошибки. В [2] показано, что из сравнения точного решения $y(t_{n+1})$ задачи (1) и приближенного решения y_{n+1} , получен-

ного по схеме (2), до членов h^2 включительно при условии $y_n = y(t_n)$ локальная ошибка схемы (2) первого порядка точности имеет вид

$$\delta_{n,1} = (0.5 - \sum_{i=2}^m b_{2i} p_{mi}) h^2 f' f + O(h^3). \tag{21}$$

Учитывая (8), ее можно переписать так:

$$\delta_{n,1} = 0.5(1 - 2c_{m2}) h^2 f' f + O(h^3), \tag{22}$$

где c_{2m} — заданный коэффициент при x^2 в (13).

Величину $\delta_{n,1}$ с помощью уже вычисленных стадий k_i , $1 \leq i \leq m$ можно оценить многими способами. Будем поступать следующим образом. Введем обозначения:

$$A'_n = g'_{m1} \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_{m1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|, \tag{23}$$

где

$$g''_{m1} = \frac{1}{2} \cdot |1 - 2c_{m2}|, \quad g'_{m1} = \frac{1}{|\beta_{21}|} \cdot g''_{m1}. \tag{24}$$

Тогда, учитывая что

$$k_2 - k_1 = \beta_{21} h^2 f'_n f_n + O(h^3), \quad hf(y_{n+1}) - k_1 = h^2 f'_n f_n + O(h^3), \tag{25}$$

для контроля точности вычислений и при выборе шага интегрирования можно применять соответственно неравенства

$$A'_n \leq \varepsilon, \quad A''_n \leq \varepsilon. \tag{26}$$

Вектор k_1 зависит от размера шага линейно. Поэтому с помощью первого неравенства (26) повторное вычисление решения сопровождается всего лишь одним дополнительным вычислением правой части дифференциальной задачи. В случае успешного шага второе неравенство (26) не приводит к увеличению вычислительных затрат, потому что вектор $f(y_{n+1})$ не применяется в следующем шаге интегрирования. Если второе неравенство (26) используется для контроля точности вычислений, то возврат при невыполнении точности будет дорогим, причем с ростом m затраты увеличиваются. Однако предварительный контроль A'_n позволяет в основном избежать повторных вычислений решения.

В случае применения численных формул (2) с переменным числом стадий при $2 \leq m \leq M$, где M — заданное целое число, можно поступать следующим образом. Введем обозначения:

$$g''_{M2} = \max_{2 \leq m \leq M} g''_{m1}, \quad g'_{M1} = \frac{1}{|\beta_{21}|} g''_{M2}, \tag{27}$$

где g''_{m1} вычисляются по первой формуле (24). Оценку ошибки определим по формулам

$$A'_n = g'_{M1} \|k_2 - k_1\|, \quad A''_n = g''_{M1} \|hf(y_{n+1}) - k_1\|. \tag{28}$$

Тогда для контроля точности и при выборе шага интегрирования сразу для всего набора формул снова можно использовать неравенства (26).

Теперь перейдем к получению неравенства для контроля устойчивости. Ниже будем предполагать выполненными соотношения

$$\beta_{21} = \beta_{31} + \beta_{32}, \quad m \geq 3, \tag{29}$$

где $\beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ — параметры схемы (2).

Неравенство для контроля устойчивости получим следующим образом. Запишем разность ($k_3 - k_2$) в форме Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа первого рода:

$$k_3 - k_2 = \beta_{32} h \frac{\partial f(\tilde{y}_n)}{\partial y} (k_2 - k_1). \tag{30}$$

Учитывая вид разности ($k_2 - k_1$), оценку максимального собственного числа матрицы Якоби можно определить степенным методом, т.е. для контроля устойчивости методов (2) первого порядка будем применять неравенство

$$v_n \leq \gamma_{m,1}, \tag{31}$$

где

$$v_n = \left| \beta_{32}^{-1} \right| \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{(k_3 - k_2)_i}{(k_2 - k_1)_i} \right|, \quad (32)$$

а положительные постоянные $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$ связаны с размером области устойчивости численных схем. Неравенство (31) можно использовать на каждом шаге для выбора эффективной численной схемы.

Таким образом, задача о построении явных методов Рунге-Кутты первого порядка точности с заданной областью устойчивости сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (9) с невырожденной матрицей B_m , где компоненты вектора c_m определяют размер и форму области устойчивости. Ниже с помощью построенных численных схем сформулируем алгоритм интегрирования, в котором допускаются расчеты, как по фиксированной схеме, так и с переменным числом стадий. Параметры методов можно хранить в виде двумерного массива E с элементами e_{ij} вида

$$e_{ij} = \beta_{ij}, \quad 2 \leq i \leq M, \quad 1 \leq j \leq i-1, \quad e_{im} = p_{mj}, \quad 3 \leq m \leq M, \quad 1 \leq j \leq m, \quad (33)$$

где M — максимальное число стадий в наборе методов. Величины $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$ будем хранить в одномерном массиве.

Алгоритм с переменным числом стадий

Пусть имеется набор m -стадийных методов, длины интервалов устойчивости которых равны $\gamma_{m,1}$, $3 \leq m \leq M$, $M \geq 3$. Ниже будем полагать, что при первом входе $m=3$. Алгоритм интегрирования с переменным числом стадий на основе методов первого порядка записывается следующим образом.

Шаг 1. Вычислить стадию k_1 по формуле (2).

Шаг 2. Вычислить стадию k_2 по формуле (2).

Шаг 3. Вычислить оценку локальной ошибки $\delta_{n,1}$ по первой формуле (23).

Шаг 4. Вычислить значение q по формуле

$$q^2 \cdot \|\delta_{n,1}\| = \varepsilon. \quad (34)$$

Шаг 5. Если $q < 1$, то h положить $q \cdot h$ и перейти на шаг 2 (возврат).

Шаг 6. Вычислить стадии k_i , $3 \leq i \leq m$ по формулам (2).

Шаг 7. Вычислить значение $f(y_{n+1})$.

Шаг 8. Вычислить оценку локальной ошибки $\delta_{n,1}$ по второй формуле (23).

Шаг 9. Перевычислить значение q по формуле (34).

Шаг 10. Если $q < 1$, то h присвоить $q \cdot h$ и перейти на шаг 2 (возврат).

Шаг 11. Вычислить приближенное решение y_{n+1} по схеме (2).

Шаг 12. Вычислить значение v_n по формуле (32).

Шаг 13. Вычислить значение r по формуле $r \times v_n = \gamma_{m,1}$.

Шаг 14. Вычислить прогнозируемый шаг h_{n+1} по формуле

$$h_{n+1} = \max \{ h_n, \min [q, r] \cdot h_n \}.$$

Шаг 15. Если $q \times v_n > \gamma_{m,1}$ и $m < M$, то положить m равным $(m+1)$.

Шаг 16. Если $m > 3$ и $q \times v_n < \gamma_{m-1,1}$, то положить m равным $(m-1)$.

Заключение

С помощью описанной схемы получены коэффициенты многочленов устойчивости до степени $m=27$, и построены соответствующие методы первого порядка точности. Известно, что максимальная длина интервала устойчивости m -стадийного метода типа Рунге-Кутты первого порядка точности равна $2m^2$. В результате на каждое вычисление правой части приходится $2m$ единиц длины интервала устойчивости. Это означает, что если шаг ограничен по устойчивости, то с ростом m эффективность метода возрастает. Построенный здесь алгоритм интегрирования жестких задач с переменным числом стадий на основе методов первого порядка позволяет существенно повысить эффективность расчетов на участке установления решения, где шаг ограничен по устойчивости.

Литература:

1. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи: монография / Э. Хайрер, Г. Ваннер. — М.: Мир, 1999. — 685 с.

2. Новиков Е.А. Явные методы для жестких систем: монография / Е.А.Новиков. — Новосибирск: Наука, 1997. — 197 с.
3. Новиков А.Е. L-устойчивый (2,1)-метод решения жестких неавтономных задач / А.Е. Новиков, Е.А.Новиков // Вычислительные технологии. — 2008. — № 13. — с. 477–482.
4. Новиков Е.А. Алгоритм интегрирования жестких систем на основе (m,k)-метода второго порядка точности с численным вычислением матрицы Якоби / Е.А. Новиков, Ю.А. Шитов // Красноярск: Препринт ВЦ СО АН СССР № 20. — 1988. — 23 с.
5. Новиков Е.А. Численный алгоритм построения многочленов устойчивости методов первого порядка / Е.А.Новиков, М.В. Рыбков // Вестник Бурятского государственного университета. — 2014. — № 9-2. — с. 80–85.

Параллельная реализация алгоритма для описания термоупругих волн в жидких кристаллах

Смолехо Ирина Владимировна, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

Жидкие кристаллы являются уникальными веществами благодаря необычному сочетанию анизотропных свойств, присущих кристаллам, и текучести, свойственной жидкостям. Жидкие кристаллы состоят из сложных органических молекул продолговатой формы. От обычных кристаллов они отличаются отсутствием жесткой кристаллической решетки. Общим свойством всех кристаллов является наличие порядка в пространственной ориентации молекул. В зависимости от порядка пространственной ориентации жидкие кристаллы делятся на три вида: нематические, смектические и холестерические. Подвижность молекул жидких кристаллов позволяет воздействием внешних сил изменять их ориентацию и таким образом управлять их свойствами. С помощью жидких кристаллов обнаруживают пары вредных химических соединений и опасные для здоровья человека гамма- и ультрафиолетовое излучения. На основе жидких кристаллов созданы измерители давления, детекторы ультразвука. Обширная область применения жидкокристаллических веществ — информационная техника: электронные часы, цветные телевизоры с жидкокристаллическим экраном и т.п. Физические свойства жидких кристаллов описаны, например, в [1, 2].

В данной работе рассматриваются нематические жидкие кристаллы, молекулы которых ориентированы в определенном направлении. Разработана параллельная программа для вычислительных систем на графических ускорителях, позволяющая исследовать численно математическую модель термомеханического поведения жидких кристаллов. В работе [3] построена упрощенная модель нематического жидкого кристалла как акустической микронеоднородной среды с вращающимися частицами. В [4, 5] представлено обобщение этой модели на случай вязкоупругих деформаций при произвольных по величине поворотах частиц.

Основная система уравнений модели жидкого кристалла в акустическом приближении в двумерном случае выглядит следующим образом (см. [3]):

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}, & \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}, & j \frac{\partial \omega}{\partial t} &= 2q, & \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t} &= -k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta \frac{\partial T}{\partial t}, & \frac{\partial q}{\partial t} &= \alpha \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} - 2\omega \right), \\ c \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \beta T \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \end{aligned} \tag{1}$$

где u и v — компоненты вектора скорости; ω — угловая скорость; φ — угол поворота молекул кристалла; p — гидростатическое давление; q — касательное напряжение; T — абсолютная температура; ρ — плотность; j — момент инерции; k — модуль объемного сжатия; α — модуль упругого сопротивления вращению; β — коэффициент теплового расширения; c — удельная теплоемкость; κ_{11} , κ_{12} и κ_{22} — компоненты тензора теплопроводности:

$$\kappa_{11} = \kappa_1 \cos^2 \varphi + \kappa_2 \sin^2 \varphi, \quad \kappa_{12} = (\kappa_1 - \kappa_2) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \kappa_{22} = \kappa_1 \sin^2 \varphi + \kappa_2 \cos^2 \varphi,$$

κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности в направлении ориентации молекул жидкого кристалла и в поперечном направлении; x , y и t — пространственные переменные и время. В систему (1) входят уравнения поступательного и вращательного движения, уравнение для угла поворота, уравнения состояния для давления и касательного напряжения, уравнение анизотропной теплопроводности с переменными коэффициентами.

Численное решение краевых задач для системы (1) осуществляется с помощью метода двуциклического расщепления по пространственным переменным [6]. Рассматривается расчетная область в форме квадрата. Искомыми величинами являются скорости и напряжения, а также угловая скорость и температура внутри расчетной области.

В двумерном случае на каждом временном интервале $(t_0, t_0 + \Delta t)$ расщепление включает в себя 5 этапов: решение одномерных подсистем уравнений акустики жидкого кристалла и связанных уравнений теплопроводности в направлениях x и y на полуинтервале по времени $(t_0, t_0 + \Delta t/2)$; пересчет величин q , ω и φ по схеме Кранка-Николсон; повторный пересчет в направлениях y и x на втором полуинтервале $(t_0 + \Delta t/2, t_0 + \Delta t)$.

На этапах расщепления одномерные задачи решаются с использованием конечно-разностной схемы типа “предиктор—корректор” в следующей последовательности: сначала реализуется шаг “предиктор” для подсистемы уравнений акустики, затем решается уравнение теплопроводности, и в заключение выполняется шаг “корректор” матричной системы, правая часть которой зависит от температуры. Конечно-разностная схема, построенная по принципу схемы С.К. Годунова [7], применяется при решении акустических уравнений; схема Г.В. Иванова с контролируемой диссипацией энергии [8] — при решении уравнения теплопроводности. Температура в каждом направлении вычисляется с помощью трехточечной прогонки. Схема является неявной на шаге “предиктор” и явной на шаге “корректор”. Такая конструкция метода расщепления обеспечивает устойчивость численного решения в двумерном случае.

На 1-м и 5-м этапах метода расщепления считается, что искомое решение зависит только от x , и система уравнений (1) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial x} - \beta T \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_1 = \kappa_{11} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Аналогично на 2-м и 4-м этапах, когда решение зависит только от y , получим систему:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial y} + \beta \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial y} - \beta T \frac{\partial v}{\partial y}, \quad f_2 = \kappa_{12} \frac{\partial T}{\partial x} + \kappa_{22} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

На 3-м этапе метода расщепления решается система уравнений:

$$j \frac{\partial \omega}{\partial t} = 2q, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -2\alpha \omega.$$

Таким образом, на этапах расщепления решаются уравнения акустики жидкого кристалла и уравнения теплопроводности.

Аппроксимируем уравнения этих систем на каждом временном слое заменой производных по времени и пространственным переменным конечными разностями. Для подсистемы уравнений акустики на шаге “предиктор” вычисляются следующие величины в направлении x :

$$u_{j^1, j^2 - \frac{1}{2}} = \frac{u_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} + u_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2} + \frac{p_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} - p_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2},$$

$$p_{j^1, j^2 - \frac{1}{2}} = \frac{p_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} + p_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2} + \frac{u_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} - u_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2}, \quad (2)$$

$$v_{j^1, j^2 - \frac{1}{2}} = \frac{v_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} + v_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2} + \frac{q_{j^1 + \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}} - q_{j^1 - \frac{1}{2}, j^2 - \frac{1}{2}}}{2\sqrt{\alpha}},$$

$$q_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}} = \frac{q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + q_{j_1 + \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}}}{2} + \sqrt{\alpha} \frac{v_{j_1 + \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}}}{2},$$

а в направлении y :

$$\begin{aligned} u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} &= \frac{u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2} + \frac{q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2\sqrt{\alpha}}, \\ q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} &= \frac{q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2} + \sqrt{\alpha} \frac{u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2}, \\ v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} &= \frac{v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2} + \frac{p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2}, \\ p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} &= \frac{p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2} + \frac{v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}}}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Соотношения шага “корректор” в направлении x :

$$\begin{aligned} u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2h_1} \left(p_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}} - p_{j_1 - 1, j_2 - \frac{1}{2}} \right), \\ v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2h_1} \left(q_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}} - q_{j_1 - 1, j_2 - \frac{1}{2}} \right), \\ p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2h_1} \left(u_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}} - u_{j_1 - 1, j_2 - \frac{1}{2}} \right) + \beta \left(T_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - T_{j_1 - 1, j_2 - \frac{1}{2}} \right), \\ q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + \alpha \frac{\tau}{2h_1} \left(v_{j_1, j_2 - \frac{1}{2}} - v_{j_1 - 1, j_2 - \frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \tag{4}$$

в направлении y :

$$\begin{aligned} u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2h_1} \left(q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} - q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - 1} \right), \\ v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 + \frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2h_2} \left(p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} - p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - 1} \right), \\ p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= p_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2h_2} \left(v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} - v_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - 1} \right) + \beta \left(T_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - T_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - 1} \right), \\ q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \alpha \frac{\tau}{2h_1} \left(u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2} - u_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - 1} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

(здесь h_1 и h_2 — шаги пространственной сетки в направлениях x и y , $\tau/2$ — полушаг по времени, верхние индексы относятся к следующему временному слою).

Схема Кранка-Николсон реализуется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= \frac{j - \tau^2 \alpha}{j + \tau^2 \alpha} q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} - \frac{2\tau \alpha j}{j + \tau^2 \alpha} \omega_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}}, \\ \omega_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} &= \omega_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + \frac{\tau}{j} \left(q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} + q_{j_1 - \frac{1}{2}, j_2 - \frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\varphi^{j^{1-\frac{1}{2}}, j^{2-\frac{1}{2}}} = \varphi_{j^{1-\frac{1}{2}}, j^{2-\frac{1}{2}}} + \frac{\tau}{2} \left(\omega^{j^{1-\frac{1}{2}}, j^{2-\frac{1}{2}}} + \omega_{j^{1-\frac{1}{2}}, j^{2-\frac{1}{2}}} \right).$$

Уравнение анизотропной теплопроводности с переменными коэффициентами решается также с помощью схемы «предиктор-корректор». На шаге «корректор» в каждом из направлений используются уравнения:

$$\frac{T^j - T_j}{\tau/2} = \frac{f_{j+1/2} - f_{j-1/2}}{h}, \quad f_j = \kappa \frac{T_{j+1/2} - T_{j-1/2}}{h} + g_j, \quad (7)$$

а на шаге «предиктор» — уравнения:

$$-\left(\frac{a\kappa_j}{h} - \frac{1}{2} \right) T_{j+1/2} + \left(1 + \frac{a}{h} (\kappa_j + \kappa_{j-1}) \right) T_{j-1/2} - \left(\frac{a\kappa_{j-1}}{h} - \frac{1}{2} \right) T_{j-3/2} = T_j + T_{j-1} + a(g_j - g_{j-1}), \quad (8)$$

$$2af_{j-\frac{1}{2}} = \left(\frac{a\kappa_j}{h} - \frac{1}{2} \right) T_{j+\frac{1}{2}} - \frac{a(\kappa_j - \kappa_{j-1})}{h} T_{j-\frac{1}{2}} - \left(\frac{a\kappa_{j-1}}{h} - \frac{1}{2} \right) T_{j-\frac{3}{2}} + T_j - T_{j-1} + a(g_j + g_{j-1}). \quad (9)$$

Вторые индексы здесь для краткости опущены; h — шаг по пространству, в зависимости от направления в качестве f_j принимается f_1 или f_2 (это потоки, содержащие смешанные производные); κ — коэффициент теплопроводности (κ_{11} или κ_{22}); величины g_j находятся по явной схеме через значения входящих в них переменных, взятых с предыдущего слоя по времени (сюда входят смешанные производные с коэффициентом κ_{12}). Температура в каждом направлении вычисляется с помощью метода трехточечной прогонки. Схема (7)–(9) является неявной на шаге «предиктор» и явной на шаге «корректор». Условие устойчивости схемы: $\tau \leq ah$, где $a = b + \tau/h$, $b \geq 0$.

Описанный вычислительный алгоритм для решения системы уравнений (1) по формулам (2)–(9) реализован в виде параллельной программы для компьютеров с графическими ускорителями. Программа написана на языке Си с применением технологии CUDA (Compute Unified Device Architecture) для распараллеливания вычислений, позволяющей использовать графические ускорители видеокарт [9, 10]. Распараллеливание вычислений производится на этапах метода расщепления.

Для решения задач CUDA использует очень большое количество параллельных нитей, каждой из них соответствует один элемент вычисляемых данных. Фактически для каждого допустимого индекса входных массивов запускаем отдельную нить для осуществления нужных вычислений. Все они выполняются параллельно, и каждая может получить информацию о себе через встроенные переменные. Исходная задача разбивается на набор отдельных подзадач. Каждой подзадаче соответствует свой блок нитей.

На GPU (Graphical Processing Unit) расчетная область разбивается на квадратные блоки, содержащие одинаковое число нитей. Благодаря идентификаторам, имеющимся в CUDA, каждой нити ставится в соответствие ячейка разностной сетки. В параллельном режиме нити графического устройства выполняют однотипные операции в ячейках по расчету решения на шаге «предиктор» и после этого на шаге «корректор» схемы.

Верхний уровень иерархии в CUDA — сетка (*grid*) — соответствует всем нитям, выполняющим ядро. Следующий уровень — двумерный массив блоков (*block*). Каждый блок представляет собой двумерный массив нитей (*thread*). Все блоки, образующие сетку, имеют одинаковую размерность и размер. Каждый блок в сетке имеет свой адрес, состоящий из двух натуральных чисел. Также и каждая нить имеет двухзначный индекс. Так как одно и то же ядро выполняется одновременно с большим количеством нитей, для их определения используются встроенные переменные: *threadIdx*, *blockIdx* — двумерные целочисленные векторы; *gridDim*, *blockDim* — переменные, используемые для определения размеров сетки и блока.

В начале программы на CPU (Central Processing Unit) задаются размерности конечно-разностной сетки и все необходимые константы, описываются одномерные массивы и задаются начальные данные. Одновременно на GPU выделяется память под массивы для этих величин и всех необходимых вспомогательных величин. Затем необходимые константы и массивы копируются с CPU на GPU. На каждом шаге по времени последовательно реализуются этапы метода расщепления. На этапах расщепления графическим устройством выполняются все необходимые ядра (процедуры) в параллельном режиме. Для анализа результатов счета в контрольных точках по времени решение передается с GPU на CPU, и по полученным файлам данных рисуются линии уровня искомым величин графическими средствами персонального компьютера. После выполнения каждого из ядер производится барьерная синхронизация, чтобы обеспечить завершение вычислений каждой нитью до начала выполнения следующего ядра.

Проведена серия методических расчетов динамического деформирования жидких кристаллов при слабых механических и температурных воздействиях, демонстрирующих работу программы. На рис. 1 показаны результаты счета для

задачи о действии трех П-образных и Л-образных импульсов давления в нормальном направлении на части левой границы расчетной области в виде квадрата. Остальные части границы области считаются свободными от напряжений. Нагрузка действует некоторое время, а потом граница полностью освобождается от напряжений. Разностная сетка состоит из 1024×1024 ячеек.

Далее представлены численные результаты для задачи с заданной внутри всей расчетной области температурой T_0 в начальный момент времени и нулевыми граничными условиями для всех величин. Расчеты проведены для разных коэффициентов теплопроводности: $\kappa_1 = 5\kappa_2$, угол поворота молекул жидкого кристалла $\varphi = \pi/4$. На рис. 2 видно, что линии уровня температуры вытягиваются в направлении ориентации молекул.

Рис. 3 показывает, как распространяются волны давления и как они отражаются друг от друга.

На рис. 4 представлены результаты расчетов для задачи о действии четырех источников тепла на нижней границе расчетной области (в нормальном направлении). Область действия каждого источника тепла — 10 см (при длине стороны квадрата 1 м). Видно, что линии уровня температуры ориентируются под заданным углом φ .

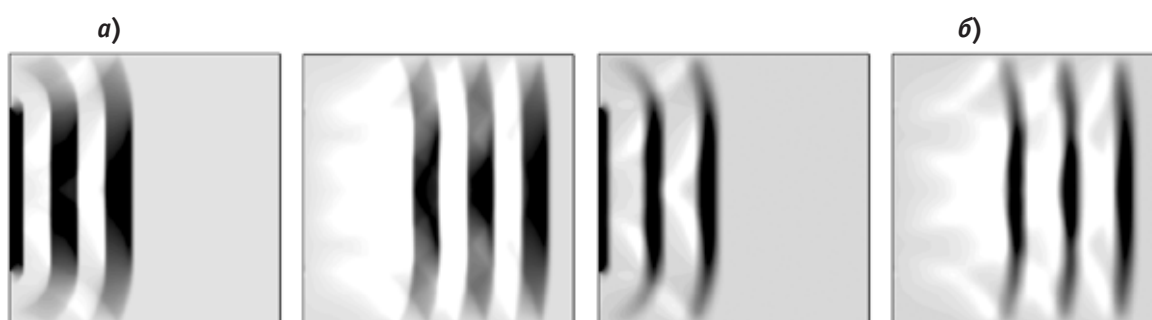


Рис. 1. П-образные а) и Л-образные б) импульсы давления на части левой границы: линии уровня давления p (250 и 500-й шаги по времени — слева направо)

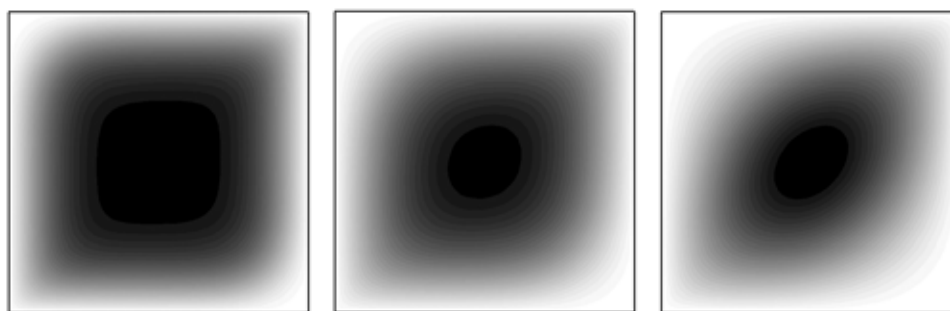


Рис. 2. Заданная начальная температура: линии уровня температуры T (100, 200 и 500-й шаги по времени — слева направо)

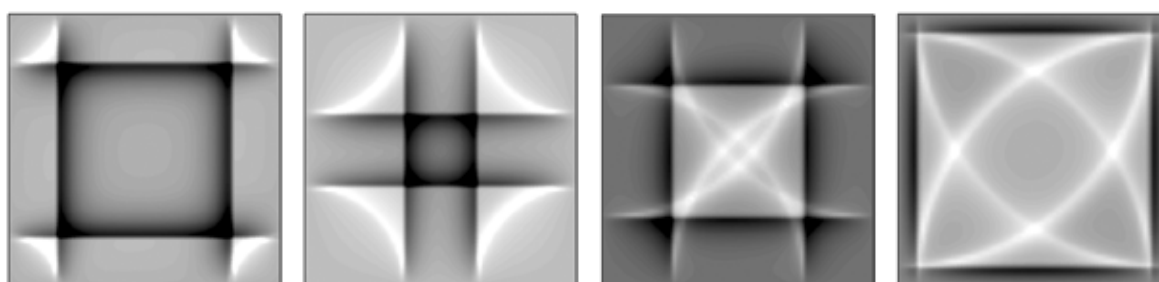


Рис. 3. Заданная начальная температура: линии уровня давления p (100, 200, 400 и 500-й шаги по времени — слева направо)

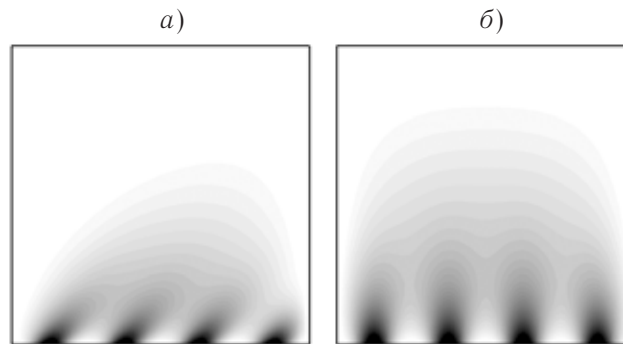


Рис. 4. Источники тепла на нижней границе: линии уровня температуры T при коэффициентах теплопроводности $\kappa_1 = 5\kappa_2$ и углах поворота $\varphi = \pi/4$ и $\pi/2$ (1000-й шаг по времени)

Расчеты выполнены на высокопроизводительном вычислительном сервере Flagman ИВМ СО РАН. Численно исследована эффективность работы программы. Проведено большое количество расчетов при разных размерностях сетки. Время счета параллельной программы сравнивалось со временем счета соответствующей последовательной программы. В расчетах зафиксировано ускорение работы параллельной программы примерно в 25 раз по сравнению с последовательной версией.

Литература:

1. Калугин А.Г. Механика анизотропных жидкостей. — М.: Изд-во Центра прикладных исследований при мех.-мат. ф-те МГУ, 2005. — 64 с.
2. Blinov L.M. Structure and Properties of Liquid Crystals. Heidelberg — New York — Dordrecht — London: Springer, 2011. — 439 p.
3. Садовский В.М., Садовская О.В. Об акустическом приближении термомеханической модели жидкого кристалла // Физическая мезомеханика, 2013. — Т. 16, № 3. — с. 55–62.
4. Sadvovskii V.M. Equations of the dynamics of a liquid crystal under the influence of weak mechanical and thermal perturbations // AIP Conf. Proc, 2014. — V. 1629. — P. 311–318.
5. Sadvovskaya O.V. Numerical simulation of the dynamics of a liquid crystal in the case of plane strain using GPUs // AIP Conf. Proc, 2014. — V. 1629. — P. 303–310.
6. Марчук Г.И. Методы расщепления. — М.: Наука, 1988. — 263 с.
7. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
8. Иванов Г.В., Волчков Ю.М., Богульский И.О., Анисимов С.А., Кургузов В.Д. Численное решение динамических задач упругопластического деформирования твердых тел. — Новосибирск: Сиб. унив. изд-во, 2002. — 352 с.
9. Боресков А.В., Харламов А.А. Основы работы с технологией CUDA. — М.: ДМК Пресс, 2010. — 232 с.
10. Farber, R. CUDA Application Design and Development. Amsterdam — Boston — Heidelberg — London — New York — Oxford — Paris — San Diego — San Francisco — Singapore — Sydney — Tokyo: Morgan Kaufmann / Elsevier, 2011. — 315 p.

Математическое моделирование коррупционных систем и процессов (обзор)

Старева Ирина Александровна, магистрант;
Еременко Владимир Романович, студент
Санкт-Петербургский государственный университет

В работе дан обзор работ по математическому моделированию коррупционных схем и процессов, решенным математическим задачам и перспективным подходам, позволяющим описывать коррупционные потери общества.

Ключевые слова: социум, коррупция, конкуренция, математическое моделирование.

Коррупция представляет собой социально-экономическое явление, в большинстве стран мира вызванное злоупотреблением должностными обязанностями в личных корыстных целях или в интересах определенных групп [88]. Коррупционные действия охватывают, как правило, все сферы жизни общества, создавая коррупционные объединения [8, 13, 53]. Как явление коррупция любого уровня представляет опасность для общества, может создавать и угрозу безопасности государства. Адекватные модели коррупции позволяют дать прогноз о направлениях ее распространения и о возможных мерах, принятие которых позволило бы ее ограничить. На сегодняшний день большинство исследований основывается не на криминальной статистике, а на социологических исследованиях. Поэтому значительное число разработанных моделей, прежде всего математических, трудно сопоставить с реальными статистически данными. Тем не менее на основе анализа результатов решения математических задач можно оценить ущерб от коррупционной деятельности и предложить варианты управленческих решений по ограничению коррупции. При разработке математических моделей коррупции широко используется аппарат математической теории игр, методы и формализм теории потоков в сетях с учетом мультиагентности и сетевости систем управления. Ниже дан краткий обзор поставленных и решенных математических задач для различных коррупционных схем.

В работе [76] формализуется многоагентная модель оптимального размещения коррупционеров-поставщиков в узлах коррупционной сети. Рассмотрен численный пример, для которого найдено компромиссное решение и равновесие Курно-Нэша. В данном формате потери, обусловленные ошибками управления в оригинальной модели, интерпретируются как потери, возникающие вследствие действий агентов-коррупционеров. В [59, 74] формализуется модель многоагентного взаимодействия коррупционных структур, с группами по борьбе с коррупцией (иначе антикоррупционных подразделений). Коррупционные структуры желают реализовать коррупционную стратегию, например, с целью преступного присвоения бюджетных средств. Антикоррупционные подразделения стремятся реализовать антикоррупционную стратегию

противодействия. Предполагается, что каждая группа по борьбе с коррупцией может реализовать свою антикоррупционную деятельность только в отношении одной коррупционной структуры, а каждая коррупционная структура может работать только с одной группой по борьбе с коррупцией. В работе решается задача оптимального использования антикоррупционных подразделений для случая компромиссного решения, выбранного в качестве принципа оптимальности. В [60, 77] рассматривается многошаговая теоретико-игровая модель аукциона первой цены с возможным возникновением коррупции. Формализуется игра с конечным числом заказчиков, выставяющих на торги каждый свой контракт, а также конечное число фирм-исполнителей, которые реализуют данный контракт. Фирмы-исполнители готовы выполнить условия контракта, имея свои оценки по издержкам, и конкурируют за контракты посредством аукциона первой цены.

В [73] исследуется коррупционная сеть в рамках некоего социума. Все коррупционеры в данной модели разбиваются на три группы: коррупционеры-поставщики коррупционных услуг, которые продают коррупционные услуги (продажа мест в государственной думе или парламенте, получение лицензий и т. д.), потребители коррупционных услуг, которые покупают коррупционные услуги, у коррупционеров-поставщиков коррупционных услуг, коррупционеры-посредники, благодаря которым осуществляется контакт между коррупционерами потребителями коррупционных услуг и коррупционерами-поставщиками коррупционных услуг. Кроме того, имеются некоторые источники коррупционных услуг, которые можно представить как совокупность навыков в добыче коррупционных услуг и их передаче. Эти ресурсы могут представлять деньги и навыки. Коррупционеры-поставщики, поставляющие коррупционные услуги, желают разместиться в узлах сети наиболее выгодным для них образом с точки зрения максимизации получаемого дохода от продажи и производства этих коррупционных услуг.

В [75] формализуется и исследуется двухпериодная модель многоагентного взаимодействия между поставщиками коррупционных услуг, стремящимися увеличить свой коррупционный капитал путем внедрения в имеющуюся

коррупционную сеть коррумпированных работников различных структур, как федерального уровня, так и частного сектора. Вначале эти агенты, стремящиеся вступить в коррупционную сеть в рассматриваемой сфере деятельности, выбирают область, в которой они намерены предложить свои коррупционные услуги и время исполнения этих услуг. Далее все поставщики коррупционных услуг выбирают объемы этих коррупционных услуг, предлагаемых возможным потребителям. Коррупционеры-поставщики предлагают однотипные коррупционные услуги. В результате совместного выбора предлагаемых коррупционных услуг устанавливается цена, которая обладает следующим свойством: чем больше предоставляемый срок на выполнение коррупционной услуги, тем она ниже, и наоборот. Далее вычисляются прибыли коррупционеров-поставщиков во втором периоде. Для данной модели могут быть найдены равновесные ситуации в смысле Курно-Нэша, а также компромиссное решение.

В [94] формализована и исследована модель коррупционных цепей на основе электросетевых аналогов. Предложены алгоритмы нахождения равновесия Курно-Нэша и компромиссного решения для этой сети. Решен численный пример. Моделируются процессы динамики коррупционных услуг, через цепи коррумпированных агентов. Возможности борьбы с коррупционной экономической деятельностью ограничиваются как ее скрытым характером, так и масштабами распространения, и, соответственно, нехваткой ресурсов для её выявления. В этой связи выработка достаточно надежных критериев оценки, основанных на косвенных признаках коррумпированности, приобретает особую актуальность. В работе [84] предложены вероятностные критерии оценки коррупционной экономической деятельности, основанные на косвенных признаках коррумпированности. В [61] формализованы и исследованы модели многоагентного управления в коррупционных сетях социума. Предложены алгоритмы нахождения равновесия Курно-Нэша и компромиссного решения в этих моделях. Кроме остаточного срока службы, эксплуатационных расходов и нормативного коэффициента эффективности капитальных вложений в расчеты вводят исходные данные и показатели, которые на реконструкцию отдельного здания не могут оказать сколько-нибудь значительного влияния при решении вопроса о целесообразности реконструкции.

В [27] предлагается методика оптимизации прибыли инвестора, рассматривается частный случай динамической модели, когда инвестором является крупная строительная фирма. Задача выбора определенной стратегии реализации проекта по созданию инновационного продукта достаточно сложна, ввиду того что каждый фактор может оказывать как положительное, так и отрицательное влияние на его ход. В работе [20] представлена неформальная постановка задачи построения и анализа стохастической модели принятия решений о выводе нового продукта на рынок и формализация данной задачи. Динамическая модель развития организации, осуществляющей инновационную деятельность, под действием как нега-

тивных, так и позитивных факторов в конкурентной среде рассматривается в [21]. Предполагается, что владелец организации заинтересован в получении максимальной прибыли на конечном промежутке времени, действует с учетом своих интересов и желает найти оптимальную стратегию реализации инноваций.

В [78] в терминах теории сетевых игр в работе построена и исследована модель n -агентного взаимодействия. Для случая числа агентов в модели равно 5 и трехагентного взаимодействия между ними построен численный пример, для которого найдено компромиссное решение. В [35, 36] формализуются в виде марковского процесса со специальными свойствами динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия, состоящие из экономически и социально равноправных активных элементов (например, экономических единиц, отдельных государств и т. д.).

В [22] рассматривается многошаговый процесс на древовидном графе G , в каждой вершине которого реализуется задача почтальона на полном графе G с участием конечного числа агентов, обеспечивающих движение почтальона по имеющимся маршрутам, и с переменной матрицей нагрузок на ребра графа G в зависимости от шага. В качестве принципа оптимальности в этой модели принимается компромиссное решение. Задача конкурентного управления со многими участниками, моделирующая сравнительно узкий класс конфликтных процессов купли-продажи аукционного типа рассматривается в [24]. В работе построена модель конкурентного управления со многими продавцами. Формализуется динамическая конкурентная модель управления аукционом с конечным числом покупателей и конечным числом продавцов. Найдено решение в виде компромиссной точки для указанной модели. Используется закрытый тип аукциона — аукцион первой цены. Обобщение двухпериодной модели Диксита вхождения в рынок двух фирм приведено в [28]. В модели Диксита функции предельных затрат предполагались постоянными, а функция ценообразования — линейной от количества товара, поставляемого на рынок двумя фирмами. Данная модель обобщается на случай нескольких периодов и нескольких игроков, кроме того, функции предельных затрат предполагаются функциями количества товара, они убывают и выпуклы вниз, а функция ценообразования считается нелинейной. Такое обобщение более точно описывает процессы в экономике, оно учитывает возрастающую отдачу от производства и нелинейность ценообразования. В условиях нестабильности рыночной экономики и повышенной волатильности на рынках жилой недвижимости важной задачей является хеджирование инвестиционных строительных рисков путем оптимального распределения денежных средств между проектами различных степеней риска и доходности.

В [65] сформулирована модель многоагентного взаимодействия конкурирующих инвестиционных строительных компаний. Предложена схема нахождения гарантированного дохода компании и оптимизации портфеля проектов, основанная на методе динамического программирования

Беллмана. В рассматриваемой модели учитывается, что компания имеет возможность продать свою часть в венчурном проекте в зависимости от текущей экспертной оценки доходности данного проекта. В [23] предложены методы решения динамической многокритериальной задачи почтальона. Доказано существование решения этой задачи. В качестве принципа оптимальности в этой модели принимается компромиссное решение.

В [31] авторы рассмотрели правомерность разработки математического аппарата геополитических исследований, учитывая глобальный статус современной геополитики и ее акторов — государств, союзов государств и геочивилизаций. Дано описание многокритериальной динамической задачи нахождения оптимальной траектории развития геополитических процессов с учетом конфликтного взаимодействия этих акторов с необходимостью формализации их геополитического потенциала. Предложен аппарат теории игр, применимой, в частности, при анализе международных отношений, а также методы моделирования глобальной геополитической динамики. В работе [3] исследуется модель поиска при условии, что преследователь располагает ограниченной информацией относительно убегающего. Рассмотрен случай, когда преследователю достоверно не известна скорость убегающего, но известен диапазон ее изменения. Предлагается алгоритм вычисления времени поиска.

В [58] рассматривается множество антикоррупционных групп, которые необходимо распределить наилучшим в некотором смысле образом, назначив их на предупреждение или ликвидацию в процессе проведения антикоррупционных мероприятий против некоторых коррупционных структур или лиц. Для организации противодействия деятельности каждой коррупционной структуры достаточно сил одной антикоррупционной группы. Требуется произвести назначение оптимальным образом. В качестве множества можно рассмотреть также множество антикоррупционных проектов по организации мероприятий противодействия коррупционным структурам. В работе [2] исследуется игровая модель поиска со многими участниками, когда преследователь располагает ограниченной информацией об одном или нескольких убегающих. Рассмотрен случай, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего, и он может только делать предположения о выбранной скорости. Предлагается алгоритм вычисления времени поиска. Исследован случай нескольких преследователей и нескольких убегающих.

Вопросы математического моделирования развития компании рассматриваются в [80]. Математическое моделирование сложных систем, вопросы существования обобщенного значения динамической игры, а также аппарат теории игр, используемый для реализации представленных в работах моделей, рассмотрены в [11, 55, 67, 92, 93]. Сфера жилищно-коммунального хозяйства является одной из наиболее коррумпированных. Вопросы реконструкции жилищно-коммунального хозяйства мегаполиса в условиях конкурентной среды представлены в [1,

26, 63]. Математическое и компьютерное моделирование на уровне многоагентного взаимодействия, моделирование систем конкуренции и кооперации, математические модели конфликтных ситуаций в социально-экономических системах рассмотрены в [37, 66, 69, 70]. Устойчивость в конфликтно-управляемых системах исследована в [56, 79]. Математическое моделирование в сфере агропромышленного производства формализовано в [89]. Моделирование процессов страхования и коррупции при заключении контрактов рассмотрено в [25, 68].

Вопросы динамики развития отрасли чистой конкуренции, конкурентная линейная модель экономики и территориальная диффузия капитала рассмотрены в [33, 64, 71]. Оптимизация и прогноз в динамической модели управления портфелем ценных бумаг, построение механических систем скальпирующего типа рассмотрены в [72, 83]. Конкурентные механизмы распределения ресурсов рассмотрены в [14, 62]. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и равновесие в дифференциальных бескоалиционных играх исследованы в [54, 57].

Для описания коррупционных явлений можно использовать и методы построения моделей в задачах популяционной биологии и социальной самоорганизации, основывающиеся на различных взаимоотношениях между биологическими сообществами и социальными группами [7, 9, 10, 12, 16, 17, 32, 40–49, 52, 82, 85, 87, 90]. Коррупционная система может быть представлена как элемент системы «власть-общество» [48, 81]. Как отмечено в [48] объем коррупционных преступлений во времени может быть описан в первом приближении логистической зависимостью. Аналогичной зависимостью описываются и экспериментальные данные по кинетике роста растений [50, 51], статистические характеристики некоторых социальных групп [52], расчетные зависимости в некоторых моделях для живых систем [18, 29, 30]. Поэтому для описания коррупционных явлений можно использовать и методы построения моделей в задачах популяционной биологии и социальной самоорганизации, основывающиеся на различных типах взаимоотношениях между биологическими сообществами и социальными группами [16, 19, 34]. Коррупционная система может быть представлена и как неизлечимое заболевание или как орган живой функциональной системы, работающий только при поступлении в него питательных веществ [4–6, 15, 29, 30, 39, 91, 97]. Она может рассматриваться и как биологическое сообщество, являющееся, например, хищником по отношению к социальному сообществу [16]. Последнее можно рассматривать как сообщество, находящееся под влиянием внешних «агрессивных» сред [19, 34, 38, 86, 95, 96].

Несмотря на большое разнообразие математических моделей коррупционных схем и процессов, их сопоставление с реальными статистическими данными затруднено в силу недостатка последних. Тем не менее, с помощью математических моделей можно оценить как наиболее опасные коррупционные схемы, так и возможные материальные и моральные потери общества.

Литература:

1. Акуленкова, И. В., Дроздов Г. Д., Малафеев О. А. Проблемы реконструкции жилищно-коммунального хозяйства мегаполиса / И. В. Акуленкова, Г. Д. Дроздов, О. А. Малафеев; Министерство образования и науки Российской Федерации, Федеральное агентство по образованию, Санкт-Петербургский государственный университет сервиса и экономики. Санкт-Петербург, 2007.
2. Алферов, Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С. Динамическая модель проведения инспекций // Процессы управления и устойчивость. — 2014. — Т. 1. № 1. — с. 434–439.
3. Алферов, Г. В., Малафеев О. А., Мальцева А. С. Модель проведения антикоррупционных инспекций, в сборнике: управление социально-экономическим развитием регионов: проблемы и пути их решения / Сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А. Юго-Западный государственный университет. Курск, 2014. — с. 20–24.
4. Балыкина, Ю. Е., Колпак Е. П. Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — с. 20–31.
5. Балыкина, Ю. Е., Колпак Е. П. Модель роста фолликулярной клетки щитовидной железы / В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2013) сборник трудов VI международной конференции. 2013. — с. 31–32.
6. Балыкина, Ю. Е., Колпак Е. П. Точечная однокамерная модель функционирования фолликула щитовидной железы / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятые Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др.. Тверь, 2013. — с. 157–158.
7. Басков, О. В. Критерий непротиворечивости «квантов» информации о нечетком отношении предпочтения лица, принимающего решения // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2014. — № 2. — с. 12–18.
8. Бочарова, А. Э. Коррупция в России // Молодой ученый. — 2014. — № 21 (80). — с. 499–501.
9. Буре, А. В. Об одной теоретико-игровой модели тендера // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 25–32.
10. Буре, В. М., Екимов А. В., Свиркин М. В. Имитационная модель формирования профиля мнений внутри коллектива // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 93–98.
11. Буре, В. М., Малафеев О. А. Согласованная стратегия в повторяющихся конечных играх N лиц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1: Математика. Механика. Астрономия. — 1995. — № 1. — с. 120.
12. Валиотти, Н. А. Нейросетевая модель для дифференцированной оценки влияния одновременных внешних событий в сфере розничной торговли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 2. — с. 93–98.
13. Вершинина, Е. С. Коррупционная составляющая государственных закупок // Молодой ученый. — 2015. — № 3 (83). — с. 626–630.
14. Выселка, А. А., Малафеев О. А. Динамическая модель распределения ресурсов по регионам при конфликтном взаимодействии / В сборнике: Материалы научно-практической конференции, посвященной памяти В. И. Зубова. 2002. — с. 64–82.
15. Гасратова, Н. А., Бойцов Д. С., Габриелян Л. А., Тюганова Т. М. Математическая модель иммунного ответа организма млекопитающих на поражение кожи ожогом // Молодой ученый. — 2014. — № 12 (71). — с. 1–7.
16. Гасратова, Н. А., Столбовая М. В., Бойцов Д. С., Степанова Д. С. Математическая модель хищник-жертва на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 11. — с. 1–10.
17. Гасратова, Н. А., Столбовая М. В., Неверова Е. Г., Бербер А. С. Математическая модель «ресурс-потребитель» // Молодой ученый. — 2014. — № 10 (69). — с. 5–14.
18. Горбунова, Е. А., Колпак Е. А. Математические модели одиночной популяции // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2012. — № 4. — с. 18–30.
19. Горбунова, М. В., Колпак Е. П., Крицкая А. В. Математическая модель антропогенного воздействия на одиночную популяцию / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятые Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др. Тверь, 2013. — с. 165.
20. Гордеев, Д. А., Малафеев О. А., Титова Н. Д. Стохастическая модель принятия решения о выводе на рынок инновационного продукта // Вестник гражданских инженеров. — 2011. — № 2. — с. 161–166.

21. Гордеев, Д. А., Малафеев О. А., Титова Н. Д. Probabilistic and deterministic model of the influence factors on the activities of the organization to innovate // Экономическое возрождение России. — 2011. — № 1. — с. 73–82.
22. Григорьева, К. В., Малафеев О. А. Динамический процесс кооперативного взаимодействия в многокритериальной (многоагентной) задаче почтальона // Вестник гражданских инженеров. — 2011. — № 1. — с. 150–156.
23. Григорьева, К. В., Малафеев О. А. Методы решения динамической многокритериальной задачи почтальона // Вестник гражданских инженеров. — 2011. — № 4. — с. 156–161.
24. Грицай, К. Н., Малафеев О. А. Задача конкурентного управления в модели многоагентного взаимодействия аукционного типа // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. — 2007. — № 39. — с. 36–45.
25. Дроздов, Г. Д. Моделирование многоагентного взаимодействия процессов страхования / Г. Д. Дроздов, О. А. Малафеев; М-во образования и науки Российской Федерации, Санкт-Петербургский гос. ун-т сервиса и экономики. Санкт-Петербург, 2010.
26. Дроздова, И. В., Малафеев О. А., Дроздов Г. Д. Моделирование процессов реконструкции жилищно-коммунального хозяйства мегаполиса в условиях конкурентной среды, монография / Федеральное агентство по образованию, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет. Санкт-Петербург, 2008.
27. Дроздова, И. В., Малафеев О. А., Паршина Л. Г. Эффективность вариантов реконструкции городской жилой застройки // Экономическое возрождение России. — 2008. — № 3. — с. 63–67.
28. Ершова, Т. А., Малафеев О. А. Конфликтные управления в модели вхождения в рынок // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. — 2004. — № 36. — с. 19–27.
29. Жукова, И. В., Колпак Е. П. Математическая модель солидной опухоли // Естественные и математические науки в современном мире. — 2013. — № 13. — с. 18–25.
30. Жукова, И. В., Колпак Е. П. Математические модели злокачественной опухоли // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2014. — № 3. — с. 5–18.
31. Кефели, И. Ф., Малафеев О. А. О Математических моделях глобальных геополитических процессов многоагентного взаимодействия // Геополитика и безопасность. — 2013. — № 2. — с. 44–57.
32. Колабутин, Н. В. Двухуровневая кооперация в дифференциальной игре технологического альянса // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 42–63.
33. Колесин, И. Д., Малафеев О. А. Модель территориальной диффузии капитала в сборнике: материалы конференции «управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах». Под редакцией С. Н. Васильева, И. А. Каляева, Д. А. Новикова, Г. Г. Себрякова. 2012. — с. 1021.
34. Колесин, И. Д., Старков В. Н., Гасратова Н. А. Одиночная популяция под антропогенным давлением // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2014. — № 6 (96). — с. 226–232.
35. Колокольцов, В. Н., Малафеев О. А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) // Вестник гражданских инженеров. — 2010. — № 4. — с. 144–153.
36. Колокольцов, В. Н., Малафеев О. А. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть II) // Вестник гражданских инженеров. — 2011. — № 1. — с. 134–145.
37. Колокольцов, В. Н., Малафеев О. А. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех). Учебное пособие / В. Н. Колокольцов, О. А. Малафеев. Санкт-Петербург, 2012.
38. Колпак, Е. П. Введение в механику сплошных сред учебное пособие / Е. П. Колпак; С.-Петерб. гос. ун-т. СПб. 2004.
39. Колпак, Е. П., Балыкина Ю. Е., Котина Е. Д., Жукова И. В. Математическая модель нарушений функционирования щитовидной железы // Молодой ученый. — 2014. — № 2 (61). — с. 19–24.
40. Колпак, Е. П., Бронникова А. И., Полежаев В. Ю. Математическая модель стачечного движения в России в начале XX века // Молодой учёный. — 2015. — № 3 (83). — с. 4–15.
41. Колпак, Е. П., Габриелян Л. А., Бронникова А. И., Крылова В. А. О математических моделях симбиоза // Молодой ученый. — 2015. — № 4 (84). — с. 6–14.
42. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Балыкина Ю. Е., Гасратова Н. А. Математическая модель одиночной популяции на биллокальном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 1. — с. 28–33.
43. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Жукова И. В. Математическая модель популяционной волны // Естественные и математические науки в современном мире. — 2014. — № 16. — с. 25–41.
44. Колпак, Е. П., Горбунова Е. А., Столбовая М. В., Балыкина Ю. Е. Математическая модель логистической популяции на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 3 (62). — с. 6–14.
45. Колпак, Е. П., Горыня Е. В., Крылова В. А., Полежаев Д. Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций на линейном ареале // Молодой ученый. — 2014. — № 12 (71). — с. 12–22.

46. Колпак, Е. П., Горыня Е. В., Полежаев В. Ю. Математическая модель конкуренции двух популяций (линейный ареал) / В сборнике: Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2014) сборник трудов VII Международной конференции. Воронеж, 2014. — с. 206–209.
47. Колпак, Е. П., Жукова И. В., Степанова Д. С., Крицкая А. В. О численных методах решения эволюционных уравнений на примере математической модели «хищник-жертва» // Молодой ученый. — 2014. — № 4. — с. 20–30.
48. Колпак, Е. П., Селицкая Е. А., Габриелян Л. А. Математическая модель коррупции в системе «власть-общество» // Молодой учёный. — 2015. — № 10 (90). — С. 9–16.
49. Колпак, Е. П., Скороходова Т. В. Математическая модель роста числа учащихся в средней и высшей школах России. В сборнике: Синергетика в естественных науках / Восьмые Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. Ответственный редактор: Лапина Г. П.. Тверь, 2012. — с. 274–275.
50. Колпак, Е. П., Столбовая М. В. Математическая модель кинетики роста растений // Журнал научных публикаций аспирантов и докторантов. — 2013. — № 12 (90). — с. 230–232.
51. Колпак, Е. П., Столбовая М. В. Математическая модель роста растений / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятые Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др.. Тверь, 2013. — с. 186
52. Крылова, В. А., Колпак Е. П., Сыромолотова К. И., Воротова Т. А. Математические модели формирования спортивных групп // Молодой учёный. — 2015. — № 8 (88). — С. 10–19.
53. Лаптев, Р. А., Коварда В. В., Шатунова А. Р. Понятие и виды коррупции как социального и исторического явления // Молодой ученый. — 2014. — № 18. — с. 386–388.
54. Малафеев, О. А. Абсолютное равновесие в дифференциальных бескоалиционных играх / В книге: Всесоюзная школа «Оптимальное управление. Геометрия и анализ» Тезисы докладов. 1988. — с. 83.
55. Малафеев, О. А. О существовании обобщенного значения динамической игры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия I: Математика. Механика. Астрономия. — 1972. — № 19. — с. 41.
56. Малафеев, О. А. Управляемые конфликтные системы. Санкт-Петербург, 2000.
57. Малафеев, О. А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемые динамические процессы. Санкт-Петербург, 1990.
58. Малафеев, О. А., Алферов Г. В., Мальцева А. С., Парфенов А. П. Модель распределения заданий антикоррупционным группам, оперирующим в коррупционной среде, в сборнике: управление социально-экономическим развитием регионов: проблемы и пути их решения / Сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А.; Юго-Западный государственный университет. Курск, 2014. С. — 189–192.
59. Малафеев, О. А., Алферов Г. В., Рединских Н. Д. Многоагентное управление в модели аукциона при возможной коррупции // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. — 2014. — № 46. — с. 99–106.
60. Малафеев, О. А., Алферов Г. В., Рединских Н. Д. Оптимальное управление антикоррупционными ресурсами // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2014. — № 4 (27). — с. 49–52.
61. Малафеев, О. А., Бойцов Д. С., Рединских Н. Д., Неверова Е. Г. Компромисс и равновесие в моделях многоагентного управления в коррупционной сети социума // Молодой ученый. — 2014. — № 10 (69). — с. 14–17.
62. Малафеев, О. А., Войтенко А. А. Конкурентный механизм распределения ресурсов в транспортной задаче / В сборнике: Материалы научно-практической конференции, посвященной памяти В. И. Зубова. 2002. — с. 83–84.
63. Малафеев, О. А., Дроздов Г. Д. Моделирование процессов в системе управления городским строительством. Санкт-Петербург, 2001. Т. 1.
64. Малафеев, О. А., Еремин Д. С. Конкурентная линейная модель экономики / В сборнике: Процессы управления и устойчивость Труды XXXIX международной научной конференции аспирантов и студентов. Под редакцией Н. В. Смирнова, Г. Ш. Тамасяна. 2008. — с. 425–435.
65. Малафеев, О. А., Зенович О. С., Севек В. К. Многоагентное взаимодействие в динамической задаче управления венчурными строительными проектами // Экономическое возрождение России. — 2012. — № 1. — с. 124–131.
66. Малафеев, О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности). Санкт-Петербург, 2006.

67. Малафеев, О. А., Зубова А. Ф., Новожилова Л. М. Математическое моделирование сложных систем. Санкт-Петербург, 1999.
68. Малафеев, О. А., Королева О. А. Модель коррупции при заключении контрактов / В сборнике: Процессы управления и устойчивость Труды 39-й международной научной конференции аспирантов и студентов. СПбГУ, Факультет прикладной математики — процессов управления. 2008. — с. 446–449.
69. Малафеев, О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. Санкт-Петербург, 2000. Т. 1 Общая теория и вспомогательные сведения.
70. Малафеев, О. А., Муравьев А. И. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. Санкт-Петербург, 1998.
71. Малафеев, О. А., Немнюгин С. А., Тарасова Н. А. Динамика развития отрасли с чистой конкуренции / В сборнике: Идеи Н. Д. Кондратьева и динамика общества на рубеже третьего тысячелетия Материалы по II Международной Кондратьевской конференции. 1995. — с. 511–517.
72. Малафеев, О. А., Пичугин Ю. А. Оптимизация и прогноз в динамической модели управления портфелем ценных бумаг / В сборнике: Нобелевские лауреаты по экономике: взгляд из России К Международному симпозиуму «Нобелевские лауреаты по экономике и российская экономическая школа». Ред. Ю. В. Яковец. СПб., 2003. — с. 183–185.
73. Малафеев, О. А., Рединских Н. Д. Математический анализ многоагентных коррупционных сетей / В сборнике: Институты и механизмы инновационного развития: мировой опыт и российская практика сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А. 2014. — с. 254–257.
74. Малафеев, О. А., Рединских Н. Д. Модель оптимального распределения антикоррупционных ресурсов / В сборнике: Институты и механизмы инновационного развития: мировой опыт и российская практика сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А., 2014. — с. 248–250.
75. Малафеев, О. А., Рединских Н. Д., Колокольцов В. Н. Модель конкуренции на рынке коррупционных услуг / В сборнике: институты и механизмы инновационного развития: мировой опыт и российская практика сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А., 2014. — с. 257–260.
76. Малафеев, О. А., Рединских Н. Д., Парфенов А. П. Задача размещения коррупционеров-поставщиков в узлах коррупционной сети / В сборнике: управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014) 7-я российская мультikonференция по проблемам управления: материалы конференции. ГНЦ РФ ОАО «КОНЦЕРН «ЦНИИ «ЭЛЕКТРОПРИБОР». 2014. — с. 147–156.
77. Малафеев, О. А., Рединских Н. Д., Парфенов А. П., Смирнова Т. Е. Коррупция в моделях аукциона первой цены / В сборнике: Институты и механизмы инновационного развития: мировой опыт и российская практика сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А., 2014. — с. 250–253.
78. Малафеев, О. А., Соснина В. В. Модель управления процессом кооперативного трехагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. — 2007. — № 39. — с. 131–144.
79. Малафеев, О. А., Троева М. С. Устойчивость и некоторые численные методы в конфликтно управляемых системах. Якутск, 1999.
80. Малафеев, О. А., Черных К. С. Математическое моделирование развития компании // Экономическое возрождение России. — 2004. — № 1. — с. 60.
81. Михайлов, А. П., Ланкин Д. Ф. Моделирование оптимальных стратегий ограничения коррупции // Математическое моделирование. — 2006. — Т. 18. — № 12. — с. 115–124.
82. Морозова, Н. С. Виртуальные формации и виртуальные лидеры в задаче о движении строем группы роботов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 135–149.
83. Пичугин, Ю. А., Малафеев О. А. Построении механических торговых систем скальпирующего типа / В сборнике: Материалы конференции «Управление в технических, эргатических, организационных и сетевых системах» Под редакцией С. Н. Васильева, И. А. Каляева, Д. А. Новикова, Г. Г. Себрякова. 2012. — с. 1072–1073.
84. Пичугин, Ю. А., Малафеев О. А., Рединских Н. Д. Вероятностные критерии коррумпированности, в сборнике: институты и механизмы инновационного развития: мировой опыт и российская практика / Сборник научных статей 4-й Международной научно-практической конференции. Ответственный редактор Горохов А. А. 2014. — с. 312–313.
85. Полякова, Л. Н., Карелин В. В., Буре В. М., Хитров Г. М. Точные штрафные функции в задаче управления одной системой массового обслуживания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2015. — № 1. — с. 75–82.

86. Пронина, Ю. Г. Расчет долговечности упругой трубы под действием продольной силы, давления и осесимметричного нагрева в условиях равномерной коррозии // Проблемы прочности и пластичности. — 2009. — № 71. — с. 129–135.
87. Смирнова, М. В., Колпак Е. П. Математическое моделирование снижения детской заболеваемости в России / В сборнике: Синергетика в общественных и естественных науках: девятыя Курдюмовские чтения материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. редкол.: Лапина Г. П. (отв. ред.) и др. Тверь, 2013. — с. 222.
88. Хаванова, И. С. Высокий уровень психологической устойчивости личности как значимый фактор противодействия коррупции // Молодой ученый. — 2014. — № 15. — с. 242–244.
89. Шкрабак, В. С., Малафеев О. А., Скробач А. В., Скробач В. Ф. Математическое моделирование процессов агропромышленном производстве. Санкт-Петербург, 2000.
90. Abbasov, M. E., Demyanov V. F. Proper and adjoint exhausters in nonsmooth analysis: optimality conditions // Journal of Global Optimization. — 2013. — Т. 56. — № 2. — с. 569.
91. Balykina, Y. E., Kolpak E. P., Kotina E. D. Mathematical model of thyroid function // Middle East Journal of Scientific Research. — 2014. — Т. 19. — № 3. — с. 429–433.
92. Malafeev, O. A., Kolokoltsov V. N. Understanding game theory. New Jersey, 2010.
93. Malafeev, O. A., Troeva M. S. A Weak solution of hamilton-jacobi equation for a differential two-person zero-sum game / В сборнике: Preprints of the Eight International Symposium on Differential Games and Applications 1998. — с. 366–369.
94. Malafeyev, O. A., Redinskikh N. D., Alferov G. V. Electric circuits analogies in economics modeling: corruption networks. В сборнике: 2nd International Conference on Emission Electronics (ICEE) Selected papers. Proceedings Edited by: N. V. Egorov, D. A. Ovsyannikov, E. I. Veremey. 2014. — с. 28–32.
95. Pronina, Y. Analytical solution for the general mechanochemical corrosion of an ideal elastic-plastic thick-walled tube under pressure // International Journal of Solids and Structures. — 2013. — Т. 50. — № 22–23. — с. 3626–3633.
96. Pronina, Y. G. Estimation of the life of an elastic tube under the action of a longitudinal force and pressure under uniform surface corrosion conditions // Russian metallurgy (Metally). — 2010. — Т. 2010. — № 4. — с. 361–364.
97. Zhukova, I. V., Kolpak E. P., Balykina Yu. E. Mathematical Model of Growing Tumor // Applied Mathematical Sciences. — Vol. 9. — 2014. N 30. — 1455–1466.

Использование дискретных моделей для исследования резонанса в сплошных средах

Ченцов Евгений Петрович, аспирант
Институт вычислительного моделирования СО РАН (г. Красноярск)

К исследованию резонансных явлений в механических системах и деформируемых средах применяются как дискретные, так и непрерывные модели. Простейшей дискретной моделью является линейная решетка Браве — цепочка частиц (материальных точек), соединенных последовательно пружинами равной жесткости. Масса частиц или одинакова во всей цепочке (моноатомная цепочка), или принимает одно из двух возможных значений (двухатомная цепочка). Волновые процессы в решетках Браве, в частности, резонансы, вызванные внешними периодическими воздействиями, изучались в линейном [1, 2] и нелинейном [3, 4] приближениях. Моделированию волн в двумерных решетках (прямоугольных и треугольных) посвящены работы [5, 6].

Простейшую непрерывную модель резонансной системы описывает одномерное волновое уравнение, получаемое с помощью предельного перехода в решетке Браве при стремлении к бесконечности числа частиц, причем предполагается конечность плотности и скорости упругих волн. Резонансные решения волнового уравнения для различных вариантов нелинейности получены в работах [7, 8]. В [9] приведены результаты исследования модельного одномерного уравнения для описания резонанса. Пространственные непрерывные модели структурно неоднородных сред, так называемых обобщенных континуумов, строятся с помощью метода гомогенизации [10, 11], позволяющего определить феноменологические параметры и функции состояния в определяющих уравнениях по заданным характеристикам дис-

кретных систем. Среди моделей обобщенных континуумов исключительную роль играет модель Коссера, учитывающая вращательные степени свободы частиц микроструктуры среды. Анализ волновых процессов на основе уравнений континуума Коссера посвящены работы [12, 13]. В [14] показано, что с помощью уравнений ортотропного моментного континуума можно приближенно описать процессы распространения волн вращательного движения в блочных средах из упругих блоков, взаимодействующих через тонкие податливые прослойки.

Общие вопросы теории колебаний и резонансных явлений рассмотрены в монографиях [15–17]. Прикладные задачи о резонансном возмущении механических и физических систем исследовались многими авторами. В [18] демонстрируются возможности резонансного метода разрушения ледяного покрова с помощью изгибно-гравитационных поверхностных волн [19].

Общая постановка

Процесс распространения упругих волн бесконечно малой амплитуды в дискретных механических системах можно описать с помощью системы дифференциальных уравнений

$$A\ddot{U} + BU = F, \tag{1}$$

где A — симметричная положительно определенная матрица обобщенных масс; U — вектор обобщенных координат; B — симметричная неотрицательно определенная матрица; F — вектор внешних сил.

Для системы (1) верно уравнение $\dot{E} = F\dot{U}$, характеризующее изменение полной энергии: $E = (\dot{U}A\dot{U} + UBU)/2$. В случае, если вектор внешних сил зависит от времени периодически с частотой ω ($F = \hat{F}e^{i\omega t}$), то периодическим будет и вектор обобщенных координат $U = \hat{U}e^{i\omega t}$, при этом $(B - \omega^2 A)\hat{U} = \hat{F}$. Исключением являются только резонансные частоты, для которых нарушается условие периодичности U . Квадраты частот $\omega^2 = \lambda$ являются корнями характеристического уравнения $\det(B - \lambda A) = 0$. Поскольку матрицы A и B симметричные и знакоопределенные, корни данного уравнения действительные, а их число с учетом кратности равно размерности системы (1). Корням отвечают линейно независимые собственные векторы, каждый из которых является решением однородной системы $(B - \lambda A)Z = 0$.

Для нерезонансных частот $\hat{U} = -R(\omega^2)A^{-1}\hat{F}$, где $R(\lambda) = (\lambda E - A^{-1}B)^{-1}$ — резольвента, E — единичная матрица. Для исследования поведения системы в окрестности собственных частот используется спектральный портрет матрицы $A^{-1}B$ [20]. С помощью спектрального портрета можно визуально отделить резонансные частоты и отследить изменение вектора \hat{U} в их окрестности.

Исследованы случаи продольных и вращательно-поперечных колебаний. В обоих случаях рассмотрена линейная дискретная цепочка из n материальных точек массы m , соединенных между собой пружинами жесткости k . Расстояние между материальными точками равно h , длина цепочки в целом $l = (n - 1)h$.

Продольные колебания

В данном случае к массам цепочки в продольном направлении приложены возмущающие силы P_j , в результате которых массы получают перемещения u_j , зависящие от времени (рис. 1).

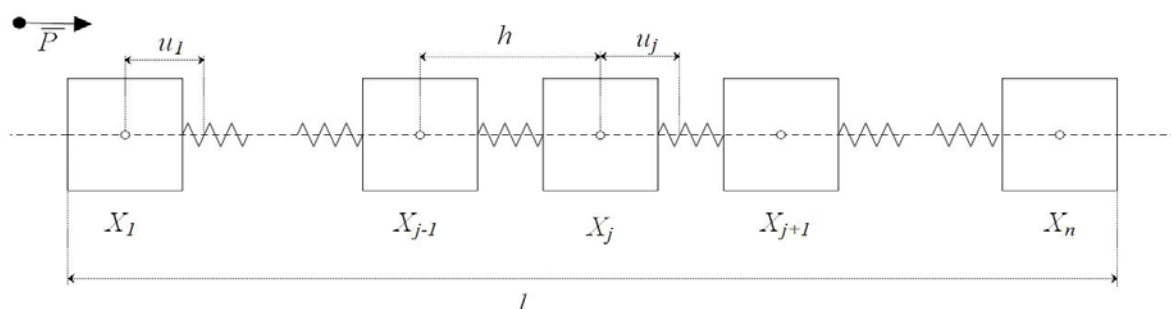


Рис. 1. Схема продольных колебаний цепочки

Уравнения движения в форме Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = P_j, \quad T = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \dot{u}_j^2, \quad \Pi = \frac{k}{2} \sum_{j=1}^{n-1} (u_{j+1} - u_j)^2.$$

Здесь $L = T - \Pi$ — функция действия, T — кинетическая энергия, Π — потенциальная энергия цепочки. Данные уравнения приводятся к системе (1), причем матрицы A и B — якобиевы:

$$B = \begin{pmatrix} -k & k & 0 & \dots & 0 \\ k & -2k & k & \dots & 0 \\ 0 & k & -2k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k \end{pmatrix}, \quad B - \lambda A = m \begin{pmatrix} \gamma - \lambda & -\gamma & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma & 2\gamma - \lambda & -\gamma & \dots & 0 \\ 0 & -\gamma & 2\gamma - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma - \lambda \end{pmatrix}, \quad \left(\gamma = \frac{k}{m} \right).$$

Соответствующее характеристическое уравнение решается в явном виде [21]. Для этого строятся собственные векторы с компонентами $Z_{j+1} = \sin(j\alpha + \beta)$, которые выражаются через параметры α и β . Система уравнений для собственных векторов автоматически выполняется, если

$$\lambda = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - 1}, \quad \alpha = \frac{\pi \cdot s}{n}, \quad (s = 0, \dots, n-1).$$

Показано, что при увеличении числа элементов в линейной цепочке резонансные частоты стремятся к собственным частотам продольных колебаний однородного упругого стержня с граничными условиями, соответствующими способу закрепления концов цепочки [22, 23].

Для примера на рис. 2 изображен спектральный портрет матрицы дискретной цепочки для $n = 11$ на плоскости действительных и мнимых осей λ . В окрестности каждой из них амплитуды колебаний растут в равной степени по мере приближения к соответствующей резонансной частоте. Исключениями являются пятна, находящиеся на границах диапазона. Спектральный портрет для системы большего порядка качественно не меняется.

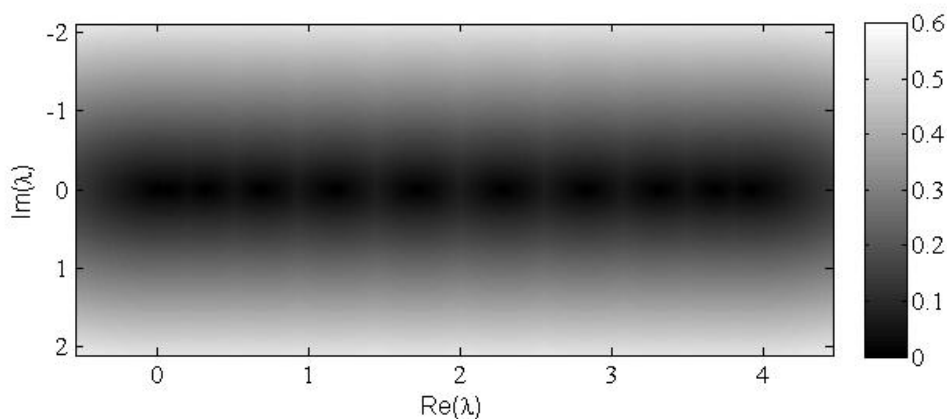


Рис. 2. Спектральный портрет матрицы A , $n=11$

Вращательно-поперечные колебания

Пусть на элементы цепочки действуют поперечные силы Q_j и вращательные моменты R_j , в результате чего элементы поворачиваются на малые углы φ_j и получают в поперечном направлении малые перемещения u_j (рис.3).

Предположим, что концы цепочки закреплены по перемещениям и свободны по вращениям, поставив граничные условия в виде

$$u_1 + u_0 = 0, \quad u_{n+1} + u_n = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_0 = 0, \quad \varphi_{n+1} - \varphi_n = 0 \tag{2}$$

после введения в цепочку двух дополнительных элементов с индексами $j = 0$ и $j = n + 1$.

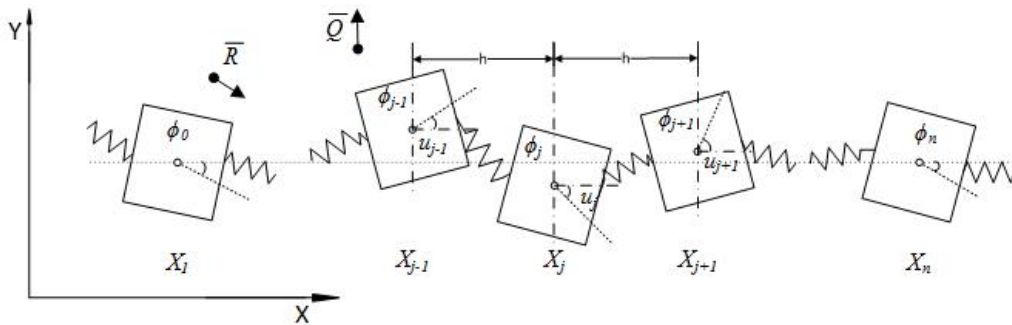


Рис. 3. Схема вращательно-поперечных колебаний цепочки

Деформированное состояние цепочки описывается величинами

$$\Lambda_{j-1/2} = \frac{u_j - u_{j-1}}{h} - \frac{\varphi_j + \varphi_{j-1}}{2}, \quad M_{j-1/2} = \frac{\varphi_j - \varphi_{j-1}}{h}, \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

первая из которых характеризует деформацию сдвига, а вторая — кривизну. Выбор характеристик деформирования в таком виде объясняется тем, что обе они тождественно равны нулю при абсолютно жестком движении, когда вся цепочка с освобожденными концами поворачивается на произвольный бесконечно малый угол.

Упругое сопротивление пружин в цепочке моделируется с помощью уравнений $\tau_{j-1/2} = a\Lambda_{j-1/2}$, $\mu_{j-1/2} = bM_{j-1/2}$, связывающих перерезывающие силы $\tau_{j-1/2}$ и вращательные моменты $\mu_{j-1/2}$ с деформациями и кривизнами. Уравнения Лагранжа принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{u}_j &= a \frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} - a \frac{\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}}{2h} + Q_j, \\ J\ddot{\varphi}_j &= a \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - a \frac{\varphi_{j-1} + 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{4} + b \frac{\varphi_{j-1} - 2\varphi_j + \varphi_{j+1}}{h^2} + R_j. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнения (3) также можно представить в виде системы (1) с симметричными и знакоопределенными матрицами. Подстановка в однородные уравнения выражений

$$u_j = \hat{u} e^{i\omega t} \sin\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \varphi_j = \hat{\varphi} e^{i\omega t} \cos\left(j - \frac{1}{2}\right)\alpha, \quad \alpha = \frac{\pi s}{n+1}, \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

которые автоматически удовлетворяют граничным условиям, приводит к системе линейных уравнений для амплитуд \hat{u} и $\hat{\varphi}$. Условие равенства нулю определителя системы, представляющее собой условие существования нетривиальных решений, позволяет получить биквадратное уравнение для определения собственных частот цепочки:

$$mJ\omega^4 - C\omega^2 + 16\frac{ab}{h^4} \sin^4 \frac{\alpha}{2} = 0, \quad C = ma \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 4\frac{Ja + mb}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Отсюда

$$\omega^2 = \frac{C \pm \sqrt{D}}{2mJ}, \quad D = (ma)^2 \cos^4 \frac{\alpha}{2} + 2ma \frac{Ja + mb}{h^2} \sin^2 \alpha + 16\frac{(Ja - mb)^2}{h^4} \sin^4 \frac{\alpha}{2}. \tag{4}$$

Собственные частоты при естественных ограничениях на параметры цепочки ($m, J, a, b > 0$) всегда действительные и различные для разных s . Если номер s зафиксировать, то при заданной длине цепочки l существуют конечные пределы

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \nu, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \sin^2 \alpha = \nu, \quad \nu = \frac{\pi^2 s^2}{l^2}.$$

С помощью этих пределов коэффициенты формулы (4) для квадрата частоты бесконечной цепочки упрощаются:

$$C = ma + (Ja + mb)\nu, \quad D = (ma)^2 + 2ma(Ja + mb)\nu + (Ja - mb)^2 \nu^2.$$

Устремляя теперь $l \rightarrow \infty$, то есть $\nu \rightarrow 0$, можно установить, что $\omega_0 = \sqrt{a/J}$. Это единственная собственная частота в бесконечной цепочке бесконечной длины, которая связана с вращательным движением элементов. Других резонансных частот нет.

На рис. 4 изображен матричный портрет для дискретной цепочки из 9 элементов. По размеру пятен на этом рисунке можно судить о том, что при приближении к частоте ω_0 амплитуды колебаний нарастают примерно в такой же степени, как и при приближении к остальным резонансным частотам.

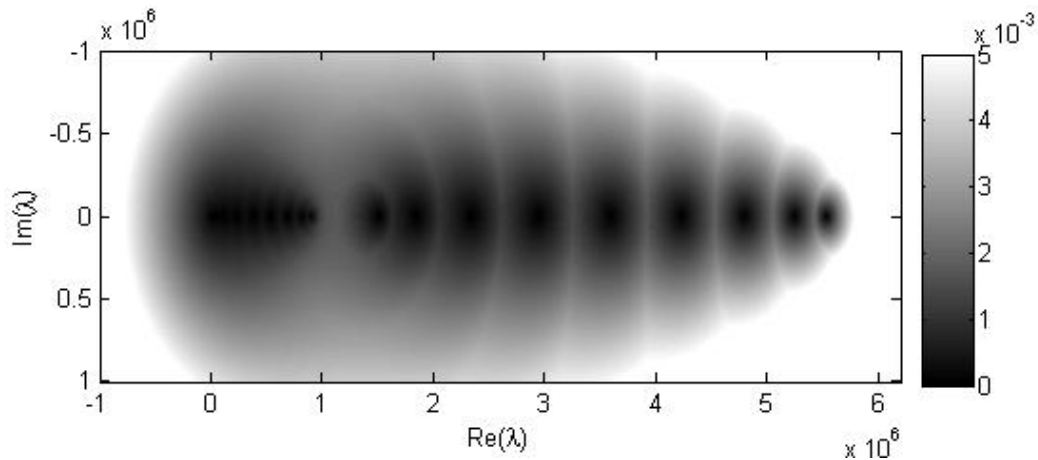


Рис. 4. Спектральный портрет матрицы, $n = 9$

Уравнения (3) в пределе для бесконечной цепочки длины l переходят в одномерные дифференциальные уравнения континуума Коссера:

$$\rho_0 \ddot{u} = a_0 (u_{xx} - \varphi_x) + q(x, t), \quad J_0 \ddot{\varphi} = a_0 (u_x - \varphi) + b_0 \varphi_{xx} + r(x, t) \quad (5)$$

с граничными условиями $u(0) = u(l) = 0$, $\varphi_x(0) = \varphi_x(l) = 0$. Коэффициенты уравнений пересчитываются через механические параметры дискретной модели из соображений сохранения полной массы и суммарного момента инерции, а собственные частоты континуума вычисляются по формулам, которые могут быть получены предельным переходом в формулах для частот собственных колебаний конечной цепочки. Резонансные свойства континуума Коссера на основе моделей пространственного напряженно-деформированного состояния изучались в монографии [24]. Было установлено, что в моментной среде существует резонансная частота, связанная с вращательным движением частиц, не зависящая от размеров области и от типа граничных условий на ее границе.

Таким образом, показано, что при поперечных и вращательных колебаниях дискретной цепочки возникает целая система резонансных частот, зависящих от числа элементов и длины цепочки. Наряду с ней существует единственная резонансная частота вращательного движения, которая определяется только значениями механических параметров модели.

Литература:

1. Belbasi, S., Foulaadvand M.E., Yong S.J. Anti-Resonance in a One-Dimensional Chain of Driven Coupled Oscillators // American Journal of Physics, 2014. — V. 82, No. 32. — P. 32–38. <http://dx.doi.org/10.1119/1.4827277>
2. Grundmann, M. The Physics of Semiconductors: An Introduction Including Nanophysics and Applications // Springer Science & Business Media, 2011. — 901 p.
3. Narisetti Raj K., Wave propagation in nonlinear periodic structures, dissertation (Georgia Institute of Technology), 2010.
4. Filip A.-M., Venakides S. Existence and Modulation of Travelling Waves in Particle Chains // Communications on Pure and Applied Mathematics, 1999. — V. 52, Iss. 6. — P. 693–735. [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0312\(199906\)52:6<693::AID-CPA2>3.0.CO;2-9](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199906)52:6<693::AID-CPA2>3.0.CO;2-9)
5. Ayzenberg-Stepanenko M.V., Slepyan L.I. Resonant-Frequency Primitive Waveforms and Star Waves in Lattices // Journal of Sound and Vibration, 2008. — V. 313, Iss. 3-5. — P. 812–821. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jsv.2007.11.047>
6. Feckan, M., Rothos V.M. Travelling Waves in Hamiltonian Systems on 2d Lattices with Nearest Neighbor Interactions // Institute of Physics Publishing, Nonlinearity, 2007. — V. 20, No. 2. — P. 319–341. <http://dx.doi.org/10.1088/0951-7715/20/2/005>
7. Manevich A.I., Manevich L.I. The mechanics of nonlinear systems with internal resonances, ISBN: 1-86094-510-4, Imperial College Press, London. — 276 p.

8. Collins W.D. Forced Oscillations of Systems Governed by One-Dimensional non-Linear Wave Equations // Quart. Journ. Mech. And Applied Math, 1971. — V. 24, No. 2. — P. 129–153. <http://dx.doi.org/10.1093/qjmam/24.2.129>
9. Bretherton F.P. Resonant Interactions between Waves. The Case of Discrete Oscillations // J. Fluid Mech, 1964. — V. 20, No. 3. — P. 457–479. <http://dx.doi.org/10.1017/S0022112064001355>
10. Boutin, C., Hans S. Homogenization of Periodic Discrete Medium: Application to Dynamics of Framed Structures // Comput. Geotech, 2003. — V. 30, No. 4. — P. 303–320. [http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X\(03\)00005-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0266-352X(03)00005-3)
11. Tollenaere, H., Caillerie D. Continuous Modeling of Lattice Structures by Homogenization // Adv. Eng. Softw, 1998. — V. 29. Iss. 7-9. — P. 699–705. [http://dx.doi.org/10.1016/S0965-9978\(98\)00034-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0965-9978(98)00034-9)
12. Sadvovskaya O.V., Sadvovskii V.M. Analysis of Rotational Motion of Material Microstructure Particles by Equations of the Cosserat Elasticity Theory // Acoust. Phys, 2010. — V. 56, No. 6. — P. 942–950. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063771010060199>
13. Sadvovskii V.M., Sadvovskaya O.V., Varygina M.P. Numerical Solution of Dynamic Problems in Couple-Stressed Continuum on Multiprocessor Computer Systems // Int. J. Numer. Anal. Model. Ser. B, 2011. — V. 2, No. 2–3. — P. 215–230.
14. Sadvovskii V.M., Sadvovskaya O.V. Modeling of Elastic Waves in a Blocky Medium Based on Equations of the Cosserat Continuum // Wave Motion, 2015. — V. 52. — P. 138–150. <http://dx.doi.org/10.1016/j.wavemoti.2014.09.008>
15. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1963. — 410 с.
16. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988. — 328 с.
17. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры: научное издание. — М.: Физматлит, 2003. — 492 с.
18. Козин В.М. Резонансный метод разрушения ледяного покрова. Изобретения и эксперименты. — М.: Академия естествознания, 2007. — ISBN: 978-5-91327-017-7. — 355 с.
19. Milewski P.A., Wanf Z. Three-Dimensional Flexural-Gravity Waves // Studies in Applied Mathematics, 2013. — V. 131. Iss. 2. — P. 135–148. <http://dx.doi.org/10.1111/sapm.12005>
20. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга, 1997. — 284 с.
21. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 1984. — 320 с.
22. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, Гл. ред. ФИЗМАТЛИТ, 1986. — 560 с.
23. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. — Справочник в 3 томах. — Том 3. — М.: Машиностроение, 1968. — 567 с.
24. Sadvovskaya O.V., Sadvovskii V.M. Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Ser.: Advanced Structured Materials, V. 21. Springer, Heidelberg — New York — Dordrecht — London, 2012. — 390 p. <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-29053-4>, ISBN: 978-3-642-29052-7.

Об устойчивости неизотермического микроконвективного течения в вертикальном канале

Шефер Илья Александрович, аспирант
Сибирский федеральный университет (г. Красноярск)

Введение

В последние десятилетия, в связи с развитием наукоемких технологий, существенно расширился круг задач, связанных со свободноконвективными течениями. Примерами прикладных научных отраслей, в которых интенсивно развиваются и используются результаты исследований естественной конвекции, являются кристаллофизика и космические технологии. Возросшая сложность математических моделей и экспериментальных установок позволяют ставить и решать новые задачи в этих областях.

Хорошо известное приближение Обербека-Буссинеска уравнений Навье-Стокса традиционно широко используется для описания конвективных течений в «земных» условиях. Однако, в случае пониженной гравитации, допущения, при которых оно получено, могут нарушаться, поэтому вопрос о математически корректном и физически оправданном применении модели Обербека-Буссинеска является дискуссионным. Исследованию этой проблемы был посвящен ряд работ В.В. Пухначева и P.S. Pefera, R.F. Seferka (см., например, [1], [2]). В [1] был предложен критерий, ограничивающий область использования уравнений Обербека-Буссинеска, а также представлена модель *микроконвекции*, позволяющая адекватно описывать течения в микромасштабах или в условиях микрогравитации. Этим критерием является

параметр микроконвекции η (точный вид см. в п. 2): показано, что аппроксимация Обербека-Буссинеска применима, только если $\eta > 1$, в противном случае необходимо пользоваться другими моделями. Малость данного параметра обеспечивается либо малыми значениями ширины канала (в этом случае говорят о микромасштабных течениях) и/или гравитационного ускорения (течения в условиях микрогравитации), либо большими значениями кинематической вязкости и/или теплопроводности.

В данной работе исследуется стационарное течение вязкой теплопроводной жидкости в вертикальном канале с неподвижными твердыми стенками, на которых задан поток тепла. Изучается линейная устойчивость течения относительно малых пространственных возмущений в рамках модели микроконвекции (плоские возмущения изучались ранее в работах [3, 4]). Поскольку данная задача возникла в рамках решения проблем кристаллофизики, связанных с выращиванием сверхчистых (без полосчатых неоднородностей) кристаллов полупроводников в невесомости, то значения параметра микроконвекции предполагались $\eta < 1$.

1. Постановка задачи и определяющие уравнения

Пусть жидкость заполняет плоский вертикальный канал ширины $2a$ (рис. 1). Границы канала — неподвижные твердые стенки.

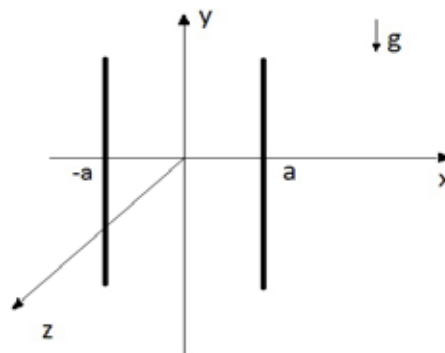


Рис. 1. Схема течения

Для описания движения жидкости воспользуемся моделью микроконвекции [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{w} &= 0, \\ \mathbf{w}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} + \beta \chi (\nabla \theta \cdot \nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w} \cdot \nabla \theta) + \beta^2 \chi^2 \left(\Delta \theta \nabla \theta - \frac{\nabla |\nabla \theta|^2}{2} \right) &= \\ &= (1 + \beta \theta) (-\nabla q + \nu \Delta \mathbf{w}) + \mathbf{g}, \\ \theta_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \theta + \beta \chi |\nabla \theta|^2 &= (1 + \beta \theta) \chi \Delta \theta. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь ρ — плотность; $q = \rho_0^{-1} (p - \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}) - \beta \chi (v - \chi) \Delta \theta$ — модифицированное давление; $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \beta \chi \nabla \theta$ — модифицированный вектор скорости; θ — температура; β — коэффициент линейного температурного расширения; χ — теплопроводность среды; ν — кинематическая вязкость; $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$ — вектор массовых сил.

Так как в дальнейшем рассматриваются только стационарные течения, то для замыкания уравнений зададим на границах условия для скорости и температуры в следующем виде:

$$\mathbf{w} + \beta \chi \nabla \theta = 0, \quad k \frac{\partial \theta}{\partial n} = d, \tag{1.2}$$

где k — коэффициент теплопроводности, d — заданный поток тепла.

Известно, что плоские течения в вертикальном слое реализуются, если величина теплового потока не зависит от z , а компонента скорости $v_3 = 0$. В [5] показано, что в этом случае решение системы (1.1) представимо в виде

$\mathbf{w} = (u_0, v(x), 0)$, $\theta = \theta(x)$, $q = (\varphi - g)y$. В работе [3] получен точный вид решений с $u_0 = \beta \chi d / k \equiv \text{const}$:

$$v(x) = \frac{1}{\nu} \left[(\varphi - g) \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2 + \frac{g \chi^2}{u_0^2} \left(1 + \beta \theta_0 - \frac{u_0 x}{\chi} \right) \left(\ln \left(1 + \beta \theta_0 - \frac{u_0 x}{\chi} \right) - 1 \right) \right], \tag{1.3}$$

$$c_1 = -\frac{g\chi^2}{2au_0^2} \left(f_1 \ln f_1 - f_2 \ln f_2 + \frac{2u_0 a}{\chi} \right), \quad c_2 = \frac{(g-\varphi)}{2} a^2 - \frac{g\chi^2}{u_0^2} (f_1 \ln f_1 + f_2 \ln f_2 - 2(1 + \beta\bar{\theta})),$$

$$f_1 = 1 + \beta\theta_0 - \frac{u_0 a}{\chi}, \quad f_2 = 1 + \beta\theta_0 + \frac{u_0 a}{\chi},$$

$$\varphi = g \left\{ 1 - \left[\frac{\chi}{2u_0 a} (\ln f_2 - \ln f_1) \left(f_1 \ln f_1 + f_2 \ln f_2 + \frac{\chi}{u_0 l} (1 + \beta\theta_0) (f_1 \ln f_1 + f_2 \ln f_2) \right) + 2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[(1 + \beta\theta_0) + (\ln f_2 - \ln f_1) \left(\frac{u_0 l}{2\chi} - \frac{\chi}{2u_0 l} (1 + \beta\theta_0)^2 \right) \right]^{-1} \right\}, \tag{1.4}$$

$$\theta = \theta_0 - \frac{u_0 x}{\beta\chi}, \quad \theta_0 = \text{const.} \tag{1.5}$$

Исследуем устойчивость данного решения в рамках линейной теории.

2. Линеаризованная задача о малых возмущениях

Рассмотрим возмущенное решение исходной задачи $\bar{\mathbf{w}} = \mathbf{w} + \mathbf{W}$, $\bar{\theta} = \theta + T$, $\bar{q} = q + Q$. Подставив новые искомые функции $\bar{\mathbf{w}}$, $\bar{\theta}$, \bar{q} в систему (1.1), (1.2), считая возмущения \mathbf{W} , T , Q и их производные малыми, получим линеаризованную задачу:

$$\text{div} \mathbf{W} = 0, \\ \mathbf{W}_t + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \nabla \mathbf{w} + \beta\chi(\text{rot } \mathbf{W} \times \nabla \theta + \text{rot } \mathbf{w} \times \nabla T) + \\ + \beta^2 \chi^2 \text{div}(\nabla \theta \otimes \nabla T + \nabla T \otimes \nabla \theta - 2I \nabla \theta \cdot \nabla T) = \\ = (1 + \beta\theta)(-\Delta Q + \nu \Delta \mathbf{W}) + \beta T(-\Delta q + \nu \Delta \mathbf{w}), \\ T_t + \mathbf{w} \cdot \nabla T + \mathbf{W} \cdot \nabla \theta + 2\beta\chi \nabla \theta \cdot \nabla T = (1 + \beta\theta)\chi \Delta T + \beta\chi T \Delta \theta, \\ \mathbf{W} + \beta\chi \nabla T = 0, \quad T_x = 0, \quad |x| = a. \tag{2.1}$$

Введем безразмерные переменные следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad \mathbf{W}' = \frac{\mathbf{W}a}{\chi}, \quad T' = \frac{T}{\theta_0}, \quad Q' = \frac{Qa^2}{\nu\chi}.$$

Опуская штрихи, из (2.1) получим:

$$U_x + V_y + W_z = 0, \\ U_t + \text{Pe}U_x + \nu U_y - \varepsilon \nu_x T_y + \varepsilon^2 \theta_x (T_{xx} + T_{zz}) = (1 + \varepsilon\theta)(-Q_x + \nu \Delta U) \text{Pr}, \\ V_t + \text{Pe}V_x + \nu V_y + \nu_x U + \varepsilon [\theta_x (V_x - U_y) + \nu_x T_x] - \varepsilon^2 \theta_x T_{xy} = \\ = (1 + \varepsilon\theta)(-Q_y + \nu \Delta V) \text{Pr} + \frac{\text{Gr}T}{1 + \varepsilon\theta}, \\ W_t + \text{Pe}W_x + \nu W_y + \varepsilon \theta_x (W_x - U_z) - \varepsilon^2 \theta_x T_{xz} = (1 + \varepsilon\theta)(-Q_z + \nu \Delta W) \text{Pr}, \\ T_t + \text{Pe}T_x + \nu T_y + \theta_x U + 2\varepsilon \theta_x T_x = (1 + \varepsilon\theta)\chi \Delta T, \\ U + \varepsilon T_x = 0, \quad T_x = 0, \quad |x| = 1. \tag{2.2}$$

При указанном выборе безразмерных переменных задача (2.2) содержит следующие определяющие безразмерные величины: параметры микроконвекции $\eta = ga^3 \beta\theta_0 / \nu\chi$ и Буссинеска $\varepsilon = \beta\theta_0$, числа Пекле $\text{Pe} = u_0 a / \chi$, Прандтля $\text{Pr} = \nu / \chi$ и Грасгофа $\text{Gr} = \varepsilon \cdot \eta \cdot \text{Pr} = ga^3 \beta\theta_0 / \chi^2$.

Представим решение краевой задачи (2.2) в виде нормальных волн

$$(\mathbf{W}, Q, T) = (\mathbf{W}(x), Q(x), T(x)) \cdot \exp[i(\alpha_1 y + \alpha_2 z - Ct)], \tag{2.3}$$

где α_1, α_2 — волновые числа вдоль осей y и z соответственно; C — комплексный декремент, определяющий поведение возмущений со временем. В этом случае возмущение представляет собой волну, распространяющуюся под углом $\varphi = \arctg(\alpha_2 / \alpha_1)$ в положительном направлении оси y . Подставляя (2.3) в (2.2), получим спектральную задачу:

$$\begin{aligned}
 & i(\alpha_1 v - C)U + PeU' - [i\alpha_1 \varepsilon v_x + \varepsilon^2 \theta_x (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)]T = \\
 & = (1 + \varepsilon \theta) [-Q' + U'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)U] Pr, \\
 & i(\alpha_1 v - C)V + (Pe + \varepsilon \theta_x)V' + (v_x - i\alpha_1 \varepsilon \theta_x)U - [\varepsilon v_x - i\alpha_1 \varepsilon^2 \theta_x]T' = \\
 & = (1 + \varepsilon \theta) [-i\alpha_1 Q + V'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)V] Pr + \frac{GrT}{1 + \varepsilon \theta}, \\
 & i(\alpha_1 v - C)W + (Pe + \varepsilon \theta_x)W' - i\alpha_2 \varepsilon \theta_x U - i\alpha_2 \varepsilon^2 \theta_x T' = \\
 & = (1 + \varepsilon \theta) [-i\alpha_2 Q + W'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)W] Pr, \\
 & i(\alpha_1 v - C)T + (Pe + 2\varepsilon \theta_x)T' + \theta_x U = (1 + \varepsilon \theta) [T'' - (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)T], \\
 & U' + i\alpha_1 V + i\alpha_2 W = 0, \\
 & U + \varepsilon T' = 0, V = W = 0, T' = 0, |x| = 1,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

в которой искомые декременты играют роль собственных чисел, а соответствующие им собственные функции, зависящие от $\alpha_1, \alpha_2, \varepsilon, Pe, \theta_x, Gr$, описывают амплитуды возмущений.

Умножим второе и третье уравнения в (2.4) на $i\alpha_1$ и $i\alpha_2$ соответственно, и складывая, получим

$$\begin{aligned}
 & i(\alpha_1 v - C)\bar{Z} + (Pe + \varepsilon \theta_x)\bar{Z}' + (i\alpha_1 v_x + \alpha^2 \varepsilon \theta_x)U + [i\alpha_1 \varepsilon v_x + \alpha^2 \varepsilon^2 \theta_x]T' = \\
 & = (1 + \varepsilon \theta) [\alpha^2 Q + \bar{Z}'' - \alpha^2 \bar{Z}] Pr + i\alpha_1 \frac{GrT}{1 + \varepsilon \theta},
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{Z} = i\alpha_1 V + i\alpha_2 W, \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Делая в (2.4) замену

$$\bar{U} = i\alpha_1 U, \quad \bar{Q} = i\alpha_1 Q, \quad \bar{T} = i\alpha_1 T,$$

получим плоскую задачу:

$$\begin{aligned}
 & i(\alpha_1 v - C)\bar{Z} + (Pe + \varepsilon \theta_x)\bar{Z}' + \left(v_x - \frac{i\alpha}{\lambda} \varepsilon \theta_x\right)\bar{U} + \left[\varepsilon v_x - \frac{i\alpha}{\lambda} \varepsilon^2 \theta_x\right]\bar{T}' = \\
 & = (1 + \varepsilon \theta) \left[-\frac{i\alpha}{\lambda} \bar{Q} + \bar{Z}'' - \alpha^2 \bar{Z}\right] Pr + \frac{Gr\bar{T}}{1 + \varepsilon \theta}, \\
 & i(\alpha_1 v - C)\bar{U} + Pe\bar{U}' - [i\alpha_1 \varepsilon v_x + \varepsilon^2 \theta_x \alpha^2]\bar{T} = (1 + \varepsilon \theta) [-\bar{Q}' + \bar{U}'' - \alpha^2 \bar{U}] Pr, \\
 & i(\alpha_1 v - C)\bar{T} + (Pe + 2\varepsilon \theta_x)\bar{T}' + \theta_x \bar{U} = (1 + \varepsilon \theta) [\bar{T}'' - \alpha^2 \bar{T}], \\
 & \bar{U}' + i\alpha_1 \bar{Z} = 0, \\
 & \bar{U} + \varepsilon \bar{T}' = 0, \bar{Z} = 0, \bar{T}' = 0, |x| = 1,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\lambda = \alpha_1 / \alpha$.

Заметим, что обе задачи позволяют найти декременты возмущений, которые являются собственными числами для задач (2.4) и (2.5), однако только решение системы (2.4) дает искомые амплитуды возмущений.

3. Численное решение задачи на собственные значения

Для решения спектральной задачи (2.4) использовался метод ортогонализации [6]. Для этого (2.4) приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида $y' = A(x)y, B \cdot y(\pm 1) = 0$, где $A(x)$ — матрица системы, B — матрица граничных условий. Так как на каждой границе задано 3 условия, то решение ищется в виде $y = \sum_{i=1}^3 p_i y^i$. В качестве начальных данных выбирается полная система векторов, удовлетворяющих условию на левой границе. Затем система интегрируется с помощью метода Рунге-Кутты-Мерсена пятого порядка с автоматическим выбором шага с ортогонализацией в промежуточных точках. Граничное условие на правом конце даст значения искомым коэффициентов p_i . Для построения нетривиальных решений потребуем равенство нулю определителя $D = \det(B \cdot y(1))$. При фиксированных значениях волновых чисел и безразмерных параметров задача сводится к решению нелинейного уравнения $D(C) = 0$, корнями которого будут собственные числа спектральной задачи. Решение полученного уравнения ищется с помощью метода секущих. Все необходимые, описанные выше, численные процедуры были реализованы в среде MATLAB.

Анализ устойчивости проводился для модельной среды SiO_2 (диоксид кремния), физические параметры которой указаны в таблице 1. В таблице 2 приведены значения ширины канала, гравитационного ускорения и тепловых потоков, которые использовались в расчетах. Данные величины выбирались исходя из выполнения условия микроконвекции и обеспечения такого перепада температур в канале, при котором можно полагать постоянство кинематической вязкости.

Таблица 1. Физические параметры среды для SiO_2

Коэффициент температурного расширения β , 1/К	0.75e-5
Кинематическая вязкость ν , cm^2/c	2.65e-3
Температуропроводность χ , cm^2/c	0.49
Теплопроводность k , Вт/(см · К)	2.16e-1

Таблица 2. Параметры задачи

Ширина канала $2a$, см	0.2
Поток тепла d , Вт/см ²	5, 10, 20, 50, 100, 200
Гравитационное ускорение g , см/с ²	981e-6, 981e-3

Расчеты, проведенные при волновых числах в диапазоне $0.1 < \alpha_{1,2} \leq 10$, показывают, что мнимые части декрементов отрицательны при любых волновых числах из указанного диапазона, что говорит об устойчивости течения при рассматриваемых значениях физических параметров. При этом вещественные части найденных декрементов отличны от нуля (рис. 2), что говорит о существовании затухающих (в силу знака мнимой части) колебательных режимов.

Анализ собственных функций показывает, что возмущения представляют собой конвективные ячейки, форма которых зависит от параметров задачи, а пространственные размеры определяются волновыми числами. При этом взаимодействие тепловых и гидродинамических возмущений может приводить к формированию различных конвективных режимов.

Тепловые возмущения могут иметь форму тепловых валов (рис. 3 а)), «тепловых пятен» (рис. 3 б)) или гидротепловых валов, которые формируются на границе встречных потоков (рис. 3 в), 3 г)). При этом конфигурация валов зависит от длины волны возмущения. Наиболее разнообразное семейство характеристических возмущений температуры наблюдается в случае коротковолновых возмущений.

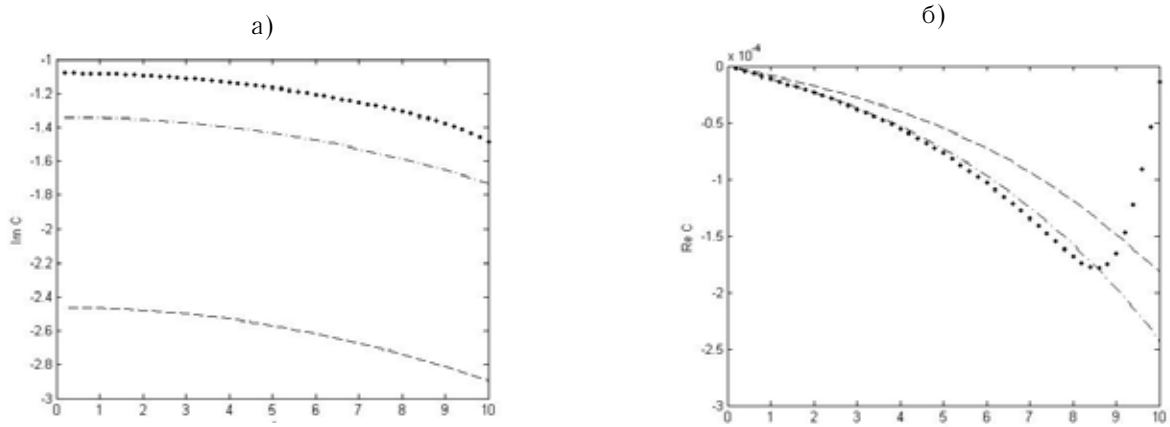


Рис. 2. Мнимые а) и вещественные б) части декрементов в зависимости от волнового числа α_1 : «*» — $\alpha_2 = 0.1$, «-» — $\alpha_2 = 1$, «--» — $\alpha_2 = 10$

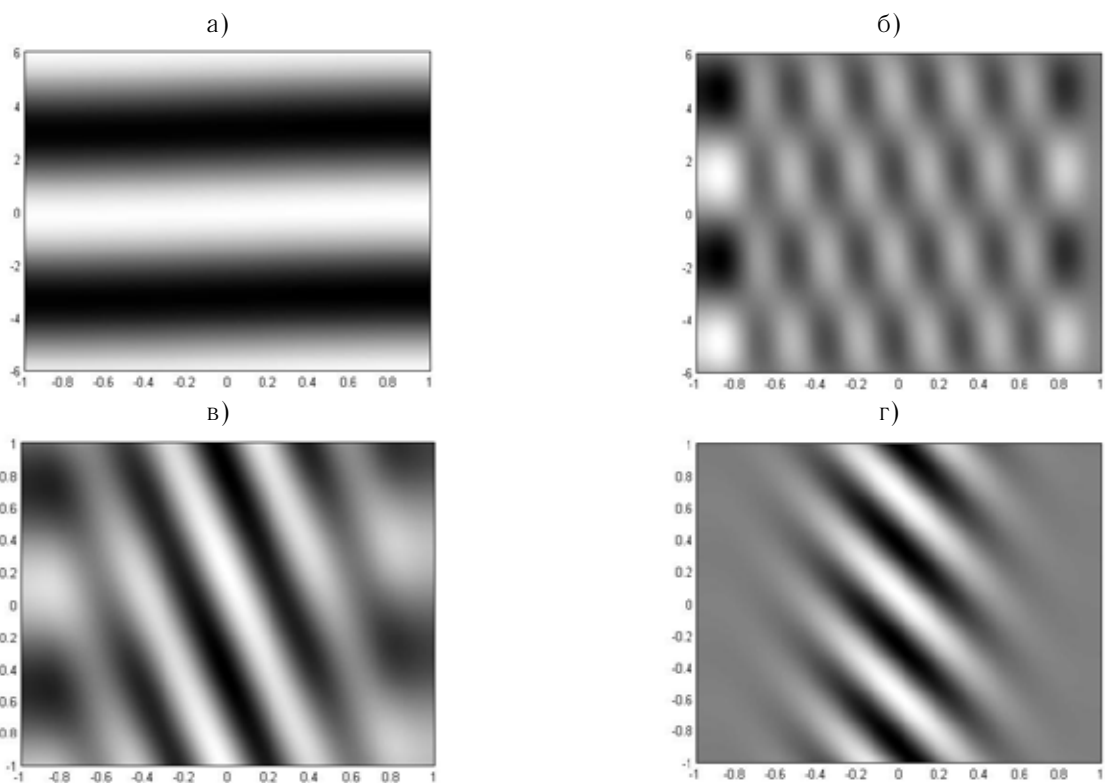


Рис. 3. Температурные возмущения при разных волновых числах
 а) — $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0.1$; б) — $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 10$; в) — $\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 1$; г) — $\alpha_1 = 10, \alpha_2 = 1$

Гидродинамические возмущения могут приводить к формированию в слое мелкомасштабных ячеек. При этом гидротепловые валы (рис. 3 г), 4 а)) образуются в результате совместного влияния тепловых и гидродинамических возмущений. С ростом теплового потока на стенках (фактически это влияет на значение числа Пекле и величину поперечной скорости) не происходит существенного влияния на начальное распределение возмущений полей скорости (рис. 4), что позволяет сделать вывод о стабилизирующем влиянии поперечного продува.

Следует отметить, что при увеличении потока тепла, которое, в силу вида решения, влечёт за собой рост горизонтальной компоненты скорости, не выделено существенных различий в поведении возмущений. Таким образом, можно сделать вывод о том, что тепловой механизм не будет наиболее опасным, более того, поперечный продув оказывает стабилизирующее влияние и приводит к формированию конвективных ячеек по всей ширине канала.

Заключение

В работе изучена устойчивость одного точного решения, описывающего течение жидкости в плоском вертикальном канале в рамках модели микроконвекции. Представлены уравнения, описывающие поведение малых возмущений.

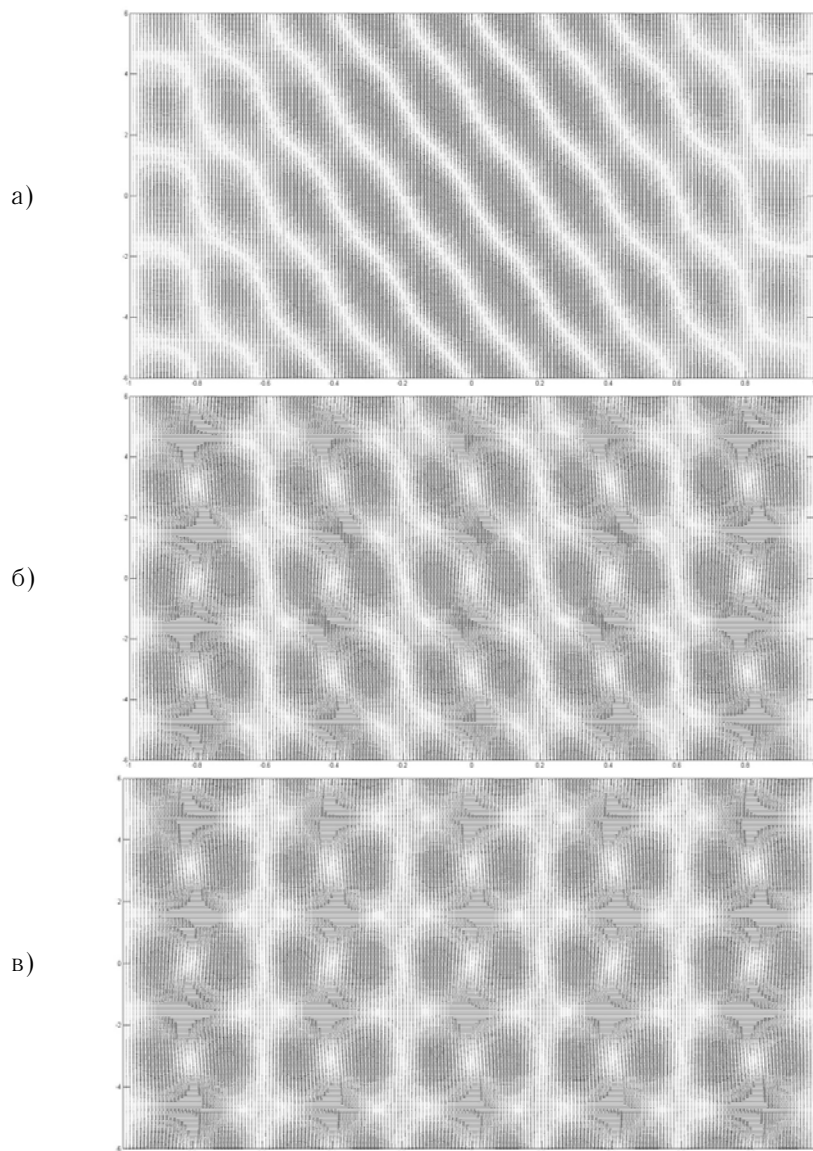


Рис. 4. Влияние теплового потока на начальные возмущения скорости.
 а) — $d = 50 \text{ Вт/см}^2$; б) — $d = 200 \text{ Вт/см}^2$; в) — $d = 500 \text{ Вт/см}^2$

Для модельной среды «диоксид кремния» доказана устойчивость при физически разумных значениях параметров задачи, показана возможность существования затухающих колебательных режимов. Рассмотрено влияние параметров на форму начальных возмущений и на основе численных расчётов установлено, что в канале могут формироваться конвективные структуры типа «тепловых пятен», гидротепловых валов и мелкомасштабных ячеек.

Литература:

1. Пухначёв В.В. Модель конвективного течения при пониженной гравитации. Моделирование в механике, 1992. — Т. 6.
2. Perera P.S., Sekerka R.F. Nonsolenoidal flow in a liquid diffusion couple // Phys. Fluids, 1997. — V. 9(2). — P. 376–391.
3. Андреев В.К., Бекежанова В.Б. Об устойчивости стационарного течения в вертикальном слое в модели микроконвекции // Изв. РАН, МЖГ, 2004. — № 2.
4. Бекежанова В.Б. Об устойчивости стационарного неизотермического течения в вертикальном слое с проницаемыми границами в модели микроконвекции // Изв. РАН, МЖГ, 2006. — № 3.
5. Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначёв В.В., Родионов А.А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. — Новосибирск: Наука, 1994.
6. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных ОДУ // Успехи мат. наук, 1961. — Т. 6, вып. 3.

Молодой ученый

Научный журнал
Выходит два раза в месяц

№ 11 (91) / 2015

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

Главный редактор:

Ахметова Г. Д.

Члены редакционной коллегии:

Ахметова М. Н.
Иванова Ю. В.
Каленский А. В.
Куташов В. А.
Лактионов К. С.
Сараева Н. М.
Авдеюк О. А.
Айдаров О. Т.
Алиева Т. И.
Ахметова В. В.
Брезгин В. С.
Данилов О. Е.
Дёмин А. В.
Дядюн К. В.
Желнова К. В.
Жуйкова Т. П.
Игнатова М. А.
Коварда В. В.
Комогорцев М. Г.
Котляров А. В.
Кузьмина В. М.
Кучерявенко С. А.
Лескова Е. В.
Макеева И. А.
Матроскина Т. В.
Мусаева У. А.
Насимов М. О.
Прончев Г. Б.
Семахин А. М.
Сенюшкин Н. С.
Ткаченко И. Г.
Яхина А. С.

Ответственные редакторы:

Кайнова Г. А., Осянина Е. И.

Международный редакционный совет:

Айрян З. Г. (Армения)
Арошидзе П. Л. (Грузия)
Атаев З. В. (Россия)
Борисов В. В. (Украина)
Велковска Г. Ц. (Болгария)
Гайич Т. (Сербия)
Данатаров А. (Туркменистан)
Данилов А. М. (Россия)
Досманбетова З. Р. (Казахстан)
Ешнев А. М. (Кыргызстан)
Игисинов Н. С. (Казахстан)
Кадыров К. Б. (Узбекистан)
Кайгородов И. Б. (Бразилия)
Каленский А. В. (Россия)
Козырева О. А. (Россия)
Куташов В. А. (Россия)
Лю Цзюань (Китай)
Малес Л. В. (Украина)
Нагервадзе М. А. (Грузия)
Прокопьев Н. Я. (Россия)
Прокофьева М. А. (Казахстан)
Ребезов М. Б. (Россия)
Сорока Ю. Г. (Украина)
Узаков Г. Н. (Узбекистан)
Хоналиев Н. Х. (Таджикистан)
Хоссейни А. (Иран)
Шарипов А. К. (Казахстан)

Художник: Шишков Е. А.

Верстка: Бурьянов П. Я.

Статьи, поступающие в редакцию, рецензируются.
За достоверность сведений, изложенных в статьях, ответственность несут авторы.
Мнение редакции может не совпадать с мнением авторов материалов.
При перепечатке ссылка на журнал обязательна.

Материалы публикуются в авторской редакции.

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

420126, г. Казань, ул. Амирхана, 10а, а/я 231.
E-mail: info@moluch.ru
<http://www.moluch.ru/>

Учредитель и издатель:

ООО «Издательство Молодой ученый»

ISSN 2072-0297

Тираж 1000 экз.

Отпечатано в типографии издательства «Молодой ученый», г. Казань, ул. Академика Арбузова, д. 4